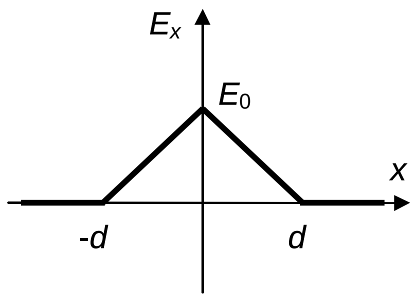
POLITECNICO DI MILANO – IV FACOLTÀ
Ingegneria Aerospaziale
II Prova in itinere di Fisica Sperimentale A+B   3 Luglio 2007

Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. Sostituire i valori numerici solo alla fine, dopo aver ricavato le espressioni letterali. Indicare nome e cognome (in stampatello) e matricola su ogni foglio.

1. Un condensatore ad armature piane e parallele, ciascuna di area S pari a 10 cm^2 e alla distanza d = 0.5 mm unadall'alta, è completamente riempito di materiale dielettrico. Il condensatore viene caricato da un generatore fino a che la differenza di potenziale fra le armature sia ΔV_0 = 100 V. In seguito il l'alimentatore viene scollegato e il condensatore mantenuto isolato. A questo punto il dielettrico viene completamente estratto. La differenza di potenziale misurata fra le armature è ora pari a ΔV_1 = 120 V.
   a) Determinare il valore della costante dielettrica relativa del materiale.
   b) Calcolare il lavoro necessario per estrarre il dielettrico.
   c) Calcolare il lavoro necessario per estrarre il dielettrico nel caso in cui il generatore rimanga collegato e mantenga le armature ad una differenza di potenziale pari a ΔV_0.
   Si trascurino gli effetti di bordo.
   (e_0 = 8,85 $\times$ 10^{-12} F/m)

2. Le componenti cartesiane di un campo elettrico sono E_y = 0, E_z = 0, mentre l'andamento spaziale di E_x è mostrato nella figura a lato.
   a) Determinare il potenziale elettrico $V(x)$ in ogni punto dell'asse x, posto $V(-d)$ = 0. Tracciarne il grafico in funzione di x.
   b) Determinare il valore di E_0 minimo necessario per invertire il moto di un elettrone che, proveniente da $x < -d$, si muova con velocità iniziale v_x.
   c) Determinare la distribuzione di carica che genera il campo e tracciarne il grafico in funzione di x (Utilizzare la legge di Gauss applicata ad una distribuzione di carica infinita nelle direzioni y e z).



3. Fornire e giustificare l'espressione del campo magnetico prodotto da un solenoide di lunghezza infinita in funzione della corrente che attraversa l'avvolgimento e delle caratteristiche geometriche del solenoide.
   Un elettrone si muove con velocità iniziale $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$ nel campo magnetico $\mathbf{B} = (0,0,B)$ prodotto dal solenoide. Scrivere l'equazione del moto della particella e descriverne la traiettoria, rappresentandola in un disegno.
   Indicare come varia l'energia della particella nel suo moto all'interno del solenoide.

4. La tabella a lato riporta i risultati dell'esperimento della bilancia delle correnti. Si indichino in un disegno le grandezze (vettoriali e no) che determinano il fenomeno su cui si basa tale esperimento.
   a) Specificare qual è la relazione che lega la forza esercitata sul magnete all'intensità di corrente che percorre il conduttore, giustificando la risposta.
   b) Riportare i valori della tabella in un grafico e determinare la massa del magnete.
   c) Sapendo che la lunghezza L del conduttore immerso nel campo magnetico prodotto dalla calamita è pari a 4 cm, stimare il valore del campo magnetico.

I (A)	M (g)
2	155.55
4	155.32
6	155.09

Esercizio 1

a) La carica Q sulle armature del condensatore isolato rimane costante. Dette C_0 e C_1 le capacità del condensatore rispettivamente con e senza dielettrico, si ha

$$Q = C_1\Delta V_1 = \frac{Se_0}{d}\Delta V_1\,; \quad Q = C_0\Delta V_0 = \frac{Se_r e_0}{d}\Delta V_0 = e_r\, C_1\Delta V_0 \quad \Rightarrow \quad e_r = \frac{\Delta V_1}{\Delta V_0} = 1.2.$$

b) Nel caso in cui il generatore venga scollegato, il lavoro L di estrazione del dielettrico corrisponde alla variazione ΔE di energia potenziale totale:

$$L = \Delta E = \frac{1}{2}C_1\Delta V_1^2 - \frac{1}{2}C_0\Delta V_0^2 = \frac{Se_0 e_r(e_r - 1)}{2d}\Delta V_0^2 = 21.24 \text{ nJ}.$$

c) Nel caso in cui il generatore rimanga collegato, quest'ultimo effettua lavoro L_G. Per mantenere costante la differenza di potenziale, il generatore deve trasferire una carica ΔQ pari a

$$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = (C_1 - C_0)\,\Delta V_0.$$

Pertanto

$$L_G = \Delta Q\,\Delta V_0 = (C_1 - C_0)\,\Delta V_0^2\,.$$

Il lavoro L di estrazione del dielettrico corrisponde alla variazione ΔE di energia potenziale totale, a cui va però sottratto il lavoro L_G compiuto dal generatore:

$$L = \Delta E - L_G = \frac{1}{2}C_1\Delta V_0^2 - \frac{1}{2}C_0\Delta V_0^2 - (C_1 - C_0)\,\Delta V_0^2 = -\frac{1}{2}(C_1 - C_0)\Delta V_1^2 = \frac{Se_0(e_r - 1)}{2d}\Delta V_0^2\,,$$

dalla quale si ricava

$$L = 17.7 \text{ nJ}.$$

Esercizio 2

a) Il potenziale elettrostatico si ottiene applicando la definizione

$$V(x) = -\int_{-d}^{x} E(x')\mathrm{d}x'.$$

Da questa relazione si ricava la seguente espressione di $V(x)$:

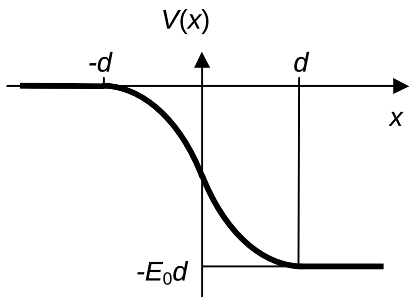
$$V(x) = 0 \qquad x \leq -d;$$

$$V(x) = -\frac{E_0}{2d}(x+d)^2 \qquad -d < x \leq 0;$$

$$V(x) = -\frac{E_0}{2}\left[2d - \frac{(x-d)^2}{d}\right] \qquad 0 < x \leq d;$$

$$V(x) = -E_0 d \qquad x > d.$$

Il grafico di $V(x)$ è riportato a lato. Si noti che la differenza di potenziale $\Delta V = V(d) - V(-d) = -E_0 d$ è pari all'area sottesa dal grafico di $E_x(x)$.



b) La velocità dell'elettrone si inverte se l'energia cinetica iniziale dell'elettrone non è sufficiente a farlo arrivare in $x = d$, ovvero se

$$E_k(x = -d) + E_p(x = -d) < E_p(x = d),$$

ovvero se

$$\frac{1}{2}m_e v_x^2 + eV(-d) = \frac{1}{2}m_e v_x^2 \leq e\Delta V = -eE_0 d,$$

posti $e < 0$ e m_e pari rispettivamente alla carica e alla massa dell'elettrone. Si ottiene quindi

$$E_0 \geq -\frac{m_e v_x^2}{2ed} > 0.$$

c) Ricordando che

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{r}{e_0},$$

si ottiene

$$r(x) = e_0 \frac{\mathrm{d}E(x)}{\mathrm{d}x},$$

e quindi

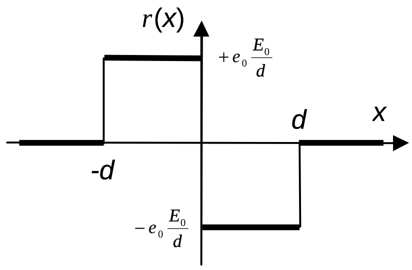
$$r\,(x) = \;0 \qquad\qquad x \le -d;$$

$$r\,(x) = +e_0 \frac{E_0}{d} \qquad\qquad -d < x \le 0;$$

$$r\,(x) = -e_0 \frac{E_0}{d} \qquad\qquad 0 < x \le d;$$

$$r\,(x) = \;0 \qquad\qquad x > d.$$

Allo stesso risultato si poteva giungere applicando direttamente il teorema di Gauss in forma integrale. Il grafico di $r(x)$ è riportato a lato.

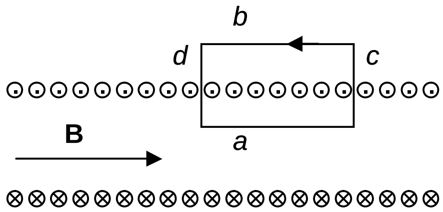


Esercizio 3

a) Il campo magnetico all'interno di un solenoide si può calcolare dalla legge di Ampère

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = m_0 I$$

applicata alla seguente linea di integrazione:



Il campo magnetico interno al solenoide è assiale, mentre quello all'esterno è nullo. Detta I la corrente che circola nell'avvolgimento, e n il numero di spire per unità di lunghezza, il valore del modulo di **B** è dato dalla seguente relazione:

$$B = m_0 n I$$

c) La forza che agisce su una particella carica in un campo magnetico è data dalla legge di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\, \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Da questa espressione si ricava che la forza è sempre perpendicolare alla velocità dell'elettrone, da cui segue che l'accelerazione tangenziale $a_{\text{tang.}}$ è nulla. Ricordando che

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_{\text{tang.}} = 0,$$

si conclude che il modulo v della velocità e quindi l'energia cinetica dell'elettrone rimangono costanti.

b) La traiettoria dell'elettrone è un'elica la cui proiezione sul piano $z = 0$ è una circonferenza. Se tutte le componenti v_x, v_z, e B sono positive, l'elica è destrorsa poiché la carica dell'elettrone è negativa.

L'accelerazione centripeta nella proiezione del moto della particella sul piano $z = 0$ vale

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v_x^2}{R} = \frac{F_{\mathrm{cp}}}{m_{\mathrm{e}}} = \frac{e v_x B}{m_{\mathrm{e}}}.$$

Da questa espressione si ricavano il raggio R della circonferenza e la velocità angolare w della proiezione dell'elettrone sul piano $z = 0$:

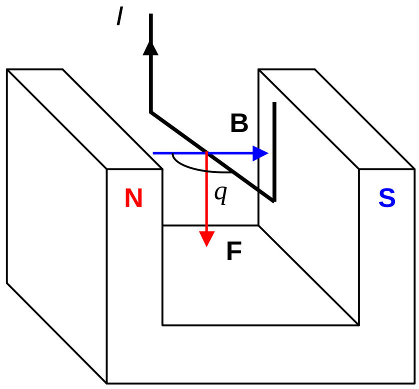
$$R = \frac{m_{\mathrm{e}} v_x}{eB};$$

$$w = \frac{v_x}{R} = \frac{eB}{m_{\mathrm{e}}}.$$

Il passo p dell'elica è dato dal prodotto fra la componente v_z della velocità dell'elettrone lungo la direzione del campo magnetico e il periodo T del moto dell'elettrone proiettato sul piano $z = 0$:

$$p = T v_z = \frac{2p}{w} v_z = 2p \frac{m_{\mathrm{e}} v_z}{eB}.$$

Esercizio 4



Si veda nel grafico qui a fianco il diagramma vettoriale che indica le grandezze che determinano la forza agente sul tratto orizzontale della spira. Nella geometria riprodotta a lato la forza esercitata sul filo è rivolta verso il basso se la corrente, misurata nel verso indicato dalla freccia, è *positiva*. Per il terzo principio della dinamica (legge di azione e reazione), al magnete è applicata una forza di direzione *opposta* rispetto a quella esercitata sulla spira. Nel caso rappresentato in figura la bilancia leggerebbe un *decremento* della forza che agisce sul piatto su cui è posto il magnete, in accordo con i dati riportati nella tabella.

a) L'espressione del modulo F della forza è

$$F = I\,L\,B\,\mathrm{sen}(q\,).$$

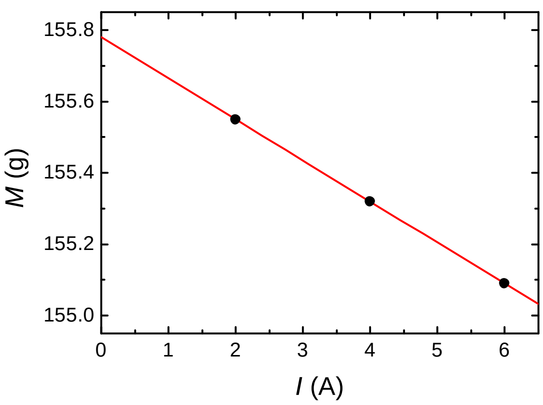
Tale risultato si ottiene integrando la forza di Lorentz

$$\mathbf{F}_{\mathrm{L}} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

sull'insieme dei portatori di carica contenuti in un conduttore di lunghezza L e sezione S. Detta N la densità di portatori di carica $\mathbf{J}$ la densità di corrente,

$$\mathbf{F} = NSLq\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} = SL(qN\,\mathbf{v}) \times \mathbf{B} = LS\,\mathbf{J} \times \mathbf{B} = I\,\mathbf{L} \times \mathbf{B}.$$

b) Il grafico della misura della bilancia in funzione dell'intensità di corrente è riportato a fianco. Dalla tabella si vede che ad un incremento ΔI dell'intensità di corrente pari a 2 A corrisponde una diminuzione ΔM della lettura della bilancia pari a circa 0.23 g. Se ne deduce quindi che la massa del magnete, ovvero la lettura della bilancia estrapolata a $I = 0$, è pari a 155.78 g.



c) Supponendo che l'angolo q fra il campo magnetico e il conduttore sia pari a 90°, il modulo del campo magnetico si ottiene dalla relazione seguente:

$$g\,\Delta M = LB\,\Delta I,$$

con $\Delta M = 0.23$ g, $\Delta I = 2$ A e g = accelerazione di gravità = 9.8 m/s^2. Si ottiene quindi

$$B = \frac{g\Delta M}{L\Delta I} = 28.2 \text{ mT}.$$