Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Seconda prova in itinere** **03 Febbraio 2014 Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 8 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 8 punti.

Istruzioni: ***Tutte le risposte devono essere motivate.*** *Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. i) Determinare l'integrabilità della funzione $f(t) := \frac{(1-e^{-t})^2}{e^{2t}-1}$ su $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$.
   ii) Calcolare l'integrale
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-t})^2}{e^{2t}-1}\, dt\,.$$

SOLUZIONE

i)1. Poiché $f(t) \geq 0$, $f(t) \sim \frac{t}{2}$ per $t \to 0^+$ e $f(t) \sim e^{-2t}$ per $t \to +\infty$, si ha che f è integrabile su $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

ii)

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-t})^2}{e^{2t}-1}\, dt &= (x := e^t, t = \log x, dt = x^{-1}dx) = \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{(1-x^{-1})^2}{x^2-1}\, dx = \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{(x-1)}{x^3(x+1)}\, dx = \\
&= \int_1^{+\infty} \Big(\frac{-2x^2+2x-1}{x^3} + \frac{2}{x+1}\Big)\, dx = \\
&= \int_1^{+\infty} \Big(-\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x+1}\Big)\, dx = \\
&= \Big[-2\log|x| + 2\log|x+1| - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2}\Big]_0^{+\infty} = \\
&= \Big[2\log\frac{x+1}{x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2}\Big]_1^{+\infty} = -(2\log 2 - 2 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \log 4\,.
\end{aligned}$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = e^t - 2e^{t-y},$$

dove $y = y(t)$.

i) Riconoscere di che tipo di equazione differenziale si tratta;
ii) determinare le eventuali soluzioni stazionarie (cioè quelle del tipo $y = k$, con $k \in \mathbb{R}$);
iii) individuare la soluzione $\overline{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che passa per il punto $(0; 1)$;
iv) scrivere il polinomio di Mac Laurin di grado due generato dalla funzione $\overline{y}$, senza calcolare esplicitamente le derivate di $\overline{y}$ nel generico punto t di $\mathbb{R}$.

SOLUZIONE

i) Poiché si può porre nella forma $y' = e^t(1 - 2e^{-y})$, l'equazione è del tipo $y' = a(t)b(y)$, per cui è a variabili separabili.

ii) Le soluzioni stazionarie sono le soluzioni dell'equazione $b(y) = 0$, cioè dell'equazione $1 - 2e^{-y} = 0$, equivalente all'equazione $\frac{e^y - 2}{e^y} = 0$, la cui unica soluzione è $y = \ln 2$.

iii) Le altre soluzioni si ottengono dall'equazione $\int \frac{1}{1 - 2e^{-y}}\, dy = \int e^t\, dt$, cioè dall'equazione

$$\int \frac{e^y}{e^y - 2}\, dy = \int e^t\, dt,$$

da cui si ottiene $\ln |e^y - 2| = e^t + c$ $(c \in \mathbb{R})$, da cui segue $|e^y - 2| = e^{e^t + c} = e^c \cdot e^{e^t}$ $(c \in \mathbb{R})$, ossia $|e^y - 2| = k \cdot e^{e^t}$ $(k \in (0, +\infty))$. Di conseguenza, risulta $e^y - 2 = \pm k \cdot e^{e^t}$ $(k \in (0, +\infty))$, ossia $e^y - 2 = K \cdot e^{e^t}$ $(K \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, da cui si ottiene l'integrale generale $y = \ln\left(2 + K \cdot e^{e^t}\right)$ $(K \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Osservando che per $K = 0$ si ottiene la soluzione stazionaria $y = \ln 2$, si può affermare che le soluzioni dell'equazione differenziale di partenza sono tutte e sole quelle del tipo

$$y = \ln\left(2 + K \cdot e^{e^t}\right),$$

con $K \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per il punto $(0, 1)$ si ottiene $1 = \ln(2 + Ke)$, da cui segue $2 + Ke = e$, ossia $K = 1 - \frac{2}{e}$. Sostituendo tale valore di K nell'integrale generale si ottiene la soluzione

$$\overline{y} = \ln\left(2 + (1 - \frac{2}{e}) \cdot e^{e^t}\right).$$

Osserviamo che $1 - \frac{2}{e}$ è positivo, per cui la soluzione $\overline{y}$ è effettivamente definita in tutto $\mathbb{R}$.

iv) Sappiamo che $\overline{y}(0) = 1$. Inoltre, sappiamo che $\overline{y}\,'(t) = e^t - 2e^{t - \overline{y}(t)}$, per cui risulta

$$\overline{y}\,'(0) = e^0 - 2e^{0 - \overline{y}(0)} = 1 - 2e^{-1}.$$

Sempre dalla ralla relazione $\overline{y}\,'(t) = e^t - 2e^{t - \overline{y}(t)}$ si ottiene inoltre

$$\overline{y}\,''(t) = e^t - 2\left(e^{t - \overline{y}(t)}\right)(1 - \overline{y}\,'(t)),$$

da cui segue

$$\overline{y}\,''(0) = e^0 - 2\left(e^{0 - \overline{y}(0)}\right)(1 - \overline{y}\,'(0)) = 1 - 2e^{-1} \cdot 2e^{-1} = 1 - 4e^{-2}.$$

Il polinomio di Mac Laurin di grado due generato da $\overline{y}$ è quindi

$$1 + (1 - 2e^{-1})t + \frac{1 - 4e^{-2}}{2} t^2.$$

3. Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata da $\gamma(t) := \left(\frac{t^2}{2}, \sqrt{2}\frac{t^3}{3}, \frac{t^4}{4}\right) \qquad t \in [1,2]$.

i) Determinarne la lunghezza $l(\Gamma)$.

ii) Determinare il piano osculatore a Γ nel punto $p_0 = (1, \frac{4}{3}, 1) \in \Gamma$.

iii) Determinare curvatura k e raggio di curvatura ρ nel punto p_0.

iv) Determinare il centro q_0 del cerchio osculatore nel punto p_0.

SOLUZIONE

i) $\dot\gamma(t) = (t, \sqrt{2}t^2, t^3), \qquad \|\dot\gamma(t)\| = t(t^2+1), \qquad t \in [1,2]$.

$$l(\Gamma) = \int_\Gamma 1\, ds = \int_1^2 \|\gamma(t)\|\, dt = \int_1^2 t(t^2+1)\, dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{21}{4}.$$

ii) Il punto $p_0 \in \Gamma$ corrisponde al valore $t_0 = \sqrt{2}$ del parametro: $p_0 = \gamma(\sqrt{2})$. Come vettore ortogonale al piano osculatore si può considerare

$$\bar n := \dot\gamma(\sqrt{2}) \wedge \ddot\gamma(\sqrt{2})\,.$$

Poiché

$$\dot\gamma(t) = (t, \sqrt{2}t^2, t^3), \qquad t \in [1,2]$$
$$\ddot\gamma(t) = (1, 2\sqrt{2}t, 3t^2), \qquad t \in [1,2]$$
$$\dot\gamma(t) \wedge \ddot\gamma(t) = t^2(\sqrt{2}t^2, -2t, \sqrt{2}), \qquad t \in [1,2]$$

si ha $\bar n = 2\sqrt{2}(2,-2,1)$. Il piano osculatore risulta quindi essere

$$P(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \bar n \cdot (p - p_0) = 0\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2,-2,1)\cdot(x-1, y-\frac{4}{3}, z-1) = 0\}$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 2y + z = \frac{1}{3}\}\,.$$

iii) Curvatura e raggio del cerchio osculatore nel punto p_0 sono dati da

$$k = \frac{\|\dot\gamma(\sqrt{2}) \wedge \ddot\gamma(\sqrt{2})\|}{\|\dot\gamma(\sqrt{2})\|^3} = \frac{\|2\sqrt{2}(2,-2,1)\|}{\|3\sqrt{2}\|^3} = \frac{1}{9} \qquad \rho = \frac{1}{k} = 9\,.$$

iv) Il centro del cerchio osculatore è dato da $q_0 = p_0 + \rho\, \bar N(\sqrt{2})$ dove $\bar N(\sqrt{2})$ e' il versore normale a Γ in $p_0 = \gamma(\sqrt{2})$. Poiché il versore binormale e' dato da

$$\bar B(\sqrt{2}) = \frac{\bar n}{\|\bar n\|} = \frac{\dot\gamma(\sqrt{2}) \wedge \ddot\gamma(\sqrt{2})}{\|\dot\gamma(\sqrt{2}) \wedge \ddot\gamma(\sqrt{2})\|} = \frac{2\sqrt{2}(2,-2,1)}{\|2\sqrt{2}(2,-2,1)\|} = \frac{2\sqrt{2}(2,-2,1)}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3}(2,-2,1)\,,$$

il versore tangente è dato da

$$\bar T(\sqrt{2}) = \frac{\dot\gamma(\sqrt{2})}{\|\dot\gamma(\sqrt{2})\|} = \frac{\sqrt{2}(1,2,2)}{\|\sqrt{2}(1,2,2)\|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$$

ed il versore normale risulta essere

$$\bar N(\sqrt{2}) = \bar B(\sqrt{2}) \wedge \bar T(\sqrt{2}) = \frac{1}{3}(-2,-1,2)$$

e quindi $q_0 = \left(1, \frac{4}{3}, 1\right) + 9\frac{1}{3}(-2,-1,2) = \left(1, \frac{4}{3}, 1\right) + 3(-2,-1,2) = \left(-5, -\frac{5}{3}, 7\right)$.

4. Nello spazio riferito a un sistema cartesiano $Oxyz$, sia $P \equiv (-1, 2, 3)$ e sia r la retta che si ottiene intersecando i due piani rappresentati dalle equazioni $-x + 2y + 3z + 1 = 0$ e $x + y + z = 0$.

   i) Scrivere un'equazione cartesiana del piano ortogonale a r che passa per P;

   ii) determinare le coordinate del punto P', simmetrico di P rispetto a r.

SOLUZIONE

i) Un vettore direzionale della retta si può ottenere calcolando il prodotto vettoriale dei vettori $(-1, 2, 3)$ e $(1, 1, 1)$ (ortogonali ai due piani) oppure scrivendo la retta in forma parametrica. Seguiamo questa seconda strada. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z + 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

rispetto a x e a y (è possibile fare altre scelte) si ottiene

$$\begin{cases} x = \dfrac{z+1}{3} \\ y = \dfrac{-4z-1}{3} \end{cases}.$$

Una rappresentazione parametrica della retta r è quindi la seguente:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}t \\ y = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}t \\ z = t \end{cases}.$$

I vettori direzionali della retta r sono quindi tutti e soli i vettori non nulli paralleli al vettore $(1/3, -4/3, 1)$. Scegliamo ad esempio come vettore direzionale di r il vettore $\mathbf{v} = (1, -4, 3)$. Il piano cercato passa per il punto $P \equiv (-1, 2, 3)$ ed è ortogonale al vettore $\mathbf{v}$, per cui ha equazione $x + 1 - 4(y - 2) + 3(z - 3) = 0$, ossia $x - 4y + 3z = 0$.

ii) Il punto cercato è il simmetrico del punto P rispetto al punto di intersezione fra la retta r e il piano trovato al punti ii). Intersecando la retta r con tale piano si ottiene l'equazione

$$\frac{1+t}{3} - 4\frac{-1-4t}{3} + 3t = 0\,,$$

da cui si ottiene il valore $t = -\dfrac{5}{25}$, che corrisponde al punto $Q \equiv \left(\dfrac{7}{26}, -\dfrac{1}{13}, -\dfrac{5}{26}\right)$ della retta r. Poiché il punto Q è il punto medio fra i punti P e P', posto $P' \equiv (x, y, z)$, risulta

$$\left(\frac{7}{26}, -\frac{1}{13}, -\frac{5}{26}\right) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right),$$

da cui si ottiene

$$P' \equiv \left(\frac{20}{13}, -\frac{28}{13}, -\frac{44}{13}\right).$$