Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 - Seconda Prova - 2 Febbraio 2016

Terza parte (Compito A)

Sia data, per ogni valore del parametro reale α, la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{(\sin x)^{1-\alpha}}, \quad x \in (0, 1].$$

a. Stabilire per quali α converge l'integrale $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)dx$;

b. calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = 1$.

Soluzioni

a. Notiamo preliminarmente che la funzione f_α é continua su tutto l'intervallo di integrazione, e di conseguenza tale integrale é un integrale generalizzato di prima specie. Inoltre, f_α é positiva su $(0, 1]$. E' pertanto possibile applicare il criterio del confronto asintotico. Poiché, per $x \to 0^+$, vale la relazione

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^{1/2}}{x^{1-\alpha}} = x^{-1/2+\alpha},$$

si ha quindi che

$$\int_0^1 f_\alpha(x)dx \quad \begin{cases} \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad -1/2 + \alpha > -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > -1/2 \\ \text{diverge} \quad \Longleftrightarrow \quad -1/2 + \alpha \leq -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \leq -1/2. \end{cases}$$

b. Sia $\alpha = 1$. Poiché

$$\int \left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) dx = 2e^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - 1\right) - x + cost$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_1(x)dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2e^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - 1\right) - x\right]_\varepsilon^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-1 - 2e^{\sqrt{\varepsilon}} \left(\sqrt{\varepsilon} - 1\right) + \varepsilon\right] = \\ &= 1.\end{aligned}$$

Calcolare il limite seguente:

$$lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

con:

$$f(x) = e^x + ln\,(1+x) - 1 - 2x$$

$$g(x) = 1 + \frac{3}{2}\left[sin(2x) + 2x^2\right] - (1+x)^3$$

Disegnare un andamento qualitativo di $y = f(x)$ e $y = g(x)$ nell'intorno di $x = 0$.

Soluzioni

Il numeratore e' asintotico a:

$$f(x) \sim \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right] + \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] - 1 - 2x$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2}x^3$$

Il denominatore e' asintotico a:

$$g(x) \sim 1 + \frac{3}{2}\left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + 2x^2\right] - \left[1 + 3x + 3x^2 + x^3\right]$$

$$g(x) \sim -3x^3$$

Quindi:

$$lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{-3x^3} = -\frac{1}{6}$$

Per i grafici si disegnano gli andamenti di $\frac{1}{2}x^3$ per $f(x)$ e di $-3x^3$ per $g(x)$ nell'intorno dell'origine.

Sia γ la curva rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 + 1 \\ z = -2t^3 + t^2 + 2t + 2\,. \end{cases}$$

i) Verificare che γ è una curva piana, determinando una equazione del piano π che la contiene.

ii) Dopo aver verificato che il punto $P_0 \equiv (0, 2, 3)$ è un punto doppio di γ, determinare il coseno di uno dei due angoli (supplementari) formati dalle due tangenti a γ in P_0.

iii) Scrivere l'equazione della sfera di centro $C \equiv (0, 1, 1)$ tangente al piano π.

Soluzioni

i) Consideriamo l'equazione di un generico piano $ax + by + cz + d = 0$. Il piano contiene la curva γ se e solo se risulta $a(t^3 - t) + b(t^2 + 1) + c(-2t^3 + t^2 + 2t + 2) + d = 0$ per ogni valore del parametro t. Ciò equivale a dire che il polinomio $(a - 2c)t^3 + (b + c)t^2 + (2c - a)t + b + 2c + d$ è il polinomio nullo. Risolvendo il sistema

$$a - 2c = 0b + c = 02c - a = 0b + 2c + d = 0\,,$$

si ottengono — oltre alla soluzione banale $a = b = c = d = 0$ — le infinite soluzioni proporzionali

$$a = -2kb = kc = -kd = k$$

con $k \neq 0$, che corrispondono a un unico piano che contiene la curva. Posto ad esempio $k = -1$, si vede che il piano π può essere rappresentato dall'equazione $2x - y + z - 1 = 0$.

ii) Il punto P_0 ha la seconda coordinata uguale a 2. La seconda coordinata del generico punto di γ è uguale a 2 se e solo se $t = \pm 1$. Sostituendo tali valori nelle altre due coordinate, si vede che il punto P_0 corrisponde sia al valore $t = 1$ che al valore $t = -1$, per cui è un punto doppio. Posto $\mathbf{r}(t) = (t^3 - t, t^2 + 1, -2t^3 + t^2 + 2t + 2)$, risulta $\mathbf{r}'(t) = (3t^2 - 1, 2t, -6t^2 + 2t + 2)$ e quindi $\mathbf{r}'(1) = (2, 2, -2)$, $\mathbf{r}'(-1) = (2, -2, -6)$. Un angolo formato dalle due tangenti a γ in P_0 è uguale all'angolo θ fra i vettori $\mathbf{r}'(1)$ e $\mathbf{r}'(-1)$, per cui risulta

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}'(1) \cdot \mathbf{r}'(-1)}{|\mathbf{r}'(1)||\mathbf{r}'(-1)|} = \frac{3}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{11}\,.$$

Il coseno dell'altro angolo è ovviamente uguale a $-\sqrt{33}/11$.

iii) Il raggio R della sfera in questione è uguale alla distanza del punto C dal piano π, per cui risulta

$$R = \frac{|-1 + 1 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

L'equazione della sfera cercata è quindi

$$x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \frac{1}{6}\,.$$

Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 - Seconda Prova - 2 Febbraio 2016

Terza parte (Compito B)

Sia data, per ogni valore del parametro reale α, la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{(\arctan x)^\alpha}, \quad x \in (0,1].$$

a. Stabilire per quali α converge l'integrale $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)dx$;

b. calcolare il valore dell'integrale per $\alpha = 0$.

Soluzioni

a. Notiamo preliminarmente che la funzione f_α é continua su tutto l'intervallo di integrazione, e di conseguenza tale integrale é un integrale generalizzato di prima specie. Inoltre, f_α é positiva su $(0,1]$. E' pertanto possibile applicare il criterio del confronto asintotico. Poiché, per $x \to 0^+$, vale la relazione

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^{1/2}}{x^\alpha} = x^{1/2-\alpha},$$

si ha quindi che

$$\int_0^1 f_\alpha(x)dx \quad \begin{cases} \text{converge} \quad \iff \quad 1/2 - \alpha > -1 \quad \iff \quad \alpha < 3/2 \\ \text{diverge} \quad \iff \quad 1/2 - \alpha \leq -1 \quad \iff \quad \alpha \geq 3/2. \end{cases}$$

b. Sia $\alpha = 0$. Poiché

$$\int \left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) dx = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) - x + cost$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_0(x)dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) - x\right]_\varepsilon^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-1 - 2e^{\sqrt{\varepsilon}}\left(\sqrt{\varepsilon} - 1\right) + \varepsilon\right] = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Calcolare il limite seguente:

$$lim_{x\to 0}\frac{a(x)}{b(x)}$$

con:

$$a(x) = 1 + 2\left[sin(2x) + x^2\right] - (1+x)^4$$

$$b(x) = e^x + ln\,(1-x) - 1 + x^3$$

Disegnare un andamento qualitativo di $y = a(x)$ e $y = b(x)$ nell'intorno di $x = 0$.

Soluzioni

Il numeratore e' asintotico a:

$$a(x) \sim 1 + 2\left[2x + x^2\right] - \left[1 + 4x + 6x^2\right]$$

$$a(x) \sim -4x^2$$

Il denominatore e' asintotico a:

$$b(x) \sim \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right] + \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] - 1 + x^3$$

$$b(x) \sim \frac{3}{2}x^3$$

Quindi:

$$lim_{x\to 0}\frac{a(x)}{b(x)} = lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{\frac{3}{2}x^3} = \infty$$

Per i grafici si disegnano gli andamenti di $-4x^2$ per $f(x)$ e di $\frac{3}{2}x^3$ per $g(x)$ nell'intorno dell'origine.

Sia γ la curva rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$\begin{cases} x = 2t^3 - t^2 - 2t - 2 \\ y = t^3 - t \\ z = t^2 + 1 \end{cases} .$$

i) Verificare che γ è una curva piana, determinando una equazione del piano π che la contiene.

ii) Dopo aver verificato che il punto $P_0 \equiv (-3, 0, 2)$ è un punto doppio di γ, determinare il coseno di uno dei due angoli (supplementari) formati dalle due tangenti a γ in P_0.

iii) Scrivere l'equazione della sfera di centro $C \equiv (-1, 0, 1)$ tangente al piano π.

Soluzione.

i) Consideriamo l'equazione di un generico piano $ax + by + cz + d = 0$. Il piano contiene la curva γ se e solo se risulta $a(2t^3 - t^2 - 2t - 2) + b(t^3 - t) + c(t^2 + 1) + d = 0$ per ogni valore del parametro t. Ciò equivale a dire che il polinomio $(2a + b)t^3 + (c - a)t^2 - (2a + b)t - 2a + c + d$ è il polinomio nullo. Risolvendo il sistema

$$2a + b = 0c - a = 02a + b = 0 - 2a + c + d = 0\,,$$

si ottengono — oltre alla soluzione banale $a = b = c = d = 0$ — le infinite soluzioni proporzionali

$$a = kb = -2kc = kd = k$$

con $k \neq 0$, che corrispondono a un unico piano che contiene la curva. Posto ad esempio $k = 1$, si vede che il piano π può essere rappresentato dall'equazione $x - 2y + z + 1 = 0$.

ii) Il punto P_0 ha la terza coordinata uguale a 2. La terza coordinata del generico punto di γ è uguale a 2 se e solo se $t = \pm 1$. Sostituendo tali valori nelle altre due coordinate, si vede che il punto P_0 corrisponde sia al valore $t = 1$ che al valore $t = -1$, per cui è un punto doppio. Posto $\mathbf{r}(t) = (2t^3 - t^2 - 2t - 2, t^3 - t, t^2 + 1)$, risulta $\mathbf{r}'(t) = (6t^2 - 2t - 2, 3t^2 - 1, 2t)$ e quindi $\mathbf{r}'(1) = (2, 2, 2)$, $\mathbf{r}'(-1) = (6, 2, -2)$. Un angolo formato dalle due tangenti a γ in P_0 è uguale all'angolo θ fra i vettori $\mathbf{r}'(1)$ e $\mathbf{r}'(-1)$, per cui risulta

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}'(1) \cdot \mathbf{r}'(-1)}{|\mathbf{r}'(1)||\mathbf{r}'(-1)|} = \frac{3}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{11}\,.$$

Il coseno dell'altro angolo è ovviamente uguale a $-\sqrt{33}/11$.

iii) Il raggio R della sfera in questione è uguale alla distanza del punto C dal piano π, per cui risulta

$$R = \frac{|-1 + 1 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

L'equazione della sfera cercata è quindi

$$(x + 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \frac{1}{6}\,.$$