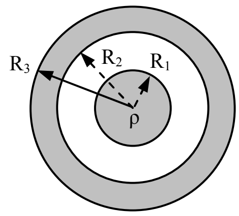
Politecnico di Milano
Fondamenti di Fisica Sperimentale
a.a. 2009-2010 - Facoltà di Ingegneria Industriale - Ind. Aero-Energ-Mecc

II prova in itinere - 05/07/2010

Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. *Sostituire i valori numerici solo alla fine, dopo aver ricavato le espressioni letterali. Scrivere in stampatello nome, cognome, matricola e firmare ogni foglio.*

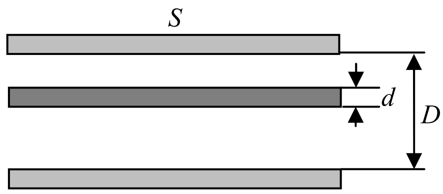
1. Si consideri una distribuzione di carica sferica di raggio R_1 = 10 cm con densità di carica volumetrica costante $\rho = 15\times10^{-8}$ C/m^3. Attorno a tale distribuzione di carica viene posto un guscio sferico conduttore, inizialmente scarico, di raggio interno R_2 = 20 cm ed esterno R_3 = 25 cm. Si calcoli:

a) la carica totale Q del sistema (soluzione numerica);
b) il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ in tutto lo spazio, facendone un grafico (solo soluzione analitica);
c) il potenziale elettrostatico V in tutto lo spazio, facendone un grafico (solo soluzione analitica).



2. Un condensatore piano, costituito da due armature piane di area S poste a distanza D tale che $D^2 \ll S$, viene connesso ad un generatore. Una volta prodotta una d.d.p. V_0 tra le armature, il generatore viene disconnesso e una lastra conduttrice a facce piane e parallele, di spessore $d < D$, viene inserita internamente al condensatore. Si calcolino:

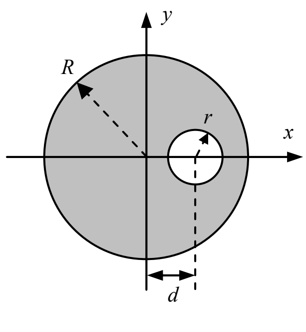
a) la densità superficiale di cariche indotte sulla lastra;
b) il campo elettrico nel condensatore;
c) il lavoro esterno compiuto per inserire la lastra.



3. Entro un conduttore cilindrico di raggio R = 5 cm è praticato un foro cilindrico parallelo all'asse di raggio r = 1 cm; l'asse del foro dista dall'asse del conduttore d = 3 cm. Se il conduttore è percorso da una densità di corrente J = 4 A/mm^2 uniforme su tutta la sezione, calcolare l'espressione del campo magnetico

a) lungo la congiungente i due centri (solo soluzione analitica);
b) nel centro del foro (soluzione numerica).

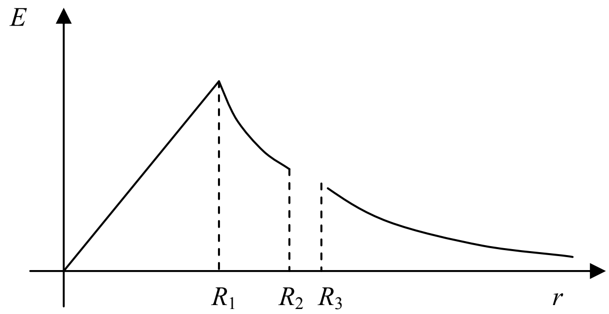
(Dati: Permeabilità magnetica del vuoto $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m)



4. a) Si descrivano le proprietà del campo magnetico $\boldsymbol{B}$.
b) Si verifichi la legge di Ampère nei casi seguenti:
b1) un filo infinito rettilineo percorso da corrente è concatenato a un percorso di circuitazione Γ_1 (percorso a scelta dallo studente).
b2) un filo infinito rettilineo percorso da corrente non è concatenato a un percorso di circuitazione Γ_2 (percorso a scelta dallo studente).

ESERCIZIO 1

a) La caricadella sfera interna è $Q_1 = (4/3)\ \pi\ R_1\ \rho = 6.28\times10^{-10}$ C.
Tutte le linee di campo che partono dalla carica vengono intercettate dal conduttore esterno e si realizza una induzione totale. Quindi sulla superficie interna del conduttore si accumula una carica $Q_2 = -Q_1$ e, poiché il conduttore è globalmente neutro, la carica $Q_3 = -Q_2 = Q_1$ lasciata libera si accumula sulla superficie esterna in modo da rendere nullo il campo elettrico all'interno del conduttore.
La carica totale risulta dunque $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_1$
Q_2 e Q_3 rispecchia la simmetria sferica del problema: sono distribuite uniformemente Il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ è radiale e uscente rispetto al centro della sfera di raggio R_1 in tutto lo spazio a causa della simmetria sferica del problema.
Utilizzando la legge di Gauss si trova:



Per $r \le R_1$: $$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R_1^3}$$

Per $R_1 < r < R_2$: $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

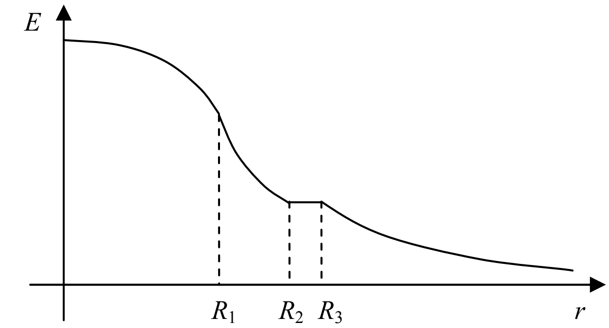
Alla distanza $r = R_2$ il campo $\boldsymbol{E}$ è singolare: è presente una discontinuità finita $\Delta E = \rho_2/\varepsilon_0 = Q_2 / (4\ \pi\ )< 0$dovuta alla distribuzione superficiale di carica.

Per $R_2 < r < R_3$: $E = 0$

Alla distanza $r = R_3$ il campo $\boldsymbol{E}$ è singolare: è presente una discontinuità finita $\Delta E = \rho_3/\varepsilon_0$ dovuta alla distribuzione superficiale di carica.

Per $r > R_3$: $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

c) Il potenziale elettrostatico V ha superfici equipotenziali sferiche concentriche alla carica a causa della simmetria sferica del problema.
Utilizzando la definizione di potenziale $V = V_0 - \int_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$ dove Γ è un percorso di integrazione che parte dal punto di riferimento O e arriva al punto in cui si vuole calcolare il potenziale V e scegliendo $V_0 = 0$ in un punto O a distanza infinita si trova:



Per $r > R_3$: $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Per $R_2 < r < R_3$: $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_3} = \text{costante}$$

Per $R_1 < r < R_2$: $$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r}\right)$$

Per $r \le R_1$: $$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{r^2}{R_1^3}\right)\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{3}{2R_1} - \frac{r^2}{2R_1^3}\right)$$

ESERCIZIO 2

Il condensatore senza lastra sottoposto all'azione del generatore si carica e produce al suo interno un campo elettrico $\boldsymbol{E}$. Poiché $D^2 << S$ possiamo trascurare la dispersione delle linee di campo ai bordi del condensatore e considerare il campo $\boldsymbol{E}$ uniforme, perpendicolare ad entrambe le armature e orientato dall'armatura carica positivamente verso quella carica negativamente. Dalla relazione tra il potenziale V ed $\boldsymbol{E}$ risulta: $E = V_0 / D$.

a) Inserendo la lastra, si ha induzione di una densità di carica sulle sue superfici (di segno opposto) tale da annullare il campo al suo interno. Poiché il condensatore è disconnesso, la carica sulle sue armature rimane invariata e così anche il campo nello spazio non occupato dalla lastra, mentre varia la differenza di potenziale in conseguenza dell'annullamento del campo all'interno della lastra. Il campo corrisponde ad una densità superficiale di carica sulle armature e sulla lastra (come si dimostra tramite la legge di Gauss) in modulo pari a:

   $\sigma = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 V_0 / D$

   Il segno della densità superficiale di carica risulta: positivo per armatura a potenziale superiore, negativo per la superficie della lastra vicina all'armatura a potenziale superiore, positivo per la superficie della lastra vicina all'armatura a potenziale inferiore, negativo l'armatura a potenziale inferiore.

b) Il campo elettrico è nullo all'interno della lastra, uniforme e uguale a quello preesistente all'inserimento della lastra in ogni altro punto tra le armature del condensatore.

c) Il lavoro esterno L_{est} compiuto dall'operatore che ha introdotto la lastra è $L_{est} = - L_{elettrostatico}$. Il lavoro del campo elettrostatico $L_{elettrostatico}$ è pari all'opposto della variazione dell'energia elettrostatica ΔU del condensatore, ovvero all'opposto della variazione di energia elettrostatica associata al campo elettrico E creato dal condensatore.
   Seguiamo quest'ultima via:

   $L_{est} = - L_{elettrostatico} = \Delta U = - \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S d < 0$

   dove $S d$ è il volume della lastra e il lavoro esterno è negativo poiché la forza elettrostatica è attrattiva.

ESERCIZIO 3

La determinazione del campo magnetico generato dal conduttore non può apparentemente essere fatta sfruttando la legge di Ampère in forma integrata vista a lezione, poiché in problema posto non ha elevata simmetria. Tuttavia la sovrapponibilità degli effetti permette di scoporre il campo totale creato nella somma di due campi generati da conduttori cilindrici percorsi ciascuno da densità di correnti uniformi, di cui è agevole determinare il campo tramite la legge di Ampère).

I due campi da sommare considerare sono: 1) $\boldsymbol{B}_1$ generato da un cilindro con centro in O, origine degli assi, e raggio R percorso da una densità di corrente J nella direzione e nel verso dell'asse z di una terna destrorsa xyz (dove x e y sono gli assi in figura) e 2) $\boldsymbol{B}_2$ generato da un cilindro con centro in $(d,0,0)$ e raggio r percorso da una densità di corrente $J' = -J$ nella direzione dell'asse z, ma in verso opposto.

Infatti la corrente totale che scorre attraverso i punti interni al foro risulta: $J + J' = 0$ e quindi il campo di corrente totale dovuto alla sovrapposizione dei due conduttori è esattamente quello richiesto nelle ipotesi, e così anche il campo totale generato $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$.

a) Per $0 \le x \le d - r$:

Applichiamo la legge di Ampère ad un percorso circolare Γ_1 con centro in O e raggio x.

Il campo generato dal conduttore 1 è tangente, orientato in verso antiorario rispetto ad un osservatore che guarda la figura e uniforme in modulo. La sua circuitazione risulta $2\,\pi\,x\,B_1$

La corrente concatenata al risulta percorso Γ_1 risulta $\pi\,x^2\,J$ e la legge di Ampère impone dunque che:

$2\,\pi\,x\,B_1 = \mu_0\,(\pi\,x^2\,J)$

Da cui: $B_1 = ½\,\mu_0\,x\,J$

Analogamente B_2 si ottiene utilizzando un percorso circolare Γ_2 con centro in $(d,\,0)$ e raggio $(d - x)$. La corrente concatenata al percorso Γ_2 sul conduttore (virtuale) 2 è $\pi\,r^2\,J$. Si trova:

$B_2 = ½\,\mu_0\,r^2\,J\,/\,(d - x)$

Il campo totale risulta: $B = B_1 + B_2 = ½\,\mu_0\,J\,(x + r^2\,/\,(d - x))$

Per $d - r \le x \le d$:

In modo analogo al punto a) si trova:

$B_1 = ½\,\mu_0\,x\,J$

Analogamente, utilizzando un percorso circolare Γ_2 con centro in $(d,\,0)$ e raggio $(d - x)$, la corrente concatenata risulta $\pi\,(d - x)^2\,J$. Si trova:

$B_2 = -\,½\,\mu_0\,(d - x)\,J$

Il campo totale risulta costante: $B = B_1 + B_2 = ½\,\mu_0\,J\,(x + (d - x)) = ½\,\mu_0\,J\,d$

L'esercizio non richiede i valori per $x \ge d$, che vengono riportati per completezza.

Per $d \le x \le d + r$:

Il campo totale risulta costante: $B = B_1 + B_2 = ½\,\mu_0\,J\,(x - (x - d)) = ½\,\mu_0\,J\,d$

Per $d + r \le x \le R$:

$B = B_1 + B_2 = ½\,\mu_0\,J\,(x - r^2\,/\,(x - d))$

Per $x \ge R$:

$B = B_1 + B_2 = ½\,\mu_0\,J\,(R^2\,/\,x - r^2\,/\,(x - d))$

b) Sostituendo i valori numerici si trova:

$B(d,\ 0) = ½\ \mu_0\ J\ d = 7.54\times10^{-3}$ T

ESERCIZIO 4

a) Le proprietà fondamentali del campo magnetostatico sono interamente descritte 1) dall'equazione sul flusso attraverso una superficie chiusa S (equivalente alla legge di Gauss del campo elettrico) e 2) dalla legge di Ampère che ne descrive la circuitazione su un percorso chiuso Γ:

a.1) $\Phi_S(\boldsymbol{B}) = 0$

il che equivale esattamente a dire che le linee di campo di ***B*** sono chiuse

ovvero a dire che il campo magnetostatico è solenoidale

a.2) $Circuitazione_\Gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0\ I_{concatenata}$

Le due equazioni vanno commentate secondo quanto presente in ogni testo di elettromagnetismo (a cui si rimanda per i dettagli), limitatamente alle parti in programma e viste a lezione.

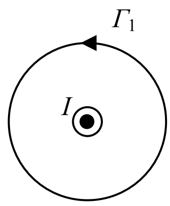
b) La legge di Biöt-Savart ci fornisce il valore del campo in ogni punto dello spazio: ***B*** è orientato tangenzialmente alla circonferenza con centro sul filo, passante per il punto in cui si vuole determinare il campo e giacente in un piano perpendicolare al filo. Il suo verso è antiorario se la circonferenza è osservata da un punto a valle dell'attraversamento da parte della corrente I del piano in cui giace (regola della mano destra). Il suo modulo è

$B = \mu_0\ I\ /\ (2\ \pi\ r)$

dove r è il raggio della circonferenza e la distanza dal filo del punto in cui si vuole misurare B.

Per verificare la legge di Ampère è sufficiente calcolare la circuitazione secondo la definizione e verificare che soddisfa l'equazione a.2).

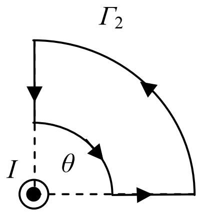
b.1) Corrente concatenata:
La scelta più semplice consiste in percorso di circuitazione Γ_1 concentrico al filo infinito. la circuitazione risulta:



$Circuitazione_{\Gamma 1}\ (\boldsymbol{B}) = 2\ \pi\ r\ B = 2\ \pi\ r\ \mu_0\ I\ /\ (2\ \pi\ r) = \mu_0\ I$

dove I è la corrente che scorre nel filo. L'eq. a.2) è quindi verificata.

b.2) Corrente non concatenata:
La scelta più efficace consiste nel percorso di circuitazione Γ_2 mostrato in figura a lato, composto da segmenti di rette radiali e di circonferenze di centro sul filo. In tale caso alla circuitazione contribuiscono solo i tratti di circonferenza, lungo i quali ***B*** è tangente, mentre non contribuiscono i segmenti radiali, lungo i quali ***B*** è perpendicolare. Risulta:



$Circuitazione_{\Gamma 2}\ (\boldsymbol{B}) = \theta\ r\ (B - B) = 0$

dove θ è l'angolo compreso tra i segmenti radiali. Poiché il contributo alla circuitazione lungo i due archi di circonferenza è uguale in modulo e opposto in segno, la circuitazione risulta nulla. Si è verificato quindi in questo caso particolare che vale la legge di Ampère e che la circuitazione del campo magnetostatico non dipende dalla corrente non concatenata.