STATICA DEI FLUIDI

Introduzione

Nel corso tratteremo i fluidi sempre come mezzi continui supponendo quindi che non esistano dei vuoti fisici tra le molecole del fluido stesso. Tratteremo inoltre i fluidi anche come mezzi continui matematici a cui dunque è possibile associare funzioni matematiche continue. In realtà i fluidi non sono entità continue in quanto esiste dello spazio tre le molecole, ma dal momento che si è in ambito ingegneristico non saremo mai interessati all'aspetto microscopico. Dal momento che supponiamo di considerare i fluidi come mezzi continui possiamo utilizzare le equazioni meccaniche del continuo e le equazioni di bilancio. La prima equazione di bilancio è la conservazione della massa secondo cui la massa non si crea né si distrugge ma si trasforma soltanto. Questa legge non risulta utile durante lo studio della statica dei fluidi al contrario invece della seconda equazione di bilancio, nota come conservazione della quantità di moto o 2° legge della dinamica. Questa equazione permette di imporre l'equilibrio alla traslazione. La terza equazione di bilancio è invece la conservazione del momento della quantità di moto che di fatto impone l'equilibrio sulla rotazione.

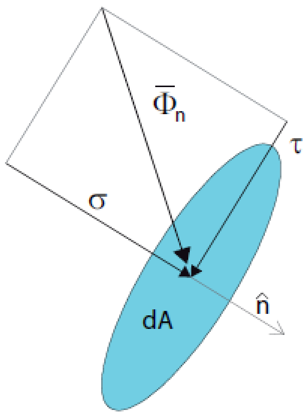
Come già accennato nella statica dei fluidi la legge che si utilizza è la conservazione della quantità di moto secondo cui la somma di tutte le forze esterne agenti sul sistema equivale la forza d'inerzia:

$$\sum \overline{F_{est}} = F_{in} = m\bar{a}$$

Per semplicità di ragionamento consideriamo la forza esterna come sommatoria di due componenti: forze di volume $\overline{F_{vol}}$, forze che dipendono dal volume del sistema fisico, come ila forza peso, e forze di superficie $\overline{F_{sup}}$ cioè forze che dipendono dalla superficie del sistema fisico, sono grandezze estensive.

Sforzo

Identifichiamo ora una superficie piccola che appartiene al volume W così che si possa considerare piana e quindi la si possa identificare con un versore normale $\hat{n}$ perpendicolare alla superficie. Da questa costruzione possiamo definire lo sforzo $\overline{\phi_n}$ come il rapporto tra l'elemento infinitesimo di forza e l'elemento infinitesimo di superficie:



$$\overline{\phi_n} = \frac{d\overline{F_{sup}}}{dA} \quad \left[\frac{N}{m^2} = Pa\right]$$

Lo sforzo può essere visto come sommatoria di due componenti:
- Componente normale dello sforzo: σ
- Componente tangenziale dello sforzo: τ

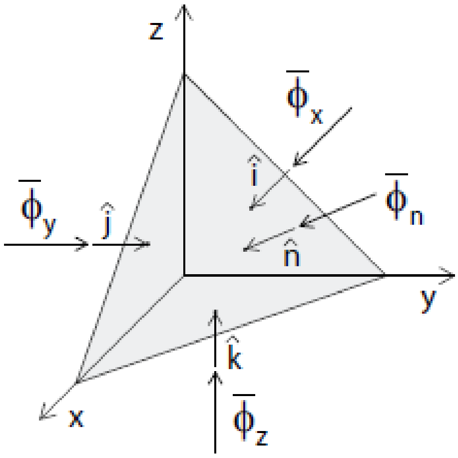
Pressione

La mancanza di movimento nei fluidi ha una duplice conseguenza:
1. L'equazione di conservazione della massa è banale perché non fornisce informazioni utili
2. L'equazione di conservazione della quantità di moto si riduce alla seguente espressione in quanto l'accelerazione di inerzia è nulla

$$\sum \overline{F_{est}} = \bar{0}$$

$$\sum \overline{F_{est}} = \overline{F_{vol}} + \overline{F_{sup}} = \bar{0}$$

Consideriamo un volumetto infinitesimo di fluido fermo, in quiete, costituito da una particolare forma: il tetraedro noto come tetraedro di Caduchi avente tra facce, dA_x, dA_y, dA_z orientate come gli assi cartesiane e la quarta dA di orientamento generico con normale $\hat{n}$. La forza di volume infinitesima che agisce su questo solido sarebbe:



$$d\overline{F_{vol}} = \rho \bar{f} dW$$

dove $\bar{f}$ è la forza di volume per unità di massa e ha le dimensioni di un'accelerazione, dW è l'elementino infinitesimo di volume e ρ è la densità del fluido definita come il rapporto tra la massa totale del fluido e il suo volume:

$$\rho = \frac{M}{W}$$

La forza di superficie infinitesima può invece essere scomposta in 4 componenti, una per ogni faccia in quanto la superfice totale del fluido può essere vista come la sommatoria delle quattro diverse superfici materiali, dA_x, dA_y, dA_z e dA:

$$d\overline{F_{sup}} = \overline{\phi_x} dA_x + \overline{\phi_y} dA_y + \overline{\phi_z} dA_z + \overline{\phi_n} dA_n$$

dove $\overline{\phi_x}$ è lo sforzo che agisce sulla superficie che per verso $\hat{x}$, e così via. La legge della conservazione della quantità di moto può dunque essere riscritta come, sommando le due componenti infinitesime di forza esterna:

$$d\overline{F_{vol}} + d\overline{F_{sup}} = \rho \bar{f} dW + \overline{\phi_x} dA_x + \overline{\phi_y} dA_y + \overline{\phi_z} dA_z + \overline{\phi_n} dA_n = \bar{0}$$

Per semplificare tale equazione notiamo che:

- Se il volume di controllo W è piccolo la superifie di volume infinitesma dW è un infinitesimo di ordine superiore quindi è possibile trascurare la forza di volume. In questo modo l'equazione sopra scritta si riduce a:

$$\overline{\phi_x} dA_x + \overline{\phi_y} dA_y + \overline{\phi_z} dA_z + \overline{\phi_n} dA_n = \bar{0}$$

- I fluidi in statica non hanno sforzi tangenziali quindi si hanno solo sforzi normali (questo è il motivo per cui i fluidi assumono la forma del recipiente) e quindi 'equazione si riduce nuovamente a:

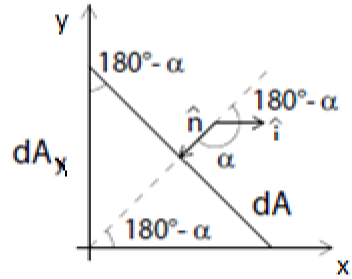
$$\overline{\phi_{xx}} \hat{\imath} dA_x + \overline{\phi_{yy}} \hat{\jmath} dA_y + \overline{\phi_{zz}} \hat{k} dA_z + \overline{\phi_{nn}} \hat{n} dA_n = \bar{0}$$

Proiettando questa equazione vettoriale nelle 3 direzioni scalari su ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \left(\phi_{xx}\hat{\imath} dA_x + \phi_{yy}\hat{\jmath} dA_y + \phi_{zz}\hat{k} dA_z + \phi_{nn}\hat{n} dA_n\right)\hat{\imath} = \phi_{xx} dA_x + 0 + 0 + \phi_{nn} dAn_x = \bar{0} \\ \left(\phi_{xx}\hat{\imath} dA_x + \phi_{yy}\hat{\jmath} dA_y + \phi_{zz}\hat{k} dA_z + \phi_{nn}\hat{n} dA_n\right)\hat{\jmath} = \bar{0} \\ \left(\phi_{xx}\hat{\imath} dA_x + \phi_{yy}\hat{\jmath} dA_y + \phi_{zz}\hat{k} dA_z + \phi_{nn}\hat{n} dA_n\right)\hat{k} = \bar{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_{xx} dA_x + \phi_{nn} dAn_x = \bar{0} \\ \phi_{yy} dA_y + \phi_{nn} dAn_y = \bar{0} \\ \phi_{zz} dA_z + \phi_{nn} dAn_z = \bar{0} \end{cases}$$

Analizziamo ora nello specifico l'equazione della direzione x:



$n_x = \cos\alpha$

$dA_x = dA\cos(\pi - \alpha)$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$dA_x = -\cos\alpha\, dA = -n_x dA$

Lo stesso ragionamento può essere fatto anche per altre direzioni e così di ottiene:

$dA_y = -n_y dA$

$dA_z = -n_z dA$

Sostituendo quanto ricavare nel sistema sopra scritto si ha:

$$\begin{cases} -n_x\phi_{xx}dA + \phi_{nn}dAn_x = \bar{0} \\ -n_y\phi_{yy}dA + \phi_{nn}dAn_y = \bar{0} \\ -n_z\phi_{zz}dA + \phi_{nn}dAn_z = \bar{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_x\phi_{xx}dA = \phi_{nn}dAn_x \\ n_y\phi_{yy}dA = \phi_{nn}dAn_y \\ n_z\phi_{zz}dA = \phi_{nn}dAn_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_{xx} = \phi_{nn} \\ \phi_{yy} = \phi_{nn} \\ \phi_{zz} = \phi_{nn} \end{cases}$$

Da ciò deduciamo che gli sforzi normali non dipendono da come è orientata la superficie; chiamiamo allora questi sforzi normali uguali pressione p. La pressione è la componente isotropa (indipendente dall'orientazione) degli sforzi normali:

$$\phi_{nn} = \phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = p$$

Compreso questo, ricordandosi che $dA_x = -n_x dA$, $dA_y = -n_y dA$ e $dA_z = -n_z dA$ e conoscendo gli sforzi delle 3 superfici tra loro perpendicolari è possibile riscrivere l'equazione della conservazione della quantità di moto ricavando lo sforzo sulla faccia obliqua:

$$\overline{\phi_x}dA_x + \overline{\phi_y}dA_y + \overline{\phi_z}dA_z + \overline{\phi_n}dA_n = \bar{0}$$

$$-\overline{\phi_x}n_x dA - \overline{\phi_y}n_y dA - \overline{\phi_z}n_z dA + \overline{\phi_n}dA = \bar{0}$$

$$\overline{\phi_n}dA = \overline{\phi_x}n_x dA + \overline{\phi_y}n_y dA + \overline{\phi_z}n_z dA$$

$$\overline{\phi_n} = \overline{\phi_x}n_x + \overline{\phi_y}n_y + \overline{\phi_z}n_z$$

Notiamo che $\overline{\phi_n}$ è un campo tensoriale e quindi $\overline{\phi_x}$, $\overline{\phi_y}$, e $\overline{\phi_z}$ costituiscono le componenti vettoriale del campo tensoriale stesso. Si costruisce quindi il tensore degli sforzi $\bar{\bar{\phi}}$ mettendo su ciascuna riga le tre componenti scalari delle componenti vettoriali:

$$\bar{\bar{\phi}} = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zx} & \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix}$$

Gli elementi sulla diagonale rappresentano le componenti normali degli sforzi, mentre gli elementi extra diagonali rappresentano le componenti tangenziali. Dal momento che in statica le componenti tangenziali sono nulle il tensore degli sforzi per un fluido in queste condizioni si riduce a una semplice matrice diagonale con tutti gli elementi uguali alla pressione stessa:

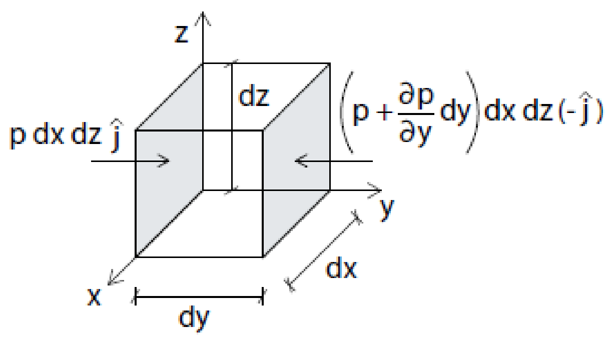
$$\bar{\bar{\phi}} = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = p\bar{\bar{I}}$$

Equazione indefinita della statica dei fluidi

Cambiamo ora la forma del volume infinitesimo che stiamo considerando e analizziamo un parallelepipedo. In questo caso la forza di volume può essere scritta come:

$$d\overline{F_{vol}} = \rho \bar{f} dW = \rho \bar{f} dxdydz$$

Anche in questo caso la forza di superficie infinitesima può essere scomposta in 6 componenti, una per ogni faccia in quanto la superfice totale del fluido può essere vista come la sommatoria delle quattro diverse superfici materiali. Occorre però comprendere come può essere espressa la forza infinitesima di due facce parallele. Prendiamo in considerazione le facce aventi per versori $\hat{\jmath}$ e $-\hat{\jmath}$, per la meccanica del continuo è possibile scrivere:



$$d\overline{F_{sup1}} = pdxdydz\hat{\jmath}$$

$$d\overline{F_{sup2}} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dxdz(-\hat{\jmath})$$

Dunque la forza di superficie totale di queste due superfici sarebbe:

$$d\overline{F_{sup\jmath}} = pdxdydz\hat{\jmath} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dxdz(-\hat{\jmath}) = pdxdydz\hat{\jmath} - pdxdydz\hat{\jmath} - \frac{\partial p}{\partial y} dydxdz\hat{\jmath} = -\frac{\partial p}{\partial y} dydxdz\hat{\jmath}$$

Procedendo con il medesimo ragionamento anche per altre facce si arriva ad avere una forza infinitesima di superfice totale pari a:

$$d\overline{F_{sup}} = -\frac{\partial p}{\partial x} dydxdz\hat{\imath} - \frac{\partial p}{\partial y} dydxdz\hat{\jmath} - \frac{\partial p}{\partial z} dydxdz\hat{k}$$

Quindi la seconda equazione della dinamica, o conservazione della quantità di moto può essere riscritta come:

$$d\overline{F_{vol}} + d\overline{F_{sup}} = \rho \bar{f} dxdydz - \frac{\partial p}{\partial x} dydxdz\hat{\imath} - \frac{\partial p}{\partial y} dydxdz\hat{\jmath} - \frac{\partial p}{\partial z} dydxdz\hat{k} = \bar{0}$$

In questo caso non è possibile trascurare $d\overline{F_{vol}}$ come nel caso precedente poiché le grandezze sono dello stesso ordine, è però possibile semplificare il volume $dydxdz$ ottenendo così l'equazione indefinita che governa la statica dei fluidi:

$$\rho\bar{f} - \frac{\partial p}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} = \bar{0}$$

$$\rho\bar{f} = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}$$

$$\rho\bar{f} = \nabla p$$

L'equazione qui ottenuta non risulta però essere particolarmente utile in quanto non abbiamo specificato il significato di $\bar{f}$. Cerchiamo quindi di capire bene cos'è tale grandezza e per farlo sottolineiamo che tratteremo esclusivamente i fluidi pesanti.

Statica dei fluidi pesanti

Si parla di fluidi pesanti quando l'unica forza di volume presente è quella peso. In questo caso si ha che la forza di volume per unità di massa $\bar{f}$ vale:

$$\bar{f} = \bar{g} = -g\nabla\tilde{z}$$

dove $\tilde{z}$ è la verticale geometrica e indica la direzione del campo gravitazionale. Per convenzione è verso l'alto quindi nelle formule si mette il segno – perché $\bar{g}$ è verso il basso. Il termine $\nabla\tilde{z}$ fornisce di fatto la direzione. Detto ciò è possibile scrivere l'equazione indefinita che governa la statica dei fluidi pesanti:

$$\nabla p = \rho\bar{f} = -\rho g\nabla\tilde{z}$$

Anche in questo caso tale equazioni non è utile in quanto sono presenti due incognite, p, ρ quindi occorre definire una seconda equazione che leghi la pressione alla densità affinché si possa utilizzare questa legge. L'equazione che lega la pressione alla densità è nota come equazione di stato:

$$\rho = \rho(p, T)$$

Le equazioni di stato sono diverse in funzione del tipo di fluido:

- Fluido comprimibile = la densità varia in funzione della pressione → occorre l'equazione di stato (es: aria)
- Fluido incomprimibile = la variazione della densità è trascurabile rispetto alla variazione di pressione quindi la densità non dipende dalla pressione → non occorre l'equazione di stato perché la densità non è funzione della pressione (es: acqua)

Statica dei fluidi pesanti incomprimibili

Come già accennato se siamo in presenza di fluidi incomprimibili la densità non varia con la pressione e, anzi, può essere considerata costante. È dunque possibile definire il peso specifico γ del fluido come il prodotto tra la densità e g:

$$\rho g = \gamma \quad \left[\frac{N}{m^3}\right]$$

$$\rho = \frac{\gamma}{g}$$

Riscriviamo ora l'equazione di stato effettuando le opportune sostituzioni e semplificazioni:

$$\nabla p = -\rho g \nabla \tilde{z}$$

$$\nabla p + \rho g \nabla \tilde{z} = \bar{0}$$

$$\nabla p + \frac{\gamma}{g} g \nabla \tilde{z} = \bar{0}$$

$$\nabla p + \gamma \nabla \tilde{z} = \bar{0}$$

$$\frac{\nabla p}{\gamma} + \nabla \tilde{z} = \bar{0}$$

Posso però portare il peso specifico all'interno del gradiente in quanto costante e quindi l'equazione si semplifica ulteriormente e si ottiene così la legge di Stevino (1586):

$$\nabla \frac{p}{\gamma} + \nabla \tilde{z} = \bar{0}$$

$$\nabla \left(\frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = \bar{0}$$

La legge di Stevino afferma che se il gradiente di una quantità è nullo, quella determinato quantità non varia nello spazio quindi è costante dunque stabilisce che la quota piezometrica $\tilde{z}_{PCI}$, data dalla somma della quota geodetica $\tilde{z}$ e dall'altezza piezometrica p/γ, per un fluido incomprimibile in quiete è costante:

$$\frac{p}{\gamma} + \tilde{z} = cost = \tilde{z}_{PCI}$$

Tale equazione è lineare e indica dunque che la pressione diminuisce linearmente con la quota geodetica e con il luogo dei punti a pressione costante (superfici isobare). L'insieme dei punti $\tilde{z}_{PCI}$ si collocano su una superficie piana orientata come la perpendicolare alla verticale geodetica: queste superfici sono note come superfici isobare. Il valore della costante $\tilde{z}_{PCI}$ si può determinare se si conosce il valore della pressione in corrispondenza di una determinata quota. Dunque si può interpretare $\tilde{z}_{PCI}$ come la quota geodetica del piano orizzontale in corrispondenza del quale le pressioni sono nulle; tale piano è noto come piano dei carichi idrostatici. Se è nota $\tilde{z}_{PCI}$ è possibile calcolare la pressione p in ogni punto del volume di fluido:

$$p = (\tilde{z}_{PCI} - \tilde{z})\gamma = h\gamma$$

dove h è l'affondamento del punto considerato rispetto al piano dei carichi idrostatici. Nel caso di fluidi a piccolo peso specifico la pressione è costante per ridotte variazioni di quota e quindi non ha senso parlare di piano dei carichi idrostatici poiché questo si troverà all'infinito. Fino ad ora quando abbiamo fatto riferimento alla pressione abbiamo implicitamente considerato la pressione in senso assoluto; in realtà si può anche parlare di pressione relativa. Dal momento che, nella maggior parte delle applicazioni, l'aria è sempre presente, risulta conveniente eliminare tale costante dai valori di pressioni dunque si definisce pressione relativa p la differenza tra il valore di pressione non depurato (cioè assoluto p^*) e la pressione atmosferica assoluta ${p_{atm}}^*$. In termini relativi la pressione atmosferica è quindi ovviamente nulla:

$$p = p^* - {p_{atm}}^*$$

Questa precisazione è particolarmente utile in quanto se un liquido in quiete è direttamente a contatto con l'atmosfera, la quota della superficie di interfaccia, la superficie libera, coincide con la quota del piano dei carichi idrostatici relativo (si ammette che la pressione sia continua attraverso l'interfaccia.

Statica dei fluidi pesanti comprimibili

Nel caso di fluidi comprimibili la densità non è costante quindi l'equazione $\nabla p = -\rho g \nabla \tilde{z}$ non è sufficiente per determinare la distribuzione di pressione al interno del fluido. Occorre affiancare a questa equazione una legge che lega la densità alla pressione e alla temperatura; questa legge è detta equazione di stato. L'equazione di stato è una caratteristica del fluido che si sta considerando; ipotizzando di studiare un gas, l'equazione di stato può essere approssimata con la nota equazione di stato dei gasi ideali o perfetti:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M_{mol}}$$

Ricaviamo da questa equazione la densità e sostituiamola all'interno dell'equazione indefinita:

$$\rho = \frac{pM_{mol}}{RT}$$

$$\nabla p = -\rho g \nabla \tilde{z} = -\frac{pM_{mol}}{RT} g \nabla \tilde{z}$$

$$\frac{\nabla p}{p} = -\frac{M_{mol}}{RT} g \nabla \tilde{z}$$

Notiamo che questa legge altro non è che un'equazione differenziale che può essere integrata se è noto come varia la temperatura in funzione della quota; in questo corso in realtà considereremo le temperature sempre costanti in quanto tratteremo di processi isotermi. Dunque se la temperatura è costante il termine che moltiplica $\nabla \tilde{z}$ è costante e piò essere sostituito per semplicità di conti con A:

$$T = cost \quad \rightarrow \quad \frac{M_{mol}}{RT} g = cost = A$$

Integriamo ora l'equazione precedente:

$$\frac{\nabla p}{p} = -A \nabla \tilde{z}$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\nabla p}{p} = -A \int_{\widetilde{z_0}}^{\tilde{z}} \nabla \tilde{z}$$

$$\int_{p_0}^{p} \nabla (\ln p) = -A(\tilde{z} - \widetilde{z_0})$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -A(\tilde{z} - \widetilde{z_0})$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{[-A(\tilde{z} - \widetilde{z_0})]} = \exp[-A(\tilde{z} - \widetilde{z_0})]$$

La pressione diminuisce dunque esponenzialmente con la quota geodetica e non linearmente come nel caso dei fluidi incomprimibili (in realtà se considerassimo l'ordine del chilometro, l'esponenziale sarebbe ben rappresentato da una retta e dunque sarebbe valida anche in questo caso la legge di Stevino. Tale equazione quindi per quote comprese fino ai 10^3 coincide con la legge di Stevino). Anche in questo caso però siamo interessati alla determinazione della forza finita che un fluido in quiete esercita su una certa superficie.

Equazione globale della statica dei fluidi

Dato che la pressione è una grandezza locale mentre la forza è una grandezza globale, occorre ottenere l'equazione globale della statica dei fluidi pesanti comprimibili. Per ottenere tale equazione integro l'equazione indefinita su un volume finito W, detto volume di controllo, di fluido:

$$\int_W \nabla p \, dW = \int -\rho g \nabla \tilde{z} \; dW$$

Il termine a destra dell'equazione rappresenta il fluido contenuto nel volume di controllo:

$$\int -\rho g \nabla \tilde{z} \; dW = -g\nabla \tilde{z} \int \rho \, dW = -Mg\nabla \tilde{z} = \bar{G}$$

Il termine a sinistra invece può essere convenientemente riscritto utilizzando il teorema del gradiente che di fatto permette di passare da un'integrale di volume a un'integrale di superficie; tale teorema risulta essere particolarmente potente in quanto permette di trascurare la conoscenza dell'espressione del gradiente della pressione in un dato volume che può essere estremamente complesso. Permette dunque di semplificare i conti:

$$\int_W \nabla p \, dW = \int_W \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_i} \hat{\iota_i} \, dW = -\int_A p n_i \hat{\iota_i} \, dA = -\int_A p\hat{n} \, dA = -\bar{\Pi}_p$$

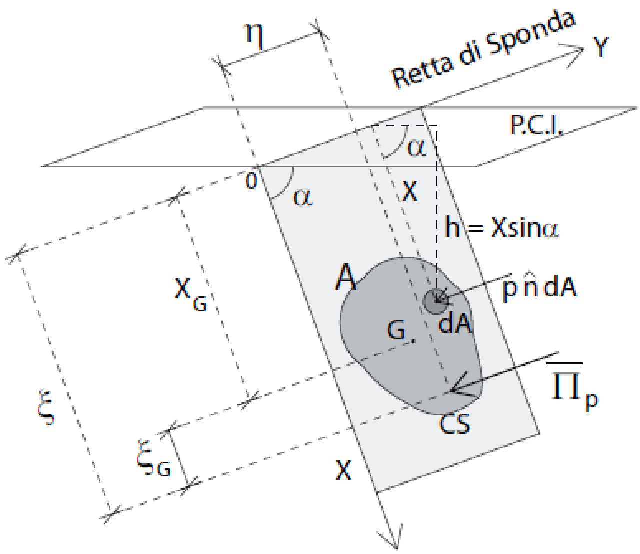
$\overline{\Pi p}$ esprime la risultante delle pressioni sulla superficie A di contorno del volume. Si può dunque riscrivere l'equazione iniziale come l'equazione globale della statica dei fluidi pesanti:

$$-\bar{\Pi}_p = \bar{G}$$

$$\bar{G} + \bar{\Pi}_p = \bar{0}$$

Spinte statiche su superfici piane: metodo analitico

Si consideri una superficie piana generica di area A che giace su un piano inclinato di un certo angolo α rispetto al piano dei carichi idrostatici di un fluido pesante incomprimibile in quiete. Definiamo poi retta di sponda l'intersezione tra il piano dei carichi idrostatici e il piano in cui giace la superficie. Fissiamo poi un sistema di riferimento in cui l'asse Y coincide con la retta di sponda e l'asse X giace sul piano contenente A ed è ortogonale a Y.



Come abbiamo detto la forza esercitata dalla superficie del fluido è rappresenta dalla seguente equazione:

$$\bar{\Pi}_p = \int_A p\hat{n} \, dA$$

Nel caso di superfici piane, $\hat{n}$, che rappresenta il versore della superficie infinitesima dA è costante e quindi si ha che:

$$\overline{\Pi}_p = \int_A p\hat{n}\, dA = \hat{n}\int_A p\, dA$$

Ma sapendo che può essere ricavata la pressione noto l'affondamento e note le relazioni geometriche dal disegno sopra effettuato, l'equazione appena scritta può essere riscritta nel seguente modo:

$$p = \gamma h$$

$$h = X \sin\alpha$$

$$x_G = \frac{\int_A X\, dA}{A}$$

$$\int_A X\, dA = x_G A$$

$$h_G = \sin\alpha\, x_G$$

$$p_G = \gamma h_G$$

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_p &= \hat{n}\int_A p\, dA = \\ &= \hat{n}\int_A \gamma h\, dA = \\ &= \hat{n}\int_A \gamma X \sin\alpha\, dA = \\ &= \hat{n}\gamma\sin\alpha\int_A X\, dA = \\ &= \hat{n}\gamma\sin\alpha\, x_G A = \\ &= \hat{n}\gamma h_G A = \\ &= \hat{n} p_G A\end{aligned}$$

La spinta $\bar{S}$ sarà uguale ed opposta alla forza $\overline{\Pi p}$ che la superficie trasmette al fluido:

$$\bar{S} = -\overline{\Pi}_p = -\hat{n} p_G A$$

Il verso della spinta dipende dal segno della pressione nel baricentro:

- Se $p_G > 0$ $\quad$ $\overline{\Pi p}$ entrante nel volume (concorde con $\hat{n}$)
  $\bar{S}$ discorde quindi il fluido "spinge" la superficie
- Se $p_G < 0$ $\quad$ $\overline{\Pi p}$ uscente dal volume (discorde con $\hat{n}$)
  $\bar{S}$ concorde quindi il fluido "tira" la superficie

Queste considerazioni possono essere fatte se e solo se le pressioni sono relative; nel caso di pressioni assolute questa risulta sempre discorde con il versore $\hat{n}$.
Definiamo l'intersezione tra la retta di applicazione di $\overline{\Pi p}$ e la superficie come centro di spinta.
Affinché si possa determinare la retta di applicazione di $\overline{\Pi p}$ occorre che la somma dei momenti infinitesimi generati dalle forze infinitesime rispetto a una retta sia uguale al momento generato dalla risultante rispetto alla retta stessa:

$$\left(\int_A p\, dA\, X\right)\hat{n}\hat{n} = (\overline{\Pi}_p\, \hat{n})\xi$$

$$\int_A p\, dA\, X = (p_G A)\xi$$

$$\int_A \gamma h\, dA\, X = (\gamma h_G A)\xi$$

$$\int_A \gamma h\, dA\, X\, X \sin\alpha = (\gamma \sin\alpha\, x_G A)\xi$$

$$\int_A \gamma\, dA\, X^2 \sin\alpha = \gamma \sin\alpha\, x_G A\xi$$

$$\gamma \sin\alpha \int_A dA\, X^2 = \gamma \sin\alpha\, x_G A\xi$$

$$\gamma \sin\alpha\, I = \gamma \sin\alpha\, x_G A\xi$$

$$I = M\xi$$

$$\xi = \frac{I}{M}$$

$$\hat{n}\hat{n} = 1$$

$$\overline{\Pi}_p\, \hat{n} = p_G A$$

$$p = \gamma h$$

$$h = X \sin\alpha$$

$$\int_A dA\, X^2 = I$$

$$p_G = \gamma h_G$$

$$h_G = \sin\alpha\, x_G$$

$$x_G A = M$$

Dove I è il momento d'inerzia di A rispetto alla retta di sponda mentre M è il momento statico di A rispetto alla retta di sponda. Una rappresentazione più comoda dell'equazione $\xi = \frac{I}{M}$ può essere ottenuta notando che:

$$\int_A (X - X_G)^2 dA = \int_A (X^2 + X_G^2 - 2XX_G) dA = \int_A X^2 dA + \int_A X_G^2 dA + \int_A -2XX_G dA =$$

$$= \int_A X^2 dA + \int_A X_G^2 dA - 2\int_A XX_G dA$$

$$X_G\ cost \quad \rightarrow \int_A (X - X_G)^2 dA = \int_A X^2 dA + X_G^2 A - 2X_G \int_A X dA = \int_A X^2 dA + X_G^2 A - 2X_G X_G A =$$

$$= \int_A X^2 dA - 2{X_G}^2 A$$

$$I_G = I - X_G M$$

Il primo termine a sinistra dell'uguale rappresenta il momento di inerzia I_G della superficie A rispetto ad un asse baricentrale parallelo alla retta di sponda. Possiamo quindi riscrivere:

$$I = I_G + X_G M$$

$$\xi = \frac{I}{M} = \frac{I_G + X_G M}{M} = \frac{I_G}{M} + X_G = \xi_G + X_G$$

La quantità ξ_G rappresenta la distanza del centro di spinta dal baricentro della superficie misurata lungo X. Questa rappresentazione è più comoda perché indipendente dalla posizione del piano dei carichi idrostatici.
Ottenuta questa equazione occorre ricavare la coordinata η procedendo nel medesimo modo, ma calcolando i momenti rispetto all'asse X:

$$\left(\int_A p\, dA\, Y\right)\hat{n}\hat{n} = (\overline{\Pi p}\,\hat{n})\eta$$

$$\int_A p\, dA\, Y = (p_G A)\eta$$

$$\int_A \gamma h\, dA\, Y = (\gamma h_G A)\eta$$

$$\int_A \gamma h\, dA\, X\, Y \sin\alpha = (\gamma \sin\alpha\, x_G A)\eta$$

$$\int_A \gamma\, dA\, XY \sin\alpha = \gamma \sin\alpha\, x_G A\eta$$

$$\gamma \sin\alpha \int_A dA\, XY = \gamma \sin\alpha\, x_G A\eta$$

$$\hat{n}\hat{n} = 1$$

$$\overline{\Pi p}\,\hat{n} = p_G A$$

$$p_G = \gamma h_G$$

$$h_G = \sin\alpha\, x_G$$

$$x_G A = M$$

$$p = \gamma h$$

$$h = X \sin\alpha$$

$$\int_A dA\, XY = I_{XY}$$

$$\int_A dA\, XY = x_G A\eta$$

$$\int_A dA\, XY = M\eta$$

$$I_{XY} = M\eta$$

$$\eta = \frac{I_{XY}}{M}$$

Dove I_{XY} è il momento centrifugo della superficie A rispetto agli assi X e Y. Se la superficie A è dotata di un asse di simmetria parallelo all'asse X, il momento centrifugo rispetto ad esso e alla retta di sponda è nullo. Il centro di spinta appartiene, dunque, a tale asse di simmetria.

Spinte statiche su superfici piane: metodo geometrico

Per determinare la spinta su una superficie piana è anche possibile utilizzare un metodo semplice di natura geometrica: è possibile notare che l'integrale sotto scritto rappresenta di fatto il volume di un solido, detto solido delle pressioni, che si costruisce riportando, perpendicolarmente alla superfice A, segmenti di lunghezza p in corrispondenza di ogni elemento infinitesimo dA. Il volume del solido delle pressioni ha come dimensioni quelle di una forza:

$$\int_A p\, dA = W_p$$

Dunque la spinta sulla superfice piana A si calcola come, sapendo che l'integrale, essendo un operatore lineare, permette di essere scomposto come sommatoria di diversi integrali (relative alle diverse superfici in cui è stato scomposta la superficie stessa):

$$\bar{\Pi}_p = \int_A p\hat{n}\, dA = \hat{n} \int_A p\, dA = \hat{n} W_p$$

$$\bar{S} = -\bar{\Pi}_p = -\hat{n} W_p$$

È possibile notare che di fatto il solido delle pressioni altro non è che un cilindroide cioè una figura geometrica solida di cui è facile calcolare il volume: definito come prodotto tra area di base a altezza media:

$$W_p = p_G A$$

Anche il centro di spinta, e di conseguenza la retta di applicazione può essere facilmente determinato attraverso questo metodo; se indichiamo con $dW_p = pdA$ l'elemento infinitesimo del volume del solido delle pressioni è possibile riscriver le seguenti equazioni come:

$$\left(\int_A p\, dA\, X\right) \hat{n}\hat{n} = \left(\bar{\Pi}_p\, \hat{n}\right) \xi \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{\int_{W_p} X d\, W_p}{W_p}$$

$$\left(\int_A p\, dA\, Y\right) \hat{n}\hat{n} = \left(\bar{\Pi}_p\, \hat{n}\right) \eta \quad \rightarrow \quad \eta = \frac{\int_{W_p} Y d\, W_p}{W_p}$$

Le coordinate del centro di spinta corrispondono, dunque, per definizione, alle coordinate del baricentro del solido delle pressioni.

Spinte statiche su superfici curve

Nel caso in cui si determinare la spinta che il fluido esercita su una superficie curva, la trattazione del paragrafo precedente non è più valida. La ragione sta nel fatto che non esiste un unico versore normale alla superficie curva: $\hat{n}$ non può essere considerato costante e, quindi, tirato fuori dall'integrale nell'equazione:

$$\bar{\Pi}_p = \int_A p\hat{n}\, dA$$

Data la superficie curva A_0 a contatto col fluido o con più fluidi stratificati, per i quali la distribuzione delle pressioni sia continua, si individua un volume di controllo W con i seguenti criteri:

- la superficie A_0 deve essere parte del contorno del volume W (può coincidere con l'intera superficie di contorno del volume);
- il resto del contorno (se esiste) deve essere costituito da superfici piane;
- il volume di controllo deve essere riempito con i fluidi, in modo che la superficie A_0 sia a contatto con gli stessi fluidi con cui è a contatto nella realtà;
- i fluidi nel volume di controllo devono avere la stessa distribuzione di pressioni che hanno nella realtà;
- Le superfici di separazione tra fluidi diversi devono essere orizzontali.

Il volume di controllo deve essere in equilibrio, per cui deve valere l'equazione globale della statica:

$$\bar{G} + \bar{\Pi}_p = \bar{0}$$

Sfruttando la proprietà associativa dell'integrale, la risultante delle pressioni agenti sulla superficie di contorno di W, $\overline{\Pi p}$ può anche essere scritta come:

$$\overline{\Pi}_p = \overline{\Pi}_0 + \sum_{i=1}^{n} \overline{\Pi}_i$$

dove $\overline{\Pi}_0$ è la risultante delle pressioni su A_0, mentre $\sum_{i=1}^{n} \overline{\Pi}_i$ è la somma delle risultanti delle pressioni sulle restanti n superfici piace che costituiscono il contorno del volume di controllo. Sostituendo l'equazione globale della statica nell'espressione appena scritta si ottiene:

$$-\bar{G} = \overline{\Pi}_0 + \sum_{i=1}^{n} \overline{\Pi}_i$$

$$\overline{\Pi}_0 = -\bar{G} - \sum_{i=1}^{n} \overline{\Pi}_i$$

Il problema del calcolo della spinta su una superficie curva è stato trasformato, dunque, nel calcolo di una forza peso e di n spinte su superfici piane (determinate come spiegato nel paragrafo precedente). La spinta S cercata può essere uguale a $+\overline{\Pi}_0$ o a $-\overline{\Pi}_0$ in funzione del volume di controllo scelto.