Preappello – 25 giugno 2013

Problema 1

Una mole di gas perfetto monoatomico subisce una trasformazioni reversibile costituita da un raffreddamento isocoro, A → B, seguito da un riscaldamento isobaro, B → C. Sapendo che il calore totale scambiato è nullo e che $T_A = 2T_B$, si calcoli:

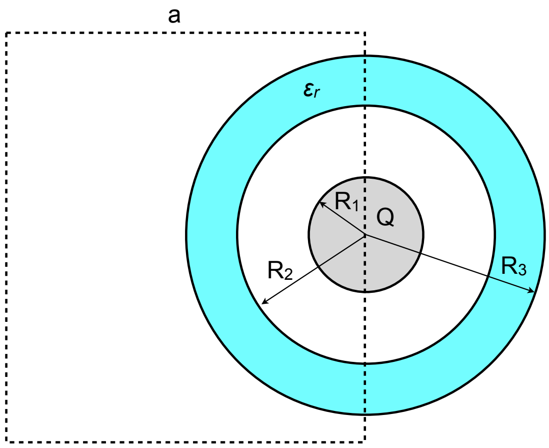
a) la temperatura finale del gas, T_C, in funzione di T_A;
b) la variazione totale di entropia subita dal gas, precisandone esplicitamente il segno.

Si dica inoltre, giustificando la risposta, se sia possibile riportare il gas allo stato iniziale con una trasformazione adiabatica reversibile.

Problema 2

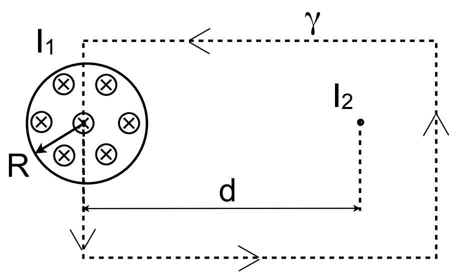
Una distribuzione sferica uniforme avente carica Q e raggio R_1 è circondata da un guscio sferico di materiale dielettrico (vedi figura). Calcolare:

a) il campo elettrico **E** (*modulo, direzione e verso*) in tutti i punti dello spazio e se ne tracci un andamento grafico qualitativo.
b) Il potenziale elettrostatico in tutti i punti dello spazio e se ne tracci un andamento grafico qualitativo.
c) Le cariche di polarizzazione presenti alle interfacce dielettrico-aria.
d) Il flusso del campo elettrico uscente dal cubo di lato $a > R_3$ tratteggiato in figura.



Problema 3

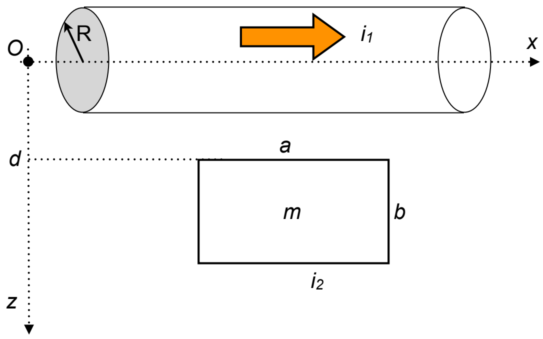
a) Si enunci il Teorema di Ampere in forma integrale spiegando chiaramente: significato dei termini, significato fisico e suo utilizzo.
b) La circuitazione del campo magnetico lungo la linea γ rappresentata in figura vale $4\pi\cdot10^{-6}$T·m. Sapendo che la corrente I_1 che scorre nel primo conduttore (rettilineo, indefinito e con sezione πR^2) è di 10A, calcolare intensità e verso della corrente I_2 che scorre nel secondo conduttore (rettilineo, indefinito e sottile) distante d dall'asse del primo.



Problema 4

Un filo spesso di raggio R e lunghezza infinita è percorso da una corrente di intensità i_1. Si determini:

a) Il campo magnetico **B** (*modulo, direzione e verso*) generato in tutto lo spazio (dentro e fuori dal filo).
b) L'intensità e il verso della corrente i_2 che deve scorrere in una spira rettangolare di lati a e b e massa m, posta nel piano verticale (x,z) a distanza d dall'asse x, affinché rimanga sospesa in equilibrio.



Nota: Si invitano gli studenti a motivare e commentare adeguatamente ogni formula usata negli esercizi. Nei problemi a carattere numerico è obbligo dare prima la soluzione in forma letterale, sostituendo i valori numerici soltanto alla fine.

Seconda prova in itinere del 25/06/13

Esercizio 1

a) Temperatura finale

Trasformazione isocora AB

Il lavoro risulta nullo poiché il volume rimane costante. Dal primo principio risulta quindi:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} \quad \Longrightarrow \quad Q_{AB} = nc_V\left(T_B - T_A\right) = -nc_V\left(\frac{T_A}{2}\right)$$

Trasformazione isobara BC

Il calore scambiato a pressione costante risulta:

$$Q_{BC} = nc_P\left(T_C - T_B\right) = nc_P\left(T_C - \frac{T_A}{2}\right)$$

Trasformazione ABC

Il calore scambiato è nullo. Risulta quindi:

$$Q_{AB} + Q_{BC} = 0 \quad \Longrightarrow \quad n\frac{3}{2}R\left(T_B - T_A\right) + n\frac{5}{2}R\left(T_C - \frac{T_A}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad T_C = \frac{4}{5}T_A$$

b) Variazione di entropia

Trasformazione isocora AB

Il lavoro risulta nullo poiché il volume rimane costante. La variazione di entropia risulta quindi (n=1):

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B \frac{\mathrm{d}U}{T} = \int_A^B \frac{nc_V \mathrm{d}T}{T} = nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = -\frac{3}{2}R\ln 2$$

Trasformazione isobara BC

La variazione di entropia risulta (n=1):

$$\Delta S_{BC} = \int_B^C \frac{\delta Q}{T} = \int_B^C \frac{nc_P \mathrm{d}T}{T} = nc_P \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = nc_P \ln\left(\frac{2T_C}{T_A}\right) = \frac{5}{2}R\ln\left(\frac{8}{5}\right)$$

Trasformazione ABC

La variazione di entropia totale risulta quindi:

$$\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} = -\frac{3}{2}R\ln 2 + \frac{5}{2}R\ln\left(\frac{8}{5}\right) \simeq 1.122\ J/K$$

La variazione di entropia è quindi positiva.

c)

Poiché l'entropia per trasformazioni reversibili è una funzione di stato, la sua variazione dipende soltanto dalle coordinate termodinamiche (p,V,T) degli stati iniziale e finale. Inoltre una trasformazione adiabatica reversibile è anche isoentropica. Risulta quindi impossibile tornare allo stato iniziale di una trasformazione reversibile in cui vari l'entropia tramite una trasformazione isoentropica.

Esercizio 2

a) Andamento del campo elettrico

Per il calcolo del campo elettrico in tutto lo spazio, si calcola prima il vettore **D** e poi si ricava **E** a partire dalla relazione (valevole soltanto per i materiali lineari, omogenei e isotropi):

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}$$

Data la simmetria sferica del problema, i vettori **D**, **E** e **P** sono orientati lungo $\mathbf{u_r}$ e il loro modulo dipende soltanto da r.

$$\begin{cases} \mathbf{D} = D(r)\mathbf{u_r} \\ \mathbf{E} = E(r)\mathbf{u_r} \\ \mathbf{P} = P(r)\mathbf{u_r} \end{cases}$$

Si applica il teorema di Gauss per il vettore **D** a una superficie sferica di raggio r.

$$\oint\!\!\!\oint_\Sigma \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = Q_{lib}^\Sigma \quad \Longrightarrow \quad D(r)4\pi r^2 = Q_{lib}^\Sigma$$

Per $0 < r < R_1$:

$$D(r)4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Longrightarrow \quad D(r) = \frac{\rho}{3}r = \frac{Q}{4\pi R_1^3}r \quad \Longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^3}r$$

dove $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}$.
Per $R_1 < r < R_2$:

$$D(r)4\pi r^2 = Q \quad \Longrightarrow \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \Longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Per $R_2 < r < R_3$:

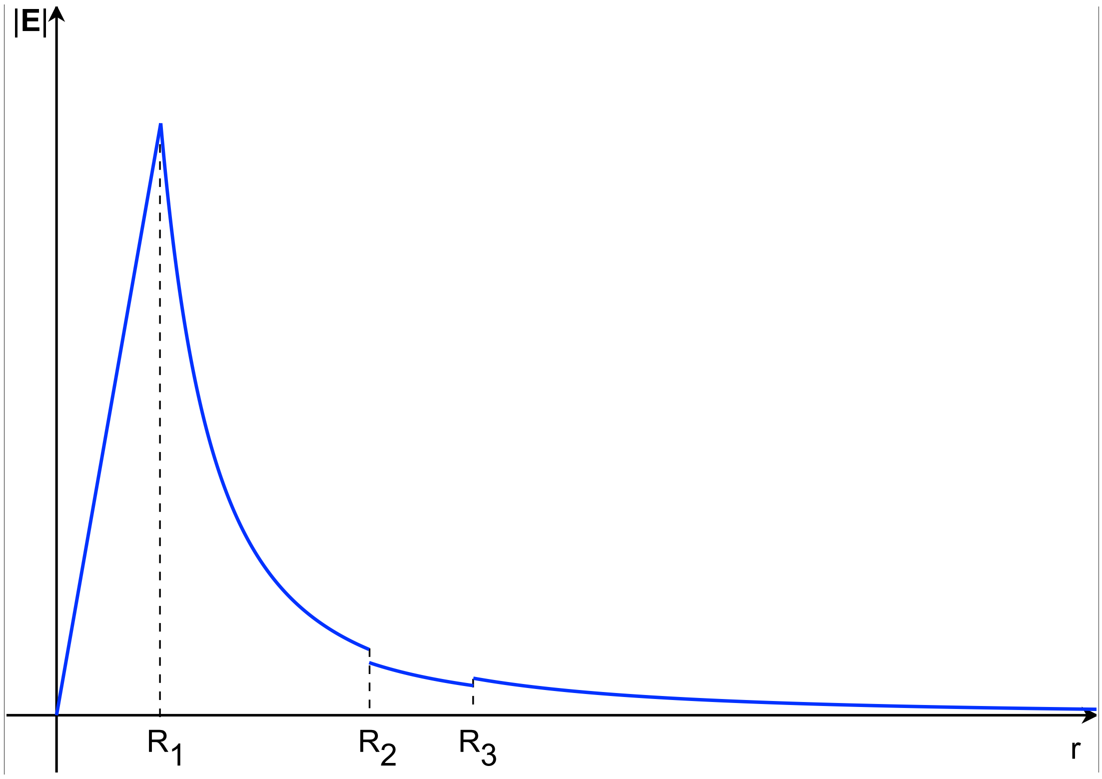
$$D(r)4\pi r^2 = Q \quad \Longrightarrow \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \Longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

Per $r < R_3$:

$$D(r)4\pi r^2 = Q \quad \Longrightarrow \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \Longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

In conclusione il campo elettrico ha il seguente andamento:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^3}r, & 0 < r < R_1 \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & R_1 < r < R_2 \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}, & R_2 < r < R_3 \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R_3 \end{cases}$$



b) Potenziale elettrostatico

Scegliamo come riferimento il potenziale nullo all'infinito.
Partendo dall'incremento infinitesimo di potenziale:

$$\mathrm{d}V = -\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

lo si integra nelle varie zone dello spazio. Per $r > R_3$:

$$\int_{V(\infty)}^{V(r)} \mathrm{d}V = \int_{V(\infty)}^{V(r)} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r \quad \Longrightarrow \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Per $R_2 < r < R_3$:

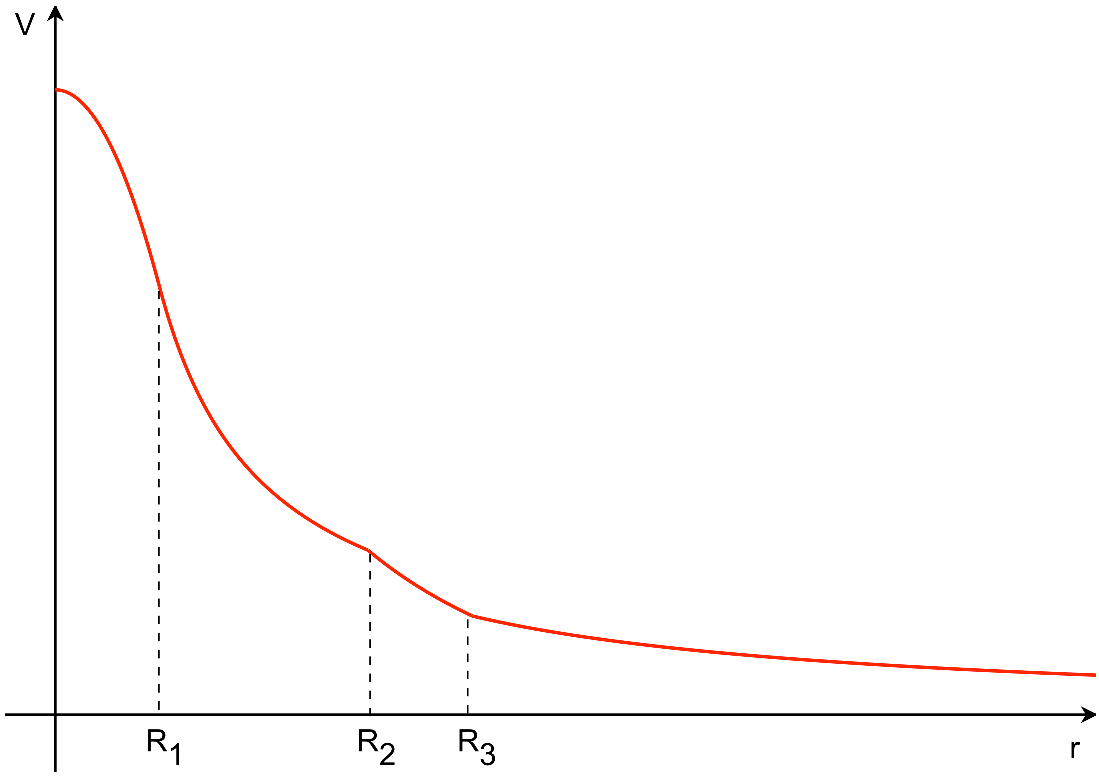
$$\int_{V(R_3)}^{V(r)} \mathrm{d}V = \int_{R_3}^{r} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}\mathrm{d}r \quad \Longrightarrow \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

Per $R_1 < r < R_2$:

$$\int_{V(R_2)}^{V(r)} \mathrm{d}V = \int_{R_2}^{r} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r \quad \Longrightarrow \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

Per $0 < r < R_1$:

$$\int_{V(R_1)}^{V(r)} \mathrm{d}V = \int_{R_1}^{r} -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r\mathrm{d}r \quad \Longrightarrow \quad V(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$



c) Cariche di polarizzazione alle interfacce aria-dielettrico

Per il calcolo delle cariche di polarizzazione si calcola il vettore $\mathbf{P}$ nella regione occupata dal dielettrico:

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\mathbf{D} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{u_r}, \quad R_2 < r < R_3$$

Definendo con $\mathbf{n_1}$ il versore normale uscente dal dielettrico rivolto verso il centro e con $\mathbf{n_2}$ il versore uscente dal dielettrico e rivolto verso l'esterno, si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma_{P1} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n_1} = -\mathbf{P}(R_2)\cdot\mathbf{u_r} = -P(R_2) = -\dfrac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\dfrac{Q}{4\pi R_2^2} \\ \\ \sigma_{P2} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n_2} = \mathbf{P}(R_2)\cdot\mathbf{u_r} = P(R_3) = \dfrac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\dfrac{Q}{4\pi R_3^2} \end{cases}$$

d) Flusso uscente dalla superficie cubica

La superficie cubica taglia a metà la distribuzione di carica di raggio R_1. Le cariche di polarizzazione all'interno del cubo sono in totale pari a zero. Applicando il teorema di Gauss si ottiene quindi:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0}$$

Esercizio 3

a) Teorema d'Ampére

Enunciato

Il Teorema d'Ampére dice che la circuitazione del campo magnetico $\mathbf{B}$ lungo una *qualsiasi* linea chiusa γ è proporzionale alla corrente *concatenata* alla linea. La corrente concatenata è la somma algebrica delle correnti che "bucano" una qualsiasi superficie che abbia γ come bordo. Una volta fissata l'orientazione di γ, e conseguentemente il verso della normale secondo la regola della mano destra, le correnti vanno prese con segno positivo o negativo a seconda se siano concordi o discordi a tale normale. In simboli il teorema viene espresso nel seguente modo:

$$\mathscr{C}_\gamma(\mathbf{B}) = \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I^\gamma$$

dove $\mathscr{C}_\gamma(\mathbf{B})$ è la circuitazione del campo magnetico $\mathbf{B}$ lungo la linea chiusa γ, $d\mathbf{l}$ è l'elemento infinitesimo di linea orientato come γ, μ_0 è la costante di permeabilità magnetica del vuoto e I^γ è la corrente concatenata alla linea γ precedentemente definita.

Significato fisico

Il Teorema d'Ampére esprime il fatto che il campo magnetico non è un campo conservativo ma bensì rotazionale. Scegliendo infatti un percorso chiuso che abbracci un filo percorso da corrente la circuitazione risulta diversa da zero.

Utilizzo

Il Teorema d'Ampére *non serve* in generale per calcolare il campo magnetico generato da una distribuzione di correnti stazionarie. Per calcolare infatti la circuitazione bisognerebbe conoscere a priori l'andamento del campo magnetico sui punti toccati dalla linea. In alcuni casi particolari, però, è possibile conoscere a priori l'andamento delle linee di campo e la dipendenza funzionale del modulo dalle coordinate (es fili indefiniti, solenoidi indefiniti e toroidali). In tali situazioni, scegliendo come linea γ una linea su cui il modulo del campo $\mathbf{B}$ si mantenga costante, il Teorema può essere utilizzato per calcolare facilmente il campo magnetico senza dover ricorrere alla prima legge elementare di Laplace.

b) Calcolo della corrente

Per il Teorema di Ampére:

$$\mathscr{C}_\gamma(\mathbf{B}) = \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I^\gamma$$

Il segno delle correnti concatenate è preso secondo la regola della mano destra in relazione all'orientamento della linea γ. Dal disegno risulta quindi:

$$I^\gamma = -\frac{1}{2}I_1 + I_2$$

Si ottiene quindi:

$$\mathscr{C}_\gamma(\mathbf{B}) = \mu_0 \left(-\frac{1}{2}I_1 + I_2\right) \quad \Longrightarrow \quad I_2 = \frac{\mathscr{C}_\gamma(\mathbf{B})}{\mu_0} + \frac{I_1}{2} = 15\ A$$

Esercizio 4

a) Campo magnetico generato dal cavo

Per simmetria, il modulo del campo magnetico $\mathbf{B}$ dipende soltanto dalla distanza r dall'asse z e ha come linee di forza delle circonferenze concentriche e ortogonali all'asse z.

Si applica il Teorema d'Ampére su una circonferenza di raggio r e si utilizza un sistema di coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse z:

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C^\gamma \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i_1}{2\pi R^2} r\mathbf{u}_\phi, & 0 < r < R \\ \\ \dfrac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\mathbf{u}_\phi, & r > R \end{cases}$$

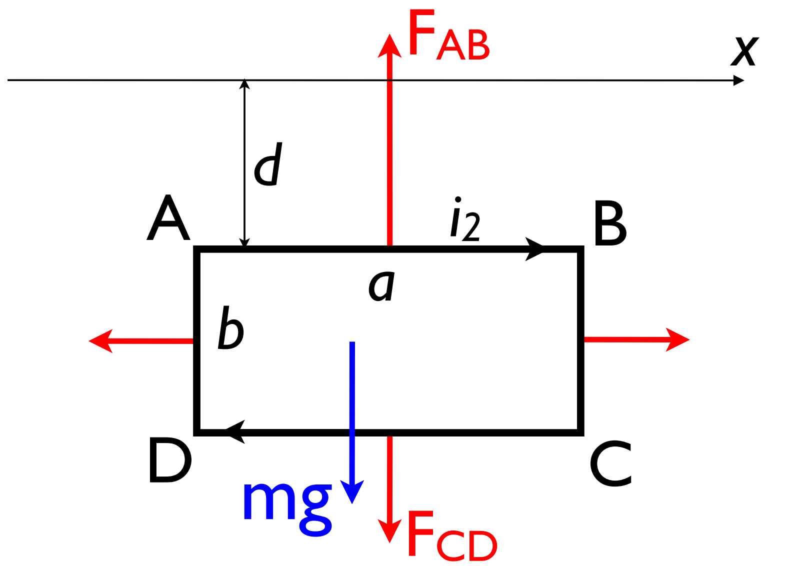
b) Equilibrio della spira

Sulla spira agisce la forza di peso $m\mathbf{g}$ e la forza data dalla seconda legge di Laplace:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = i_2 \mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Affinché vi sia equilibro nel piano verticale la corrente i_2 deve scorrere in senso orario. Il campo magnetico infatti non è uniforme nello spazio e sul tratto

AB è sicuramente più intenso che sul tratto CD. Ne consegue sicuramente che $|\mathbf{F}_{AB}| > |\mathbf{F}_{CD}|$. L'unica situazione possibile per l'equilibrio è quella tale per cui $\mathbf{F}_{AB}$ risulta opposta alla forza peso.



I tratti laterali della spira sono soggetti a due forze uguali e opposte in verso che non contribuiscono all'equilibrio poiché agiscono in orizzontale.

I campi magnetici sui tratti AB e CD non dipendono da z, quindi le forze agenti sui tratti AB e CD risultano:

$$\mathbf{F}_{AB} = -i_2 a B(r = d)\mathbf{u_z} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi d}\mathbf{u_z}$$

$$\mathbf{F}_{CD} = i_2 a B(r = d + b)\mathbf{u_z} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi(d + b)}\mathbf{u_z}$$

All'equilibrio la risultante delle forze deve risultare nulla:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{CD} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi d} - \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi(d + b)} = mg \quad \Longrightarrow \quad i_2 = \frac{2\pi mg}{\mu_0 i_1 ab} d(d + b)$$