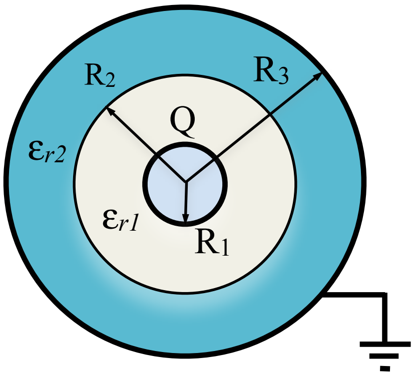
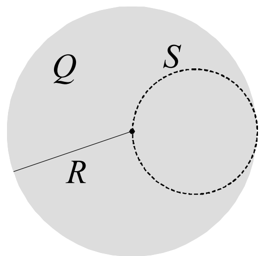
Seconda prova in itinere - 26/06/2012

Esercizio 1
Si consideri il condensatore sferico, rappresentato in figura. Sapendo che sull'armatura più interna è depositata una carica *Q*, si calcolino:

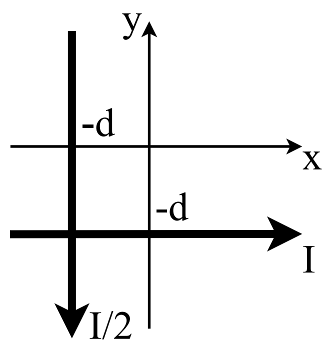


a) il campo elettrico ***E*** (*modulo, direzione e verso*) in tutti i punti dello spazio e se ne tracci un andamento grafico qualitativo (supporre $\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$).
b) il potenziale elettrostatico in tutto lo spazio e se ne tracci un andamento grafico qualitativo (supporre $\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$).
c) la capacità totale *C*.
d) le cariche di polarizzazione presenti all'interfaccia tra i due dielettrici.

Esercizio 2
a) Si enunci e si dimostri il Teorema di Gauss per il campo elettrostatico spiegando con precisione il significato dei termini che vi compaiono e discuterne il significato fisico.
b) Si consideri una carica Q = 1 nC uniformemente distribuita in una sfera di raggio R = 10 cm. Si calcoli il valore del flusso del campo elettrostatico attraverso la superficie sferica S (di raggio R/2) indicata in figura. [$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ F/m]

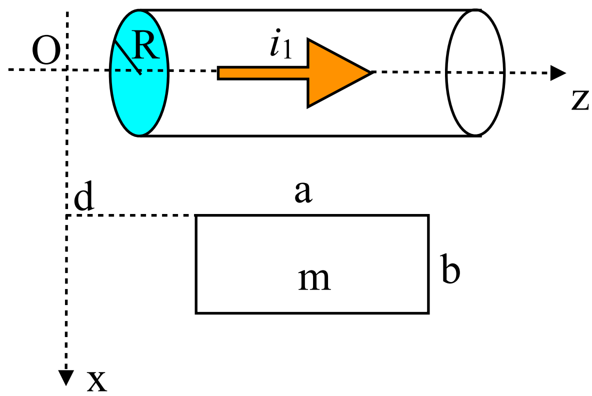


Esercizio 3
Si considerino due fili rettilinei indefiniti, elettricamente isolati tra loro, che giacciono nel piano *(x,y)* (vedi figura), percorsi da una corrente pari ad I e I/2 dirette come in figura.
Si calcoli il campo **B** (*modulo, direzione e verso*) in tutti i punti del piano *(x,y)* e si individuino i punti dove tale campo è nullo.



Esercizio 4
Un filo spesso di raggio *R* e lunghezza infinita è percorso da una corrente stazionaria di intensita i_1. Si determini:

a) il campo magnetico ***B*** (*modulo, direzione e verso*) generato in tutto lo spazio (dentro e fuori dal filo).
b) l'intensità e il verso della corrente i_2 che deve scorrere in una spira rettangolare, di lati *a* e *b* e massa *m*, posta nel piano verticale (*x,z*) a distanza *d* dall'asse *x* affinché rimanga sospesa in equilibrio.



Nota: si invitano gli studenti a motivare e commentare adeguatamente ogni formula usata negli esercizi. Nei problemi a carattere numerico è obbligo dare prima la soluzione in forma letterale, sostituendo i valori numerici solo alla fine.

Seconda prova in itinere del 26/06/12

Esercizio 1

a) Andamento del campo elettrico

Per il calcolo del campo elettrico in tutto lo spazio, si calcola prima il vettore **D** e poi si ricava **E** a partire dalla relazione (valevole soltanto per i materiali lineari, omogenei e isotropi):

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

La carica depositata sul conduttore si disporrà uniformemente sulla superficie di raggio R_1.

Data la simmetria sferica del problema, i vettori **D**, **E** e **P** sono orientati lungo $\mathbf{u_r}$ e il loro modulo dipende soltanto da r.

$$\begin{cases} \mathbf{D} = D(r)\mathbf{u_r} \\ \mathbf{E} = E(r)\mathbf{u_r} \\ \mathbf{P} = P(r)\mathbf{u_r} \end{cases}$$

Si applica il teorema di Gauss per il vettore **D** a una superficie sferica di raggio r.

$$\oiint_\Sigma \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = Q_{lib}^{\Sigma} \quad \Longrightarrow \quad D(r) 4\pi r^2 = Q_{lib}^{\Sigma}$$

Per $0 < r < R_1$ tutti i campi sono nulli poiché siamo all'interno di un conduttore:

$$E(r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad D(r) = 0$$

Per $R_1 < r < R_2$:

$$D(r) 4\pi r^2 = Q \quad \Longrightarrow \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \Longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r^2}$$

Per $R_2 < r < R_3$:

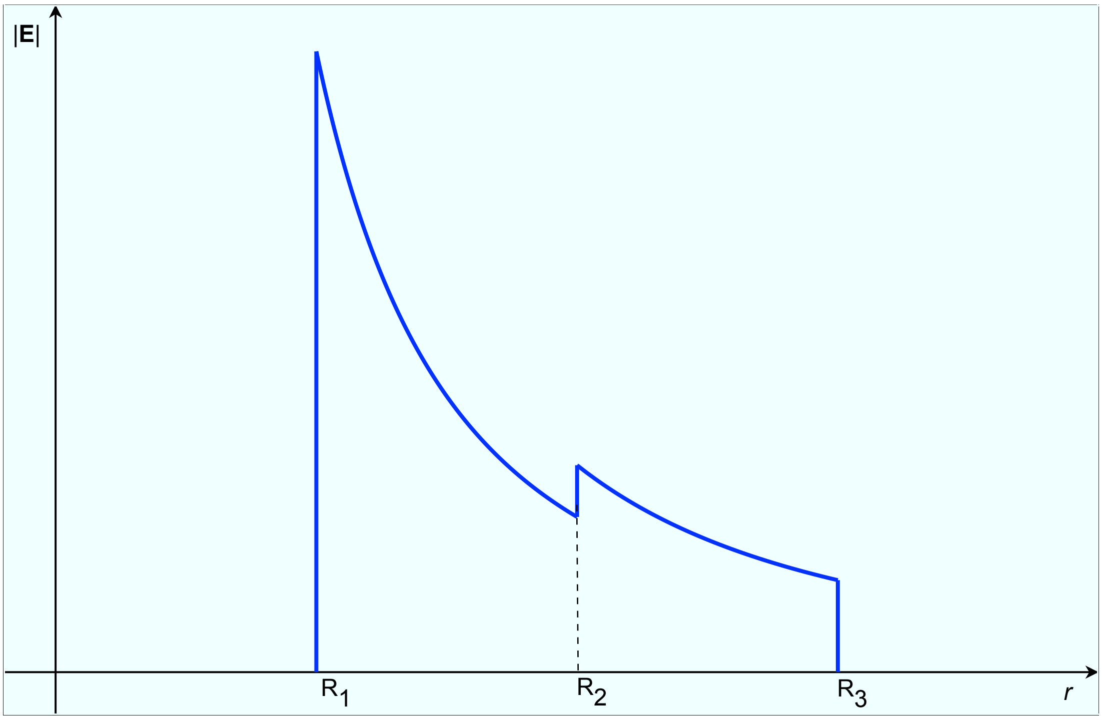
$$D(r) 4\pi r^2 = Q \quad \Longrightarrow \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \Longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r^2}$$

Per $0 < r < R_1$ tutti i campi sono nulli poiché la seconda armatura del condensatore è a massa:

$$E(r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad D(r) = 0$$

In conclusione il campo elettrico ha il seguente andamento:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r^2}, & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r^2}, & R_2 < r < R_3 \\ 0, & r > R_3 \end{cases}$$



b) Potenziale elettrostatico

Poiché l'armatura esterna del condensatore è a terra, scegliamo come riferimento il potenziale nullo per tutti i punto fuori dal condensatore. Partendo dall'incremento infinitesimo di potenziale:

$$\mathrm{d}V = -\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

lo si integra nelle varie zone dello spazio. Per $r > R_3$:

$$\mathrm{d}V = 0 \quad \Longrightarrow \quad V(r) = cost \quad \Longrightarrow \quad V(r) = 0$$

Per $R_2 < r < R_3$:

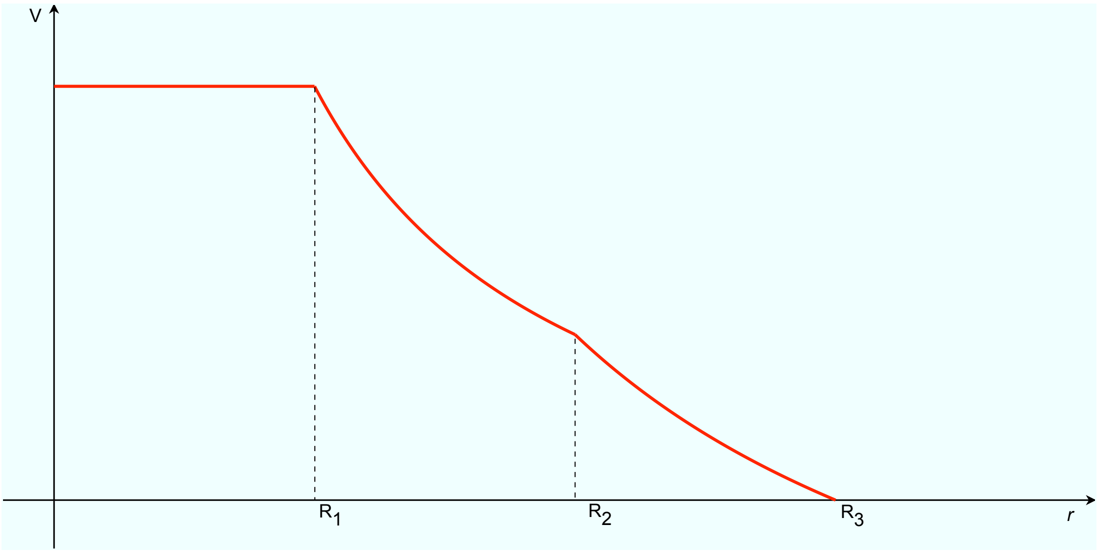
$$\int_{V(R_3)}^{V(r)} \mathrm{d}V = \int_{R_3}^{r} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2} r^2}\mathrm{d}r \quad \Longrightarrow \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3}\right)$$

Per $R_1 < r < R_2$:

$$\int_{V(R_2)}^{V(r)} \mathrm{d}V = \int_{R_2}^{r} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1} r^2}\mathrm{d}r \quad \Longrightarrow \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Per $0 < r < R_1$:

$$\mathrm{d}V = 0 \quad \Longrightarrow \quad V(r) = cost \quad \Longrightarrow \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$



c) Calcolo della capacità

Il sistema è equivalente alla serie di due condensatori sferici. Ricordiamo che la capacità di un condensatore sferico con un dielettrico di costante ϵ_r è:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\dfrac{1}{R_{min}} + \dfrac{1}{R_{max}}}$$

La capacità equivalente dei due condensatori sferici in serie risulta quindi:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{C} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}}$$

Si ottiene quindi:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{\epsilon_{r1}} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{\epsilon_{r2}}}$$

Allo stesso risultato si poteva pervenire sfruttando il calcolo del potenziale elettrostatico del punto precedente:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V(R_1) - V(R_3)}$$

d) Cariche di polarizzazione all'interfaccia tra i dielettrici

Per il calcolo delle cariche di polarizzazione si calcola il vettore $\mathbf{P}$ nelle regioni occupate dai dielettrici:

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\mathbf{D} = \begin{cases} \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{u_r}, & R_1 < r < R_2 \\ \\ \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{u_r}, & R_2 < r < R_3 \end{cases}$$

Definendo con $\mathbf{n_1}$ il versore normale uscente dal dielettrico 1 e con $\mathbf{n_2}$ il versore uscente dal dielettrico 2 entrambi spiccati dalla superficie di separazione (r=R$_2$) si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma_{P1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n_1} = \mathbf{P}(R_1) \cdot \mathbf{u_r} = P(R_1) = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{Q}{4\pi R_1^2} \\ \\ \sigma_{P2} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n_2} = \mathbf{P}(R_2) \cdot \mathbf{u_r} = -P(R_2) = -\frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{Q}{4\pi R_1^2} \end{cases}$$

La carica di polarizzazione netta risulta la somma algebrica delle precedenti:

$$\sigma_{netta} = \sigma_{P1} + \sigma_{P2} = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{Q}{4\pi R_1^2} - \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

Esercizio 2

a) Dimostrazione del Teorema di Gauss

Vedi teoria.

b) Calcolo del flusso

La carica è distribuita uniformemente sulla sfera, quindi la sua densità volumetrica di carica risulta:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Per il Teorema di Gauss il flusso attraverso la sfera in figura è dato dal rapporto tra la carica contenuta nella sfera e la costante ϵ_0:

$$\Phi = \frac{Q^{sfera}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{Q}{8\epsilon_0} = \frac{10^{-9}}{8 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 14.12\ V \cdot m$$

Esercizio 3

Si utilizza il principio di sovrapposizione degli effetti e la legge di Biot-Savart per il campo magnetico generato da un filo sottile indefinito.

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi(x+d)}\mathbf{u}_z \\ \\ \mathbf{B}_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(y+d)}\mathbf{u}_z \end{cases} \implies \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{2(x+d)} + \frac{1}{y+d}\right)\mathbf{u}_z$$

Annullando il campo magnetico totale $\mathbf{B}$ si ottiene l'equazione del luogo dei punti richiesto:

$$\left(\frac{1}{2(x+d)} + \frac{1}{y+d}\right) = 0 \implies y = -2x - 3d, \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

Esercizio 4

a) Campo magnetico generato dal cavo

Per simmetria, il modulo del campo magnetico $\mathbf{B}$ dipende soltanto dalla distanza r dall'asse z e ha come linee di forza delle circonferenze concentriche e ortogonali all'asse z.

Si applica il Teorema d'Ampére su una circonferenza di raggio r e si utilizza un sistema di coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse z:

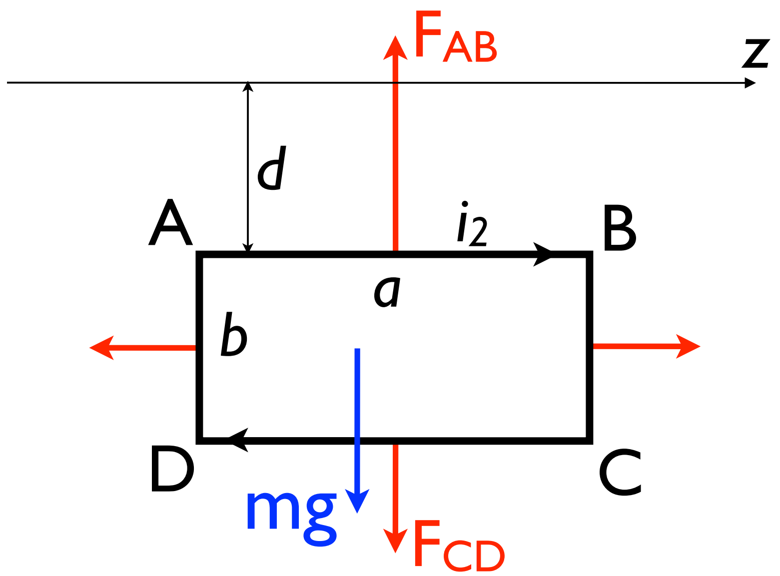
$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C^\gamma \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i_1}{2\pi R^2} r\mathbf{u}_\phi, & 0 < r < R \\ \\ \dfrac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\mathbf{u}_\phi, & r > R \end{cases}$$

b) Equilibrio della spira

Sulla spira agisce la forza di peso $m\mathbf{g}$ e la forza data dalla seconda legge di Laplace:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = i_2 \mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Affinché vi sia equilibrio nel piano verticale la corrente i_2 deve scorrere in senso orario. Il campo magnetico infatti non è uniforme nello spazio e sul tratto AB è sicuramente più intenso che sul tratto CD. Ne consegue sicuramente che $|\mathbf{F}_{AB}| > |\mathbf{F}_{CD}|$. L'unica situazione possibile per l'equilibrio è quella tale per cui $\mathbf{F}_{AB}$ risulta opposta alla forza peso.



I tratti laterali della spira sono soggetti a due forze uguali e opposte in verso che non contribuiscono all'equilibrio poiché agiscono in orizzontale.

I campi magnetici sui tratti AB e CD non dipendono da z, quindi le forze agenti sui tratti AB e CD risultano:

$$\mathbf{F}_{AB} = -i_2 a B(r = d)\mathbf{u_x} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi d}\mathbf{u_x}$$

$$\mathbf{F}_{CD} = i_2 a B(r = d + b)\mathbf{u_x} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi (d + b)}\mathbf{u_x}$$

All'equilibrio la risultante delle forze deve risultare nulla:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{CD} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi d} - \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi (d + b)} = mg \quad \Longrightarrow \quad i_2 = \frac{2\pi m g}{\mu_0 i_1 a b} d(d + b)$$