Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **04 Febbraio 2013 Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 6 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia

$$f(x) = \frac{x^2 - 2\arctan x + 2\ln(1+x)}{\sqrt{x}\sin(x^3)}\,.$$

(a) Determinare i valori dei parametri reali k e α per i quali risulta $f(x) \sim kx^\alpha$ per $x \to 0^+$.

(b) Enunciare il criterio del confronto asintotico sulla integrabilità (in senso generalizzato) in un intervallo $[a, b]$ delle funzioni positive e continue in $(a, b]$.

(c) Utilizzare i risultati precedenti per stabilire se il seguente integrale è convergente: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

SOLUZIONE

a)

Utilizzando la formula di Mac Laurin arrestata al terzo ordine, per $x \to 0$ si ottiene:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad ; \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,,$$

da cui segue

$$x^2 - 2\arctan x + 2\ln(1+x) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{4}{3}x^3\,.$$

Poiché, per $x \to 0^+$, risulta $\sqrt{x}\sin(x^3) \sim \sqrt{x}x^3$, abbiamo che, per $x \to 0^+$, risulta

$$f(x) \sim \frac{\frac{4}{3}x^3}{\sqrt{x}x^3} = \frac{4}{3}x^{-1/2}\,.$$

Segue

$$k = \frac{4}{3} \quad ; \quad \alpha = -\frac{1}{2}\,.$$

b)

Siano f e g due funzioni continue e positive in un intervallo $(a, b]$ e tali che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a^+$. Allora f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se g è integrabile in $[a, b]$.

c)

La funzione f è definita e continua in $(0, 1]$. Poiché

$$f(x) \sim \frac{4}{3} x^{-1/2} \quad \text{per } x \to 0^+ ,$$

è anche sicuramente positiva in un (opportuno) intorno destro di 0 (in realtà, è positiva in tutto l'intervallo $(0, 1]$). Inoltre, poiché $\frac{4}{3} x^{-1/2}$ è il termine generale di una funzione integrabile in un (qualunque) intorno destro di 0 (è del tipo kx^α con $\alpha > -1$), dal criterio del confronto asintotico si deduce che f è integrabile in un (opportuno) intorno destro di 0, e quindi che è integrabile in $[0, 1]$.

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) + \frac{1}{t^2+t}\, y(t) = (t+1)\ln t\,,$$

dove $t \in (0, +\infty)$.

(a) Riconoscere di che tipo di equazione differenziale si tratta e descrivere la forma del suo integrale generale.

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

(c) Individuare la soluzione il cui grafico passa per il punto $(1; 0)$.

SOLUZIONE

a) e b)

Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine, cioè di una equazione differenziale del tipo

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)\,,$$

con

$$a(t) = \frac{1}{t^2+t} \quad \text{e} \quad f(t) = (t+1)\ln t\,.$$

Notiamo che le funzioni a e f sono definite e continue in $(0, +\infty)$ per cui — individuata una funzione $A : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $A'(t) = a(t)$ — le soluzioni dell'equazione in $(0, +\infty)$ sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(t) = e^{-A(t)}(c + F(t))\,,$$

dove $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione fissata tale che $F'(t) = e^{A(t)} f(t)$.

Poiché $t^2 + t = t(t+1)$, si potrà porre $a(t)$ nella forma $\dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t+1}$. Con semplici calcoli si ottiene

$$\frac{1}{t^2+t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,,$$

per cui per $t > 0$ risulta

$$\int \frac{1}{t^2+t}\, dt = \ln t - \ln(t+1) + C = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + C\,.$$

Posto allora $A(t) = \ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right)$, si ottiene

$$\int e^{A(t)} f(t)\, dt = \int \frac{t}{t+1}(t+1)\ln t\, dt = \int t\ln t\, dt\,.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int t\ln t\, dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t}{2}\, dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + C\,.$$

Le soluzioni dell'equazione differenziale sono allora tutte e sole le funzioni del tipo

$$y(t) = \frac{t+1}{t}\left(c + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right)\,.$$

c)

Imponendo la condizione $y(1) = 0$ alla soluzione generale si ottiene $2\left(c - \dfrac{1}{4}\right) = 0$, da cui si ottiene $c = \dfrac{1}{4}$. La soluzione cercata è quindi

$$\bar{y}(t) = \frac{t+1}{t}\left(\frac{1}{4} + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right)\,.$$

3. Data la famiglia delle curve $\Gamma_a \subset \mathbb{R}^3$ $a \in \mathbb{R}$, parametrizzate da

$$\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \Gamma_a \qquad \mathbf{r}(t) := (t^2, t+1, at^3 + t^2 + 2t + 1) \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

i) determinare per quale valore del parametro $\overline{a} \in \mathbb{R}$ la curva corrispondente $\Gamma_{\overline{a}}$ è planare;

ii) determinare il piano P contenente $\Gamma_{\overline{a}}$;

iii) determinare i versori tangente $\mathbf{T}$, normale $\mathbf{N}$ e binormale $\mathbf{B}$ nel punto $\mathbf{p}_0 := (1, 2, 5)$ appartenente alla curva Γ_1, corrispondente al valore $a = 1$;

iv) determinare il centro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ del cerchio osculatore relativo al punto $\mathbf{p}_0 \in \Gamma_1$.

SOLUZIONE

i) e ii)

Consideriamo un generico piano di equazione $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. Il piano contiene Γ_a se e solo se $\alpha t^2 + \beta(t+1) + \gamma(at^3 + t^2 + 2t + 1) + \delta = 0$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$, cioè se e solo se

$$a\gamma t^3 + (\alpha + \gamma)t^2 + (\beta + 2\gamma)t + (\beta + \gamma + \delta) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Una funzione polinomiale è identicamente nulla se e solo se sono nulli tutti i coefficienti. Il coefficiente di t^3 è $a\gamma$. Se $\gamma = 0$, allora annullando gli altri coefficienti si ottiene $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, che non è una soluzione accettabile. Segue

$$\overline{a} = 0\,.$$

Annullando gli altri coefficienti si ricava $\alpha = -\gamma$, $\beta = -2\gamma$, $\delta = \gamma$. Si ottengono quindi infinite soluzioni proporzionali che danno come (unica) soluzione del problema il piano

$$-x - 2y + z + 1 = 0\,.$$

In alternativa, si può cercare il valore del parametro per cui il versore binormale è costante (o quello per cui la torsione è nulla). Il piano cercato è poi il piano osculatore in un punto qualunque della curva.

iii)

La parametrizzazione di Γ_1 risulta

$$\mathbf{r}(t) := (t^2, t+1, t^3 + t^2 + 2t + 1)\,,$$

per cui $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}(1)$. Poiché

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t, 1, 3t^2 + 2t + 2) \qquad \text{e} \qquad \ddot{\mathbf{r}}(t) = (2, 0, 6t + 2)\,,$$

abbiamo

$$\dot{\mathbf{r}}(1) = (2, 1, 7) \qquad \text{e} \qquad \ddot{\mathbf{r}}(1) = (2, 0, 8)\,.$$

Di conseguenza,

$$\mathbf{T}(1) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(1)}{|\dot{\mathbf{r}}(1)|} = \frac{1}{3\sqrt{6}}(2, 1, 7)\,,$$

$$\mathbf{B}(1) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(1) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(1)}{|\dot{\mathbf{r}}(1) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(1)|} = \frac{1}{6\sqrt{2}}(8, -2, -2) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4, -1, -1)\,,$$

$$\mathbf{N}(1) = \mathbf{B}(1) \wedge \mathbf{T}(1) = \frac{1}{36\sqrt{3}}(-12, -60, 12) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-1, -5, 1)\,.$$

iv) Poiché la curvatura in $\mathbf{p}_0$ vale

$$k(1) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(1) \wedge \ddot{\mathbf{r}}(1)|}{|\dot{\mathbf{r}}(1)|^3} = \frac{|(8, -2, -2)|}{|(2, 1, 7)|^3} = \frac{1}{27\sqrt{3}}\,,$$

il raggio del cerchio osculatore è $\rho(1) = \dfrac{1}{k(1)} = 27\sqrt{3}$ ed il suo centro è dato da

$$\mathbf{c} = \mathbf{p}_0 + \rho(1)\mathbf{N}(1) = \mathbf{r}(1) + \rho(1)\mathbf{N}(1) = (1, 2, 5) + 27\sqrt{3}\frac{1}{3\sqrt{3}}(-1, -5, 1) = (-8, -43, 14)\,.$$

4. Dati i tre punti $\mathbf{p}_1 := (1,1,0)$, $\mathbf{p}_2 := (0,1,1)$, $\mathbf{p}_3 := (1,0,1)$ di $\mathbb{R}^3$,

i) mostrare che non sono allineati;

ii) determinare il piano P che li contiene;

iii) determinare la retta L perpendicolare a P passante per $\mathbf{p}_0 := (0,0,0)$;

iv) determinare la distanza di $\mathbf{p}_0$ da P.

SOLUZIONE

i)

Poiché $(\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{p}_3 = 2 \neq 0$, i tre punti non sono allineati ed esiste quindi un solo piano P che li contiene tutti. In alternativa, basta osservare che i vettori $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ non sono paralleli.

ii) Posto $\mathbf{p} = (x,y,z)$, l'equazione vettoriale di P è

$$((\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \wedge (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)) \cdot (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) = 0\,,$$

cioè

$$((x-1, y-1, z) \wedge (-1,0,1)) \cdot (0,-1,1) = 0\,,$$

che dà luogo all'equazione cartesiana

$$x + y + z = 2\,.$$

iii) Poiché un vettore normale a P è $\mathbf{n} = (1,1,1)$, la retta L ha la parametrizzazione

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{n} = (t,t,t)\,.$$

iv) Il punto $\mathbf{q}$ di intersezione della retta L con il piano P corrisponde al valore del parametro t per cui $\mathbf{r}(t) \in P$, cioè al valore di t tale che $3t = 2$. Quindi $t = 2/3$ e $\mathbf{q} = (2/3, 2/3, 2/3)$. Segue

$$\text{distanza}\,(\mathbf{p}_0, P) = |\mathbf{q} - \mathbf{p}_0| = |\mathbf{q}| = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

In alternativa, si può usare la formula della distanza punto-piano.

5. Domanda di teoria.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **04 Febbraio 2013 Compito B**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 6 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6\arctan x + 6\ln(1+x)}{\sqrt{x^3}\sin(2x^2)}.$$

(a) Determinare i valori dei parametri reali k e α per i quali risulta $f(x) \sim kx^\alpha$ per $x \to 0^+$.

(b) Enunciare il criterio del confronto asintotico sulla integrabilità (in senso generalizzato) in un intervallo $[a, b]$ delle funzioni positive e continue in $(a, b]$.

(c) Utilizzare i risultati precedenti per stabilire se il seguente integrale è convergente: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

SOLUZIONE

a)

Utilizzando la formula di Mac Laurin arrestata al terzo ordine, per $x \to 0$ si ottiene:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad ; \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

da cui segue

$$3x^2 - 6\arctan x + 6\ln(1+x) = 4x^3 + o(x^3) \sim 4x^3.$$

Poiché, per $x \to 0^+$, risulta $\sqrt{x^3}\sin(2x^2) \sim \sqrt{x^3}(2x^2) = 2\sqrt{x}x^3$, abbiamo che, per $x \to 0^+$, risulta

$$f(x) \sim \frac{4x^3}{2\sqrt{x}x^3} = 2x^{-1/2}.$$

Segue

$$k = 2 \quad ; \quad \alpha = -\frac{1}{2}.$$

b)

Siano f e g due funzioni continue e positive in un intervallo $(a, b]$ e tali che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a^+$. Allora f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se g è integrabile in $[a, b]$.

c)

La funzione f è definita e continua in $(0, 1]$. Poiché

$$f(x) \sim 2x^{-1/2} \quad \text{per } x \to 0^+ \, ,$$

è anche sicuramente positiva in un (opportuno) intorno destro di 0 (in realtà, è positiva in tutto l'intervallo $(0, 1]$). Poiché $2x^{-1/2}$ è il termine generale di una funzione integrabile in un (qualunque) intorno destro di 0 (è del tipo kx^α con $\alpha > -1$), dal criterio del confronto asintotico si deduce che f è integrabile in un (opportuno) intorno destro di 0, e quindi che è integrabile in $[0, 1]$.

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) + \frac{2}{t^2 + 2t}\, y(t) = (t+2)\ln t\,,$$

dove $t \in (0, +\infty)$.

(a) Riconoscere di che tipo di equazione differenziale si tratta e descrivere la forma del suo integrale generale.

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

(c) Individuare la soluzione il cui grafico passa per il punto $(1;1)$.

SOLUZIONE

a) e b)

Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine, cioè di una equazione differenziale del tipo

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)\,,$$

con

$$a(t) = \frac{2}{t^2+2t} \quad \text{e} \quad f(t) = (t+2)\ln t\,.$$

Notiamo che le funzioni a e f sono definite e continue in $(0, +\infty)$ per cui — individuata una funzione $A : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $A'(t) = a(t)$ — le soluzioni dell'equazione in $(0, +\infty)$ sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(t) = e^{-A(t)}(c + F(t))\,,$$

dove $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione fissata tale che $F'(t) = e^{A(t)} f(t)$.

Poiché $t^2 + 2t = t(t+2)$, si potrà porre $a(t)$ nella forma $\dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t+2}$. Con semplici calcoli si ottiene

$$\frac{2}{t^2+2t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\,,$$

per cui per $t > 0$ risulta

$$\int \frac{2}{t^2+2t}\,dt = \ln t - \ln(t+2) + C = \ln\left(\frac{t}{t+2}\right) + C\,.$$

Posto allora $A(t) = \ln\left(\dfrac{t}{t+2}\right)$, si ottiene

$$\int e^{A(t)} f(t)\,dt = \int \frac{t}{t+2}(t+2)\ln t\,dt = \int t\ln t\,dt\,.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int t\ln t\,dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t}{2}\,dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + C\,.$$

Le soluzioni dell'equazione differenziale sono allora tutte e sole le funzioni del tipo

$$y(t) = \frac{t+2}{t}\left(c + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right)\,.$$

c)

Imponendo la condizione $y(1) = 1$ alla soluzione generale si ottiene $3\left(c - \dfrac{1}{4}\right) = 1$, da cui si ottiene $c = \dfrac{7}{12}$. La soluzione cercata è quindi

$$\bar{y}(t) = \frac{t+2}{t}\left(\frac{7}{12} + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right)\,.$$

3. Data la famiglia delle curve $\Gamma_b \subset \mathbb{R}^3$ $b \in \mathbb{R}$, parametrizzate da

$$\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \Gamma_b \qquad \mathbf{r}(t) := (bt^3 + t^2 + 2t + 1, t^2, t + 1,) \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

i) determinare per quale valore del parametro $\overline{b} \in \mathbb{R}$ la curva corrispondente $\Gamma_{\overline{b}}$ è planare;

ii) determinare il piano P contenente $\Gamma_{\overline{b}}$;

iii) determinare i versori tangente $\mathbf{T}$, normale $\mathbf{N}$ e binormale $\mathbf{B}$ nel punto $\mathbf{p}_0 := (5, 1, 2)$ appartenente alla curva Γ_1, corrispondente al valore $b = 1$;

iv) determinare il centro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ del cerchio osculatore relativo al punto $\mathbf{p}_0 \in \Gamma_1$.

SOLUZIONE

Procedendo come per la versione A, si ottiene:

i) $\overline{b} = 0$

ii) $P : \; x - y - 2z + 1 = 0$

iii) $\mathbf{T} = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}(7, 2, 1) \qquad \mathbf{B} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(-1, 4, -1) \qquad \mathbf{N} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}(1, -1, -5)$

iv) Curvatura : $k = \dfrac{1}{27\sqrt{3}} \qquad$ Centro : $\mathbf{c} = (14, -8, -43)$

4. Dati i tre punti $\mathbf{p}_1 := (2, 2, 0)$, $\mathbf{p}_2 := (0, 2, 2)$, $\mathbf{p}_3 := (2, 0, 2)$ di $\mathbb{R}^3$,

   i) mostrare che non sono allineati;

   ii) determinare il piano P che li contiene;

   iii) determinare la retta L perpendicolare a P passante per $\mathbf{p}_0 := (0, 0, 0)$;

   iv) determinare la distanza di $\mathbf{p}_0$ da P.

SOLUZIONE

Procedendo come per la versione A, si ottiene:

i) i tre punti non sono allineati

ii) $P :\ x + y + z - 4 = 0$

iii) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

iv) distanza $(\mathbf{p}_0, P) = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

5. Domanda di teoria.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **04 Febbraio 2013 Compito C**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 6 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia
$$f(x) = \frac{\dfrac{x^2}{2} - \arctan x + \ln(1+x)}{\sqrt{x}\sin(2x^3)}\,.$$

(a) Determinare i valori dei parametri reali k e α per i quali risulta $f(x) \sim kx^\alpha$ per $x \to 0^+$.

(b) Enunciare il criterio del confronto asintotico sulla integrabilità (in senso generalizzato) in un intervallo $[a, b]$ delle funzioni positive e continue in $(a, b]$.

(c) Utilizzare i risultati precedenti per stabilire se il seguente integrale è convergente: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

SOLUZIONE

a)

Utilizzando la formula di Mac Laurin arrestata al terzo ordine, per $x \to 0$ si ottiene:
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad ; \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,,$$
da cui segue
$$\frac{1}{2}x^2 - \arctan x + \ln(1+x) = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{2}{3}x^3\,.$$
Poiché, per $x \to 0^+$, risulta $\sqrt{x}\sin(2x^3) \sim \sqrt{x}(2x^3)$, abbiamo che, per $x \to 0^+$, risulta
$$f(x) \sim \frac{\frac{2}{3}x^3}{2\sqrt{x}x^3} = \frac{1}{3}x^{-1/2}\,.$$

Segue
$$k = \frac{1}{3} \quad ; \quad \alpha = -\frac{1}{2}\,.$$

b)

Siano f e g due funzioni continue e positive in un intervallo $(a, b]$ e tali che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a^+$. Allora f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se g è integrabile in $[a, b]$.

c)

La funzione f è definita e continua in $(0, 1]$. Poiché

$$f(x) \sim \frac{1}{3} x^{-1/2} \quad \text{per } x \to 0^+ \,,$$

è anche sicuramente positiva in un (opportuno) intorno destro di 0 (in realtà, è positiva in tutto l'intervallo $(0, 1]$). Poiché $\frac{1}{3} x^{-1/2}$ è il termine generale di una funzione integrabile in un (qualunque) intorno destro di 0 (è del tipo kx^α con $\alpha > -1$), dal criterio del confronto asintotico si deduce che f è integrabile in un (opportuno) intorno destro di 0, e quindi che è integrabile in $[0, 1]$.

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) + \frac{3}{t^2+3t}\,y(t) = (t+3)\ln t\,,$$

dove $t \in (0, +\infty)$.

(a) Riconoscere di che tipo di equazione differenziale si tratta e descrivere la forma del suo integrale generale.

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

(c) Individuare la soluzione il cui grafico passa per il punto $(1; 2)$.

SOLUZIONE

a) e b)

Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine, cioè di una equazione differenziale del tipo

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)\,,$$

con

$$a(t) = \frac{3}{t^2+3t} \quad \text{e} \quad f(t) = (t+3)\ln t\,.$$

Notiamo che le funzioni a e f sono definite e continue in $(0, +\infty)$ per cui — individuata una funzione $A : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $A'(t) = a(t)$ — le soluzioni dell'equazione in $(0, +\infty)$ sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(t) = e^{-A(t)}(c + F(t))\,,$$

dove $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione fissata tale che $F'(t) = e^{A(t)}f(t)$.

Poiché $t^2 + t = t(t+3)$, si potrà porre $a(t)$ nella forma $\dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t+1}$. Con semplici calcoli si ottiene

$$\frac{3}{t^2+t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+3}\,,$$

per cui per $t > 0$ risulta

$$\int \frac{3}{t^2+3t}\,dt = \ln t - \ln(t+3) + C = \ln\left(\frac{t}{t+3}\right) + C\,.$$

Posto allora $A(t) = \ln\left(\dfrac{t}{t+3}\right)$, si ottiene

$$\int e^{A(t)}f(t)\,dt = \int \frac{t}{t+3}(t+3)\ln t\,dt = \int t\ln t\,dt\,.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int t\ln t\,dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t}{2}\,dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + C\,.$$

Le soluzioni dell'equazione differenziale sono allora tutte e sole le funzioni del tipo

$$y(t) = \frac{t+3}{t}\left(c + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right)\,.$$

c)

Imponendo la condizione $y(1) = 2$ alla soluzione generale si ottiene $4\left(c - \dfrac{1}{4}\right) = 2$, da cui si ottiene $c = \dfrac{3}{4}$. La soluzione cercata è quindi

$$\bar{y}(t) = \frac{t+3}{t}\left(\frac{3}{4} + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right)\,.$$

3. Data la famiglia delle curve $\Gamma_c \subset \mathbb{R}^3$ $c \in \mathbb{R}$, parametrizzate da

$$\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \Gamma_c \qquad \mathbf{r}(t) := (t+1, t^2, ct^3 + t^2 + 2t + 1) \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

i) determinare per quale valore del parametro $\overline{c} \in \mathbb{R}$ la curva corrispondente $\Gamma_{\overline{c}}$ è planare;

ii) determinare il piano P contenente $\Gamma_{\overline{c}}$;

iii) determinare i versori tangente $\mathbf{T}$, normale $\mathbf{N}$ e binormale $\mathbf{B}$ nel punto $\mathbf{p}_0 := (2, 1, 5)$ appartenente alla curva Γ_1, corrispondente al valore $c = 1$;

iv) determinare il centro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ del cerchio osculatore relativo al punto $\mathbf{p}_0 \in \Gamma_1$.

SOLUZIONE

Procedendo come per la versione A, si ottiene:

i) $\overline{c} = 0$

ii) $P:\ -2x - y + z + 1 = 0$

iii) $\mathbf{T} = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}(1, 2, 7) \qquad \mathbf{B} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(-1, 4, -1) \qquad \mathbf{N} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}(-5, -1, 1)$

iv) Curvatura : $k = \dfrac{1}{27\sqrt{3}} \qquad$ Centro : $\mathbf{c} = (-43, -8, 14)$

4. Dati i tre punti $\mathbf{p}_1 := (3,3,0)$, $\mathbf{p}_2 := (0,3,3)$, $\mathbf{p}_3 := (3,0,3)$ di $\mathbb{R}^3$,

   i) mostrare che non sono allineati;

   ii) determinare il piano P che li contiene;

   iii) determinare la retta L perpendicolare a P passante per $\mathbf{p}_0 := (0,0,0)$;

   iv) determinare la distanza di $\mathbf{p}_0$ da P.

SOLUZIONE

Procedendo come per la versione A, si ottiene:

i) i tre punti non sono allineati

ii) $P: \; x+y+z-6=0$

iii) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

iv) $\operatorname{distanza}(\mathbf{p}_0, P) = 2\sqrt{3}$

5. Domanda di teoria.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **04 Febbraio 2013 Compito D**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 6 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4\arctan x + 4\ln(1+x)}{\sqrt{x^3}\sin(x^2)}\,.$$

(a) Determinare i valori dei parametri reali k e α per i quali risulta $f(x) \sim kx^\alpha$ per $x \to 0^+$.

(b) Enunciare il criterio del confronto asintotico sulla integrabilità (in senso generalizzato) in un intervallo $[a,b]$ delle funzioni positive e continue in $(a,b]$.

(c) Utilizzare i risultati precedenti per stabilire se il seguente integrale è convergente: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

SOLUZIONE

a)

Utilizzando la formula di Mac Laurin arrestata al terzo ordine, per $x \to 0$ si ottiene:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad ; \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,,$$

da cui segue

$$2x^2 - 4\arctan x + 4\ln(1+x) = \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{8}{3}x^3\,.$$

Poiché, per $x \to 0^+$, risulta $\sqrt{x^3}\sin(x^2) \sim \sqrt{x^3}x^2 = \sqrt{x}x^3$, abbiamo che, per $x \to 0^+$, risulta

$$f(x) \sim \frac{\frac{8}{3}x^3}{\sqrt{x}x^3} = \frac{8}{3}x^{-1/2}\,.$$

Segue

$$k = \frac{8}{3} \quad ; \quad \alpha = -\frac{1}{2}\,.$$

b)

Siano f e g due funzioni continue e positive in un intervallo $(a, b]$ e tali che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a^+$. Allora f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se g è integrabile in $[a, b]$.

c)

La funzione f è definita e continua in $(0, 1]$. Poiché

$$f(x) \sim \frac{8}{3}x^{-1/2} \quad \text{per } x \to 0^+ ,$$

è anche sicuramente positiva in un (opportuno) intorno destro di 0 (in realtà, è positiva in tutto l'intervallo $(0, 1]$). Poiché $\frac{8}{3}x^{-1/2}$ è il termine generale di una funzione integrabile in un (qualunque) intorno destro di 0 (è del tipo kx^α con $\alpha > -1$), dal criterio del confronto asintotico si deduce che f è integrabile in un (opportuno) intorno destro di 0, e quindi che è integrabile in $[0, 1]$.

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) + \frac{4}{t^2+4t}\,y(t) = (t+4)\ln t\,,$$

dove $t \in (0, +\infty)$.

(a) Riconoscere di che tipo di equazione differenziale si tratta e descrivere la forma del suo integrale generale.

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.

(c) Individuare la soluzione il cui grafico passa per il punto $(1; 4)$.

SOLUZIONE

a) e b)

Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine, cioè di una equazione differenziale del tipo

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)\,,$$

con

$$a(t) = \frac{4}{t^2+4t} \quad \text{e} \quad f(t) = (t+4)\ln t\,.$$

Notiamo che le funzioni a e f sono definite e continue in $(0, +\infty)$ per cui — individuata una funzione $A : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $A'(t) = a(t)$ — le soluzioni dell'equazione in $(0, +\infty)$ sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(t) = e^{-A(t)}(c + F(t))\,,$$

dove $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione fissata tale che $F'(t) = e^{A(t)}f(t)$.

Poiché $t^2 + 4t = t(t + 4)$, si potrà porre $a(t)$ nella forma $\dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t+4}$. Con semplici calcoli si ottiene

$$\frac{4}{t^2+t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+4}\,,$$

per cui per$t > 0$ risulta

$$\int \frac{4}{t^2+4t}\,dt = \ln t - \ln(t+4) + C = \ln\left(\frac{t}{t+4}\right) + C\,.$$

Posto allora $A(t) = \ln\left(\dfrac{t}{t+4}\right)$, si ottiene

$$\int e^{A(t)}f(t)\,dt = \int \frac{t}{t+4}(t+4)\ln t\,dt = \int t\ln t\,dt\,.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int t\ln t\,dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t}{2}\,dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + C\,.$$

Le soluzioni dell'equazione differenziale sono allora tutte e sole le funzioni del tipo

$$y(t) = \frac{t+4}{t}\left(c + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right)\,.$$

c)

Imponendo la condizione $y(1) = 4$ alla soluzione generale si ottiene $5\left(c - \dfrac{1}{4}\right) = 4$, da cui si ottiene $c = \dfrac{21}{20}$. La soluzione cercata è quindi

$$\bar{y}(t) = \frac{t+4}{t}\left(\frac{21}{20} + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}\right)\,.$$

3. Data la famiglia delle curve $\Gamma_d \subset \mathbb{R}^3$ $d \in \mathbb{R}$, parametrizzate da

$$\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \Gamma_d \qquad \mathbf{r}(t) := (t^2, dt^3 + t^2 + 2t + 1, t + 1) \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

i) determinare per quale valore del parametro $\overline{d} \in \mathbb{R}$ la curva corrispondente $\Gamma_{\overline{d}}$ è planare;

ii) determinare il piano P contenente $\Gamma_{\overline{d}}$;

iii) determinare i versori tangente $\mathbf{T}$, normale $\mathbf{N}$ e binormale $\mathbf{B}$ nel punto $\mathbf{p}_0 := (1, 5, 2)$ appartenente alla curva Γ_1, corrispondente al valore $d = 1$;

iv) determinare il centro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ del cerchio osculatore relativo al punto $\mathbf{p}_0 \in \Gamma_1$.

SOLUZIONE

Procedendo come per la versione A, si ottiene:

i) $\overline{d} = 0$

ii) $P: \ -x + y - 2z + 1 = 0$

iii) $\mathbf{T} = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}(2, 7, 1) \qquad \mathbf{B} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(4, -1, -1) \qquad \mathbf{N} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}(-1, 1, -5)$

iv) Curvatura : $k = \dfrac{1}{27\sqrt{3}} \qquad$ Centro : $\mathbf{c} = (-8, 14, -43)$

4. Dati i tre punti $\mathbf{p}_1 := (4,4,0)$, $\mathbf{p}_2 := (0,4,4)$, $\mathbf{p}_3 := (4,0,4)$ di $\mathbb{R}^3$,

   i) mostrare che non sono allineati;

   ii) determinare il piano P che li contiene;

   iii) determinare la retta L perpendicolare a P passante per $\mathbf{p}_0 := (0,0,0)$;

   iv) determinare la distanza di $\mathbf{p}_0$ da P.

SOLUZIONE

Procedendo come per la versione A, si ottiene:

i) i tre punti non sono allineati

ii) $P: \; x + y + z - 8 = 0$

iii) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

iv) $\operatorname{distanza}(\mathbf{p}_0, P) = \dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

5. Domanda di teoria.