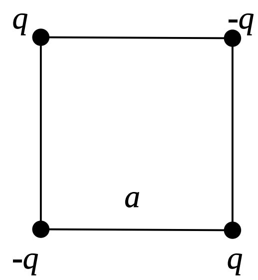
POLITECNICO DI MILANO – IV FACOLTÀ

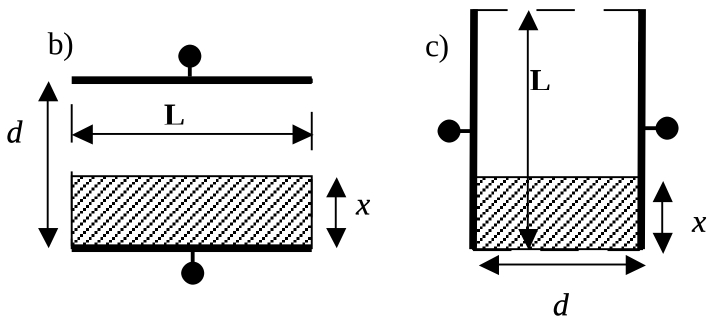
Ingegneria Aerospaziale

II Verifica di Fisica Sperimentale A+B 4 Luglio 2006

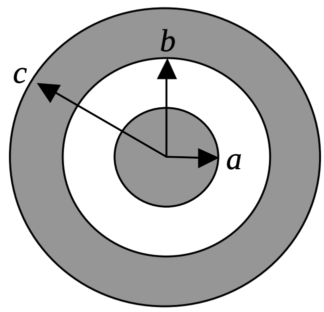
Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. Sostituire i valori numerici solo alla fine, dopo aver ricavato le espressioni letterali. Indicare nome e cognome (in stampatello) e matricola su ogni foglio.



1. Data la configurazione di quattro cariche elettriche in figura, poste ai vertici di un quadrato di lato a, calcolare:
   a) la forza (modulo, direzione e verso) agente su ciascuna carica,
   b) Il campo elettrico al centro del quadrato,
   c) il lavoro necessario per costruire tale configurazione di cariche.
   Dati: $q = 3\ \mu\text{C}$; $a = 4$ cm; $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m



2. Dato un liquido dielettrico,
   a) si esponga un metodo per la misura operativa della costante dielettrica relativa e_r,
   b) si calcoli la capacità di un condensatore a facce piane, quadrate e parallele, di lato L e spessore d, riempito con il liquido per una frazione x/d (figura b). Si trascurino gli effetti di bordo.
   c) si calcoli la capacità del medesimo condensatore, questa volta ruotato di 90° e riempito per una frazione x/L (figura c). Si trascurino gli effetti di bordo.

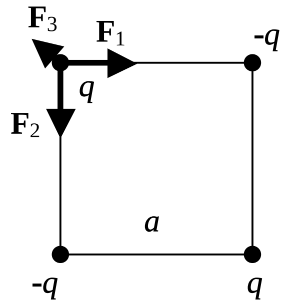


3. Un sistema di due conduttori, di cui è riportata la sezione in figura, è costituito da un conduttore centrale cilindrico circondato da un secondo conduttore a forma di cilindro cavo, coassiale con il primo. I raggi sono a, b e c. Nei due conduttori scorre una corrente I stazionaria distribuita in modo uniforme, in versi opposti. Si determini l'espressione del modulo del campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ in funzione della distanza r dall'asse negli intervalli:
   a) $r < a$;
   b) $a < r < b$;
   c) $b < r < c$;
   d) $r > c$.

4. Un tratto di conduttore è inserito nel traferro di un magnete permanente posto su un piatto della bilancia delle correnti, perpendicolarmente alle linee di forza del campo magnetico. In assenza di corrente la bilancia è equilibrata con una massa $m_0 = 215$ g; in presenza di una corrente nel conduttore la nuova massa di equilibrio è $m_1 = 220$ g. Determinare:
   a) la forza che agisce sul conduttore in modulo, direzione e verso e rappresentarla in uno schema dell'esperimento;
   b) la nuova massa di equilibrio m_2 se il conduttore è ruotato in modo da formare un angolo $\theta = 30°$ con le linee di forza del campo magnetico;
   c) il modulo del campo magnetico $\boldsymbol{B}$ generato dal magnete permanente, sapendo che il tratto di conduttore ha una lunghezza $l = 4$ cm e la corrente ha intensità $I = 4$ A.

   Rispondere alle domande nell'ordine indicato.

Esercizio 1



a) Con riferimento alla figura qui a lato ed applicando la legge di Coulomb si ricavano le seguenti relazioni:

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4pe_0}\frac{q^2}{a^2} = 50.6 \text{ N},$$

$$F_3 = \frac{1}{4pe_0}\frac{q^2}{2a^2} = 25.3 \text{ N}.$$

Quindi la risultante $\mathbf{F}_{tot}$ delle forze agenti sulla carica in alto a sinistra è diretta verso il centro del quadrato ed ha modulo pari a

$$F_{tot} = \frac{1}{4pe_0}\frac{(2\sqrt{2}-1)}{2}\frac{q^2}{a^2} = 46.2 \text{ N}.$$

Per simmetria, è possibile dimostrare che le forze che agiscono su ciascuna carica hanno lo stesso modulo e puntano tutte verso il centro del quadrato.

b) Il campo al centro del quadrato è nullo. Infatti il campo generato da ogni carica è compensato da quello prodotto dalla carica sul vertice opposto.

c) L'energia potenziale elettrostatica E_{elet} di una coppia di cariche puntiformi q_1 e q_2 distanti r vale:

$$E_{elet} = \frac{1}{4pe_0}\frac{q_1 q_2}{r}.$$

Sommando questa espressione su ciascuna coppia di cariche si ottiene l'energia totale E_{tot} del sistema di cariche, uguale al lavoro necessario per portare le cariche nelle posizioni indicate:

$$E_{tot} = \frac{1}{4pe_0}\frac{q^2}{a}(\sqrt{2}-4) = \text{-}5.2 \text{ J}.$$

Si noti che l'energia diminuisce al crescere di a, dal momento che le forze applicate alle cariche, se lasciate libera di agire, tenderebbero ad avvicinare le cariche stesse al centro del quadrato.

Esercizio 2

a) Si può definire la costante dielettrica relativa e_r di un dielettrico misurando la forza che agisce fra due cariche puntiformi q_1 e q_2, poste ad una distanza r una dall'altra e completamente circondate dal dielettrico stesso, che deve occupare tutto lo spazio:

$$F = \frac{1}{4pe_r e_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} .$$

Misurare la costante dielettrica relativa utilizzando la legge di Coulomb in realtà è molto scomodo. Operativamente è più conveniente utilizzare l'espressione della capacità (grandezza facile da misurare) di un condensatore ad armature piane e parallele (area S, distanza d completamente riempito del materiale di cui misurare la costante dielettrica:

$$C = \frac{Se_0 e_r}{d} \quad \Rightarrow \quad e_r = \frac{Cd}{Se_0} = C/C_0.$$

dove C_0 è la capacità del medesimo condensatore in vuoto.

b) Il condensatore di fig. b può essere considerato come l'equivalente serie di due condensatori distinti:

$$C^{-1}_{\text{tot}} = C^{-1}_{\text{senza}} + C^{-1}_{\text{con}} = \frac{x}{e_r e_0 L^2} + \frac{d-x}{e_0 L^2} \quad \Rightarrow \quad C_{\text{tot}} = \frac{e_0 e_r L^2}{e_r (d-x) + x} = C_0 \frac{e_r d}{e_r (d-x) + x} ,$$

dove C_0 rappresenta la capacità del condensatore privo di dielettrico,

$$C_0 = \frac{e_0 L^2}{d} .$$

c) Il condensatore di fig. c può essere considerato come l'equivalente parallelo di due condensatori distinti:

$$C_{\text{tot}} = C_{\text{senza}} + C_{\text{con}} = \frac{e_0 L}{d}(L - x + e_r x) = C_0 \frac{L - x + e_r x}{L} .$$

Esercizio 3

A causa della simmetria del problema, le linee del campo magnetico prodotto dal sistema di conduttori mostrato in figura sono circonferenze centrate sull'asse dei conduttori, perpendicolari all'asse stesso. La legge di Ampère afferma che

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = m_0 \int \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \,,$$

dove **J** è la densità di corrente elettrica. Il modulo *J* di tale vettore vale

$$J_{\mathrm{int}} = \frac{i}{pa^2} \,,$$

$$J_{\mathrm{est}} = \frac{i}{p\,(c^2 - b^2)}$$

rispettivamente per il conduttore interno ed esterno. Integrando la legge di Ampère lungo una linea del campo si ottiene:

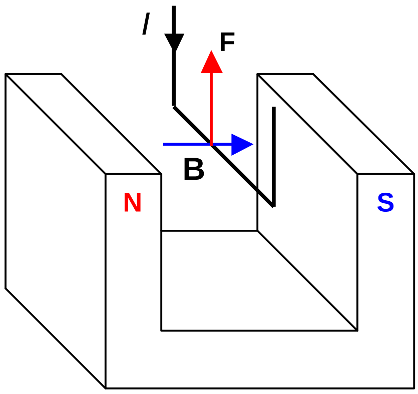
$$B = \frac{m_0 i r}{2pa^2} \qquad (r < a);$$

$$B = \frac{m_0 i}{2pr} \qquad (a < r < b);$$

$$B = \frac{m_0 i}{2pr} - \frac{m_0 i}{2pr}\frac{r^2 - b^2}{(c^2 - b^2)} = \frac{m_0 i}{2p\,(c^2 - b^2)}\frac{c^2 - r^2}{r} \qquad (b < r < c);$$

$$B = 0 \qquad (r > c).$$

Esercizio 4



a) Si veda qui a sinistra uno schema dell'esperimento. La bilancia misura la forza che agisce sul magnete. Dal momento che la massa di equilibrio ***aumenta***, il conduttore percorso da corrente ed il magnete si ***respingono***. Per questo motivo la forza che agisce sul conduttore deve essere diretta verso l'alto. Il suo modulo vale

$$F = g(m_1 - m_0) = 0.049 \text{ N}$$

b) Dall'espressione della forza di Lorentz che agisce su un conduttore,

$$F = I\,L\,B\,\text{sen}q = 0.0245 \text{ N},$$

si ricava che se l'angolo q compreso fra il conduttore e il campo magnetico è pari a 30°, allora la forza si ***dimezza*** rispetto alla forza che agisce sul conduttore quando quest'ultimo è perpendicolare al campo. La nuova massa m_2 di equilibrio della bilancia è quindi data da

$$(m_2 - m_0) = (m_1 - m_0)/2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 217.5 \text{ g}.$$

c) Utilizzando l'espressione della legge di Lorentz nel caso in cui il conduttore è perpendicolare al campo magnetico, si ottiene

$$F = I\,L\,B = 0.049 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{F}{IL} = 0.3 \text{ T}.$$