Politecnico di Milano
Fondamenti di Fisica Sperimentale
a.a. 2008-2009 - Facoltà di Ingegneria Industriale - Ind. Energetica-Meccanica-Aerospaziale

II prova in itinere - 01/07/2009

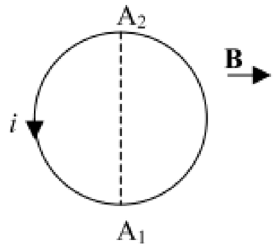
Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. Sostituire i valori numerici solo alla fine, dopo aver ricavato le espressioni letterali. Scrivere in stampatello nome, cognome, matricola e firmare ogni foglio.

Esercizio 1

Tre cariche puntiformi sono disposte nel piano xy secondo il seguente schema: $+Q$ nel punto $A(-a, 0)$, $-Q$ in $B(a, 0)$ e $-2Q$ in $C(0, -2a)$. Determinare:

a. Il campo elettrico lungo l'asse y, ad esclusione del punto C;
b. Il punto dell'asse y nel quale il potenziale elettrostatico V è pari a zero, assumendo $V \to 0$ per $y \to \infty$;
c. L'energia elettrostatica del sistema di cariche.
d. (*facoltativo*) L'espressione del campo elettrico per $y >> a$. Si commenti il risultato ottenuto.

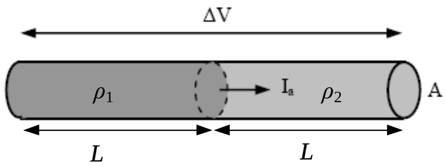
Esercizio 2



Una spira circolare di raggio $r = 10$ cm, percorsa in senso antiorario da una corrente continua di intensità $I = 1.5$ A, si trova in un campo magnetico uniforme di modulo $B = 0.1$ T; la direzione di $\boldsymbol{B}$ è parallela al piano della spira. Sia A_1A_2 il diametro della spira perpendicolare a $\boldsymbol{B}$. Si calcolino:

a. Il momento magnetico $\boldsymbol{m}$ della spira (modulo, direzione e verso);
b. Modulo direzione e verso della risultante delle forze magnetiche agenti sulla metà di sinistra della spira avente i punti A_1 e A_2 come estremi;
c. La risultante $\boldsymbol{R}$ e il momento torcente $\boldsymbol{M}$ delle forze agenti sull'intera spira.

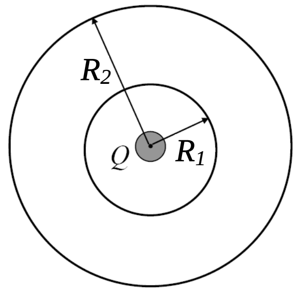
Esercizio 3



Due conduttori, aventi la medesima lunghezza $L = 5$ m ed una sezione $A = 1$ cm^2 sono collegati in serie. Essi hanno resistività, rispettivamente, pari a $r_1 = 10^{-3}$ Ωm e $r_2 = 5\times10^{-4}$ Ωm. Applicando una d.d.p. $\Delta V = 120$ V agli estremi dei due conduttori, calcolare:

a. la d.d.p. applicata ai capi di ogni conduttore;
b. la densità di corrente che scorre nei due conduttori;
c. il campo elettrico per ogni conduttore;
d. la carica presente all'interfaccia tra i due conduttori ($e_0 = 8.854\times10^{-12}$ C^2/N·m^2).

Esercizio 4



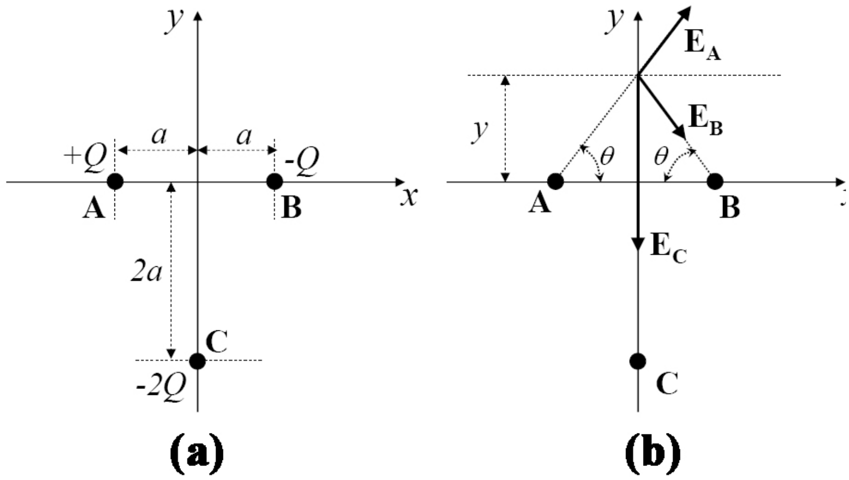
Sia dato un condensatore sferico costituito da due armature aventi spessore trascurabile e, rispettivamente, raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2 = 2R_1$, inizialmente scarico e isolato. Una carica positiva Q viene inserita all'interno dell'armatura interna e posta al centro delle due sfere (vedi figura a lato).

a. Si calcoli l'andamento del campo elettrico $\boldsymbol{E}$, generato (in modulo, direzione e verso) nel caso di condensatore isolato, per 1) $r \leq R_1$, 2) $R_1 \leq r \leq R_2$ e 3) $r \geq R_2$.
b. Si calcoli la d.d.p. tra le armature nel caso di condensatore isolato.
c. Dire come si modificano il campo elettrico e la d.d.p. tra le armature del condensatore nel caso in cui l'armatura esterna venga messa a massa.

SOLUZIONI

Esercizio 1

a. Le tre cariche sono disposte come nella figura a lato. Consideriamo un generico punto sull'asse-y, di coordinate (0,*y*). I campi elettrici generati in tale punto dalle singole cariche A, B e C sono diretti come nella figura (b) per il caso y > -2*a*. Nel caso in cui y<-2*a*, il campo elettrico generato dalla carica -2*Q* cambierà verso.



I moduli dei campi generati dalle tre cariche sono pari a:

$$E_A = E_B = \frac{Q}{4pe_0\left(a^2 + y^2\right)}$$

$$E_C = \frac{2Q}{4pe_0\left(y + 2a\right)^2}$$

Il campo elettrico totale nel punto y, $\mathbf{E_{Tot}}$, è dato dalla somma *vettoriale* dei singoli campi elettrici: la componente di $\mathbf{E_{Tot}}$ lungo l'asse-y è esattamente pari al campo $\mathbf{E_C}$, mentre la somma vettoriale di $\mathbf{E_A}$ e $\mathbf{E_B}$ fornisce la componente di $\mathbf{E_{Tot}}$ lungo l'asse-*x*. Pertanto:

$$\mathbf{E_A} + \mathbf{E_B} = \left[2\frac{Q}{4pe_0\left(a^2 + y^2\right)}\cos J\right]\mathbf{u_x}$$

dove $\cos J = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$. In forma compatta il campo $\mathbf{E_{Tot}}$ si può scrivere come segue:

$$\mathbf{E_{Tot}} = \begin{cases} \left(\frac{Q}{2pe_0}\right)\cdot\left(\frac{a}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}}\mathbf{u_x} - \frac{1}{\left(y + 2a\right)^2}\mathbf{u_y}\right) & y > -2a \\ \left(\frac{Q}{2pe_0}\right)\cdot\left(\frac{a}{\left(a^2 + y^2\right)^{3/2}}\mathbf{u_x} + \frac{1}{\left(y + 2a\right)^2}\mathbf{u_y}\right) & y < -2a \end{cases}$$

b. Il potenziale del campo elettrico totale lungo l'asse-y è dato dalla relazione:

$$V(y) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{y}\mathbf{E_{Tot}}\cdot\mathbf{dy'} = -\int_{\infty}^{y}E_{Tot}^{y}dy' = -\int_{\infty}^{y}\frac{Q}{2pe_0\left(y' + 2a\right)^2}dy' = \frac{Q}{2pe_0\left(y + 2a\right)},$$

e considerando che $V(y \to \infty) \to 0$, si ottiene:

$$V(y) = \frac{Q}{2pe_0\left(y + 2a\right)}.$$

Pertanto, il potenziale lungo l'asse-y non ha zeri per alcun valore di *y* finito.

c. L'energia elettrostatica del sistema di cariche è data dal lavoro totale necessario per portare ciascuna carica da distanza infinita nella sua posizione finale. Pertanto:

$$U = \frac{(+Q)(-Q)}{4pe_0(2a)} + \frac{(+Q)(-2Q)}{4pe_0\left(\sqrt{5}a\right)} + \frac{(-Q)(-2Q)}{4pe_0\left(\sqrt{5}a\right)} = -\frac{Q^2}{8pe_0 a}$$

d. (*facoltativo*) Nel caso in cui $y >> a$, a grande distanza dal centro l’insieme delle 3 cariche appare come una singola carica posta sull’asse-y, avente carica netta pari a -2Q. Pertanto il campo elettrico totale lungo l’asse-y si riduce alla sua sola componente lungo-y, ovvero:

$$E_{Tot} \approx E_{Tot}^{y} \qquad per\;\; y >> a\ .$$

Esercizio 2

a. Il momento magnetico, **m**, di una spira è un vettore avente:
   i) direzione normale al piano in cui giace la spira;
   ii) verso dato dalla regola della mano destra (in cui, se le dita vanno nel verso della corrente, il pollice fornisce il verso di m);
   iii) modulo pari a m = I·S = $I\cdot\pi r^2 = 4.71\cdot10^{-2}$ A·m^2.

   In forma compatta il momento magnetico della spira è:

$$\mathbf{m} = (I\cdot\pi r^2)\mathbf{n},$$

   dove **n** è il versore normale al piano della spira, il cui verso è determinato con la regola della mano destra considerando il verso di percorrenza della spira dato dal verso della corrente.

b. Consideriamo un generico punto sulla parte sinistra della spira; in tale punto la forza infinitesima **dF** è pari a:

$$\mathbf{dF} = I\mathbf{dl}\times\mathbf{B} = \left(I\cdot dl\cdot B\sin J\right)\mathbf{n},$$

   dove **dl** è l'elemento infinitesimo di circuito orientato nel verso della corrente, **B** è il campo magnetico, e J è l'angolo compreso fra **dl** e **B**. La forza *totale* agente sulla metà di sinistra della spira è pari a:

$$\mathbf{F}_{SX} = I\int_{A_1\to A_2} d\mathbf{l}\times\mathbf{B} = I\left(\int_{A_1\to A_2} d\mathbf{l}\right)\times\mathbf{B} = I\cdot 2r\mathbf{n}_{A_1A_2}\times\mathbf{B} = (0.03\ \mathrm{N})\ \mathbf{n},$$

   dove, poiché il campo magnetico **B** è uniforme, la forza dipende solo dagli estremi A_1 e A_2 del tratto di filo.

c. *La forza risultante agente sull'intera spira è nulla* (**R** = **0**). Infatti, per ogni punto sulla parte sinistra della spira in cui agisce la forza infinitesima **dF**, esisterà un altro punto simmetrico sulla parte destra sul quale agisce una forza **-dF**, e dunque la somma della forza infinitesima fatta su tutta la spira sarà nulla.

   Il momento meccanico, **M**, cui è soggetta la spira è dato dalla seguente relazione:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}\times\mathbf{B} = (I\pi r^2 B)\mathbf{k} = (4.7\cdot10^{-3}\ \mathrm{Nm})\mathbf{k}$$

   dove **k** forma una terna destrorsa con **n** e **B**. Tale momento meccanico **M** è responsabile della rotazione della spira in modo tale da allineare il momento magnetico **m** con il campo magnetico **B**.

Esercizio 3

a. $R_1 = r_1 \dfrac{L}{A} = 50\ \Omega$; $R_2 = r_2 \dfrac{L}{A} = 25\ \Omega$. (II legge di Ohm)

$\Delta V_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \Delta V = 80\ V$; $\Delta V_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \Delta V = 40\ V$. (partitore di tensione)

b. $I = \dfrac{\Delta V}{R_1 + R_2} = 1.6\ A$; (I legge di Ohm)

$J = \dfrac{I}{A} = 1.6 \cdot 10^4\ \dfrac{A}{m^2}$. (definizione di densità di corrente)

c. $E_1 = r_1 J = 16\ \dfrac{V}{m}$; (legge di Ohm in forma locale)

$E_2 = r_2 J = 8\ \dfrac{V}{m}$.

d. $Q = sA = (E_1 - E_2) e_0 A = 7.08 \cdot 10^{-15}\ C = 7.08\ fC$ (Teorema di Gauss in corrispondenza dell'interfaccia tra i due conduttori).

Esercizio 4

a. Per le tre regioni $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, e $r > R_2$, il campo elettrico è (utilizzando il teorema di Gauss):

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{u_r}}{r^2}$$

dove $\mathbf{u_r}$ è il versore normale uscente dalla superficie dei gusci sferici che costituiscono il condensatore.

b. La differenza di potenziale tra le armature del condensatore può essere ricavata attraverso la sua definizione, ovvero:

$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R_1}.$$

c. Nel caso in cui l'armatura esterna venga messa a massa, il campo elettrico, **E**, diventerà nullo per $r > R_2$ (all'esterno del condensatore), ma non si modificherà per $R_1 < r < R_2$ e $r > R_2$. La differenza di potenziale tra le armature del condensatore non si modifica dal momento che il campo tra le armature non si modifica.