SISTEMI A 2 O PIU' GRADI DI LIBERTA'

Equazione di moto

Per i sistemi a più gradi di libertà scriveremo di già le forme di energia quadratiche per applicare poi Lagrange così da ricavare l'equazione di moto. Anche in questo caso analizziamo dunque le varie forme di energia. Il procedimento è il medesimo di quello descritto per i sistemi ad un grado di libertà seguendo l'approccio matriciale, l'unica sostanziale differenza è che si avranno più variabili indipendenti che saranno raccolte nel vettore $\underline{q}$.

Energia cinetica

L'espressione dell'energia cinetica può essere riscritta in forma matriciale come prodotto tra vettori e matrici:

$$E_c = \frac{1}{2}\underline{\dot{y}}^T[m]\underline{\dot{y}}$$

$$\underline{y} = \underline{y}\left(\underline{q}\right)$$

$$\underline{\dot{y}} = \frac{d}{dt}\underline{y}\left(\underline{q}\right) = \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{q}}\frac{d\underline{q}}{dt} = \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{q}}\,\underline{\dot{q}}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\underline{\dot{y}}^T[m]\underline{\dot{y}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{q}}\,\underline{\dot{q}}\right)^T[m]\left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{q}}\,\underline{\dot{q}}\right) = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}}^T\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{q}}^T[m]\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{q}}\,\underline{\dot{q}} = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}}^T[\lambda_m]^T[m][\lambda_m]\,\underline{\dot{q}} = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}}^T[J(\underline{q})]\,\underline{\dot{q}}$$

$[J(q)]$ è la matrice di massa generalizzata, ha dimensione nxn ovvero è una matrice quadrata di dimensione pari al numero di gradi di libertà del sistema, la matrice $[m]$ invece è la matrice di massa fisica, è una matrice quadrata mxm di dimensione pari al numero delle variabili fisiche.

Funzione dissipativa

La funzione dissipativa può quindi essere scritta come:

$$D = \frac{1}{2}\underline{\dot{\Delta l}}^T[r]\underline{\dot{\Delta l}}$$

$$\underline{\Delta l} = \underline{\Delta l}\left(\underline{q}\right)$$

$$\underline{\dot{\Delta l}} = \frac{d}{dt}\underline{\Delta l}\left(\underline{q}\right) = \frac{\partial \underline{\Delta l}}{\partial \underline{q}}\frac{d\underline{q}}{dt} = \frac{\partial \underline{\Delta l}}{\partial \underline{q}}\,\underline{\dot{q}}$$

$$D = \frac{1}{2}\underline{\dot{\Delta l}}^T[r]\underline{\dot{\Delta l}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \underline{\Delta l}}{\partial \underline{q}}\,\underline{\dot{q}}\right)^T[r]\left(\frac{\partial \underline{\Delta l}}{\partial \underline{q}}\,\underline{\dot{q}}\right) = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}}^T\frac{\partial \underline{\Delta l}}{\partial \underline{q}}^T[r]\frac{\partial \underline{\Delta l}}{\partial \underline{q}}\,\underline{\dot{q}} = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}}^T[\lambda_k]^T[r][\lambda_k]\,\underline{\dot{q}} = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}}^T\left[R\left(\underline{q}\right)\right]\underline{\dot{q}}$$

$[R(\underline{q})]$ è la matrice di smorzamento generalizzata, ha dimensione nxn ovvero è una matrice quadrata di dimensione pari al numero di gradi di libertà del sistema, la matrice $[r]$ invece è la matrice di rigidezza fisica, è una matrice quadrata mxm di dimensione pari al numero delle variabili fisiche. È interessante sottolineare che λ_k sarebbero λ_r, li possiamo indicare con λ_k perché avremo quasi sempre smorzatori in parallelo alle molle e quindi sono caratterizzati dagli stessi allungamenti.

Lavoro forze

Anche il lavoro delle forze può essere scritto in forma matriciale: se si organizzano gli spostamenti y_{F_i} in un vettore:

$$\delta^* L = \sum_i F_i \, \delta^* \underline{y_{F_i}} = \sum_i F_i \frac{\partial y_{F_i}}{\partial \underline{q}} \delta^* \underline{q} = \underline{F^T} \frac{\partial y_{F_i}}{\partial \underline{q}} \delta^* \underline{q} = \underline{F^T} [\lambda_f] \delta^* \underline{q} = \underline{Q^T} \delta^* \underline{q}$$

$$\underline{Q} = [\lambda_f]^T \underline{F}$$

Energia potenziale

Anche l'energia potenziale può essere riscritta in forma matriciale:

$$V = \frac{1}{2} \underline{\Delta l}^T [k] \underline{\Delta l} + \underline{mg^T} \underline{h}$$

Questa notazione (del prof Cheli) descrive il potenziale in termini generali, se invece fossimo già interessati alla forma linearizzata occorrerebbe derivarla due volte e si otterrebbe così e quest'altra espressioni (del prof Ripamonte):

$$V \cong \frac{\partial^2 V}{\partial \underline{q}^2} = [\lambda_k]^T [k] [\lambda_k] + \sum_{i=1}^{n_{molle}} \Delta l_i (H_{\Delta l_i}) + \sum_{j=1}^{n_{masse}} g m_i (H_{h_i})$$

Termini di Lagrange ed equazione di moto

Dopo avere ricavato le forme di energia ricaviamo ora i termini che compaiono direttamente nell'equazione di Lagrange:

$$\begin{cases} \left\{ \dfrac{d}{dt} \left(\dfrac{\partial E_c}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) \right\} - \left\{ \dfrac{\partial E_c}{\partial \underline{q}} \right\} + \left\{ \dfrac{\partial D}{\partial \underline{\dot{q}}} \right\} + \left\{ \dfrac{\partial V}{\partial \underline{q}} \right\} = Q \\ \delta^* L = Q \cdot \delta^* \underline{q} \end{cases}$$

I primi due termini dell'equazione si riducono solo al primo termini, per quanto riguarda sistemi lineari, dunque:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) \right\} - \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \underline{q}} \right\} = \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) \right\}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T [\lambda_m]^T [m] [\lambda_m] \, \underline{\dot{q}} = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T [J(\underline{q})] \, \underline{\dot{q}}$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) = \left\{ \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \left[J\left(\underline{q}\right) \right] + \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \left[J\left(\underline{q}\right) \right]^T \right\}$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) \right\}^T = \left\{ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \left[J\left(\underline{q}\right) \right] + \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \left[J\left(\underline{q}\right) \right]^T \right\} \right\}^T = \left[J\left(\underline{q}\right) \right] \underline{\ddot{q}} = [\lambda_m]^T [m] [\lambda_m] \underline{\ddot{q}}$$

Per ricavare il terzo termine occorre derivare la funzione dissipativa rispetto alla derivata della variabile indipendente:

$$D = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \left[R\left(\underline{q}\right) \right] \, \underline{\dot{q}}$$

$$\left\{ \frac{\partial D}{\partial \underline{\dot{q}}} \right\}^T = \left\{ \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T [R] + \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T [R]^T \right\}^T = [R] \underline{\dot{q}} = [\lambda_k]^T [r] [\lambda_k]$$

Per ricavare il quarto termine occorre derivare l'energia potenziale rispetto alla variabile indipendente:

$$V = \frac{1}{2}\underline{\Delta l}^T[k]\underline{\Delta l} + \underline{mg}^T\underline{h}$$

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial \underline{q}}\right\}^T = \left\{\frac{1}{2}\underline{q}^T[K] + \frac{1}{2}\underline{q}^T[K]^T\right\}^T = [K]\underline{q} = [\lambda_k]^T[k][\lambda_k]$$

Il sistema generico che si ottiene dopo aver ricavato tutti i legami cinematici e aver scritto le forme di energia in funzione delle variabili indipendenti è il seguente [d'ora in avanti si indicherà con $\underline{x}$ il vettore delle variabili indipendenti e non più con $\underline{q}$]:

$$[M]\underline{\ddot{x}} + [R]\underline{\dot{x}} + [K]\underline{x} = \underline{Q}$$

Moto libero non smorzato

Per risolvere un sistema sottoposto a moto libero non smorzato è possibile seguire due diversi approcci:

1. Soluzione mediante il determinante della matrice dei coefficienti
   Analizziamo ora la risposta di un moto libero non smorzato. In questo caso l'equazione di partenza è la seguente:

   $$[M]\underline{\ddot{x}} + [K]\underline{x} = \emptyset$$

   Si ipotizza una soluzione di primo tentativo: $\underline{x} = \underline{x_0}e^{\lambda t}$

   $$\underline{\dot{x}} = \lambda\underline{x_0}e^{\lambda t}$$

   $$\boxed{\lambda = \pm\alpha \pm i\omega}$$

   $$\underline{\ddot{x}} = \lambda^2\underline{x_0}e^{\lambda t}$$

   Sostituendo questi valore nell'equazione di ottiene:

   $$[M]\lambda^2\underline{x_0}e^{\lambda t} + [K]\underline{x_0}e^{\lambda t} = \emptyset$$

   $$([M]\lambda^2 + [K])\underline{x_0}e^{\lambda t} = \emptyset$$

   $$([M]\lambda^2 + [K])\underline{x_0} = \emptyset$$

   Si può ora semplificare il termine esponenziale perché sempre positivo. Si ottiene così un sistema di equazioni algebriche parametriche in λ. Anche in questo caso, così come per i sistemi a un grado di libertà, non siamo interessati alla soluzione banale $\underline{x_0} = \underline{0}$ quindi imponiamo che il termine tra parentesi sia uguale a zero. Affinché ciò sia verificato occorre che il determinante della matrice (il termine tra parantesi è una matrice) sia nullo:

   $$[M]\lambda^2 + [K] = \emptyset \quad \rightarrow \quad \det([M]\lambda^2 + [K]) = \emptyset$$

   Si ha un polinomi di quarto grado e quindi si avranno quattro soluzioni (nelle soluzioni non compare alfa perché non c'è lo smorzamento). Se $[M]$ e $[K]$ sono simmetriche e definite positive allora si avrà:

   Parte complessa delle frequenza propria

   $$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\omega_1^2} = \pm i\omega_1$$

   $$\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\omega_2^2} = \pm i\omega_2$$

Il numero di frequenze proprie è pari a quello dei gradi di libertà del sistema (in questo caso dunque i gradi di libertà erano due perché sono stati ottenute due frequenze proprie ω_1 e ω_2). Ottenuti questi valori, si sostituiscono direttamente nella seguente espressione (si può procedere in questo modo perché essendo elevati al quadrato non occorre distinguerei valori positivi e quelli negativi). Si può ora procedere con il calcolo dei modi di vibrare del sistema, per farlo si prende l'equazione sopra ricavata:

$$([M]\lambda^2 + [K])\underline{x_0} = \emptyset$$

$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$
$-[M]{\omega_1}^2\underline{x_0}e^{i\omega_1 t} + [K]\underline{x_0}e^{i\omega_1 t} = \emptyset$ $(-[M]{\omega_1}^2 + [K])\underline{x_0}e^{i\omega_1 t} = \emptyset$ $(-[M]{\omega_1}^2 + [K])\underline{x_0} = \emptyset$	$-[M]{\omega_2}^2\underline{x_0}e^{i\omega_2 t} + [K]\underline{x_0}e^{i\omega_2 t} = \emptyset$ $(-[M]{\omega_2}^2 + [K])\underline{x_0}e^{i\omega_2 t} = \emptyset$ $(-[M]{\omega_2}^2 + [K])\underline{x_0} = \emptyset$

Anche in questo caso è stato semplificato il termine esponenziale in quanto sempre positivo. Si ottiene dunque un sistema indeterminato le cui equazioni sono combinazioni lineari e quindi sono linearmente dipendenti le une dalle altre (nello specifico si ottengono $n-1$ equazioni in n incognite). L'autovettore non è quindi determinato, ma può essere definito a meno di una costante (processo di normalizzazione). Non è dunque possibile ottenere gli autovettori in maniera deterministica, ma si otterranno i cosiddetti rapporti caratteristici. Si otterrà dunque:

ω_1	ω_2
$\begin{cases} (-{\omega_1}^2 m_{11} + k_{11})x_1 + (-{\omega_1}^2 m_{12} + k_{12})x_2 = 0 \\ combinazione\ lineare\ della\ prima\ equazione \end{cases}$ $(-{\omega_1}^2 m_{11} + k_{11})x_1 = ({\omega_1}^2 m_{12} - k_{12})x_2$ $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{(1)} = \frac{{\omega_1}^2 m_{12} - k_{12}}{-{\omega_1}^2 m_{11} + k_{11}} = \mu_I$	$\begin{cases} (-{\omega_2}^2 m_{11} + k_{11})x_1 + (-{\omega_2}^2 m_{12} + k_{12})x_2 = 0 \\ combinazione\ lineare\ della\ prima\ equazione \end{cases}$ $(-{\omega_2}^2 m_{11} + k_{11})x_1 = ({\omega_2}^2 m_{12} - k_{12})x_2$ $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{(2)} = \frac{{\omega_2}^2 m_{12} - k_{12}}{-{\omega_2}^2 m_{11} + k_{11}} = \mu_{II}$

Gli autovettori saranno, se si normalizza $x_2 = 1$:

autovettore

$\underline{x}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \mu_I \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\underline{x}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \mu_{II} \\ 1 \end{Bmatrix}$

I rapporti caratteristici di un sistema a n gradi di libertà sono n vettori di $n-1$ dimensioni. A questo punto è possibile ricavare le soluzione effettuando un integrale generale:

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha {x_1}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \beta {x_1}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \gamma {x_1}^{(3)} e^{\lambda_3 t} + \delta {x_1}^{(4)} e^{\lambda_4 t} \\ x_2(t) = \alpha {x_2}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \beta {x_2}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \gamma {x_2}^{(3)} e^{\lambda_3 t} + \delta {x_2}^{(4)} e^{\lambda_4 t} \end{cases}$$

Sempre con:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm i\omega_1 \\ \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2 \end{cases}$$

Una scrittura analoga a quella sopra scritta è la seguente:

$$\begin{cases} x_1(t) = a\underline{x_1}^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + b\underline{x_1}^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = a\underline{x_2}^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + b\underline{x_2}^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

L'integrale particolare è combinazione lineare dei modi di vibrare. Applicando le condizioni inziali si può procedere con la risoluzione.

2. Soluzione attraverso il problema autovalori e autovettori = metto a sistema l'equazione di moto con un'identità ed effettuo un cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} [M]\underline{\ddot{x}} + [K]\underline{x} = \emptyset \\ [M]\underline{\dot{x}} = [M]\underline{\dot{x}} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \underline{\dot{x}} = \underline{z} \\ \underline{\ddot{x}} = \underline{\dot{z}} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \underline{w} = \begin{Bmatrix} \underline{z} \\ \underline{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{x} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{\dot{w}} = \begin{Bmatrix} \underline{\dot{z}} \\ \underline{\dot{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\ddot{x}} \\ \underline{\dot{x}} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [M] \end{bmatrix}\underline{\dot{w}} + \begin{bmatrix} 0 & [K] \\ -[M] & 0 \end{bmatrix}\underline{w} = \emptyset$$

$$[B]\underline{\dot{w}} + [C]\underline{w} = \emptyset$$

Ipotizziamo ora una soluzione di primo tentativo: $\underline{w} = \underline{w_0}e^{\lambda t}$
$\underline{\dot{w}} = \lambda\underline{w_0}e^{\lambda t}$

Sostituendo:

$$[B]\lambda\underline{w_0}e^{\lambda t} + [C]\underline{w_0}e^{\lambda t} = \emptyset$$

$$([B]\lambda + [C])\underline{w_0}e^{\lambda t} = \emptyset$$

$$([B]\lambda + [C])\underline{w_0} = \emptyset$$

$$([B]^{-1}[B]\lambda + [B]^{-1}[C])\underline{w_0} = \emptyset$$

$$([I]\lambda + [B]^{-1}[C])\underline{w_0} = \emptyset$$

Moto libero smorzato

Per risolvere un sistema sottoposto a moto libero non smorzato è possibile seguire due diversi approcci:

1. Soluzione mediante il determinante della matrice dei coefficienti

Analizziamo ora la risposta di un moto libero smorzato. In questo caso l'equazione di partenza è la seguente:

$$[M]\underline{\ddot{x}} + [R]\underline{\dot{x}} + [K]\underline{x} = \emptyset$$

Si ipotizza una soluzione di primo tentativo: $\underline{x} = \underline{x_0}e^{\lambda t}$
$\underline{\dot{x}} = \lambda\underline{x_0}e^{\lambda t}$
$\underline{\ddot{x}} = \lambda^2\underline{x_0}e^{\lambda t}$

$\lambda = -\alpha \pm i\omega$ in questo caso se $[M]$, $[R]$ e $[K]$ sono simmetriche e definite positive tutti gli autovalori hanno parte reale negativa

Sostituendo questi valore nell'equazione di ottiene:

$$[M]\lambda^2\underline{x_0}e^{\lambda t} + [R]\lambda\underline{x_0}e^{\lambda t} + [K]\underline{x_0}e^{\lambda t} = \emptyset$$

$$([M]\lambda^2 + [R]\lambda + [K])\underline{x_0}e^{\lambda t} = \emptyset$$

$$([M]\lambda^2 + [R]\lambda + [K])\underline{x_0} = \emptyset$$

Si può ora semplificare il termine esponenziale perché sempre positivo. Si ottiene così un sistema di equazioni algebriche parametriche in λ. Anche in questo caso, così come per i sistemi a un grado di libertà, non siamo interessati alla soluzione banale $\underline{x_0} = \underline{0}$ quindi imponiamo che il termine tra parentesi sia uguale a zero. Affinché ciò sia verificato occorre che il determinante della matrice (il termine tra parantesi è una matrice) sia nullo:

$$([M]\lambda^2 + [R]\lambda + [K]) = \emptyset \quad \rightarrow \quad \det([M]\lambda^2 + [R]\lambda + [K]) = \emptyset$$

Il polinomio caratteristico in questo caso (sistema con due gradi di libertà) è completo e risulta essere un polinomio di quarto grado. L'integrale generale diventa:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-\alpha_1 t}\left(a\left|x_1{}^{(1)}\right|\cos(\omega_1 t + \psi_{11} + \varphi_1)\right) + e^{-\alpha_2 t}\left(b\left|x_1{}^{(2)}\right|\cos(\omega_2 t + \psi_{12} + \varphi_2)\right) \\ x_2(t) = e^{-\alpha_1 t}\left(a\left|x_2{}^{(1)}\right|\cos(\omega_1 t + \psi_{21} + \varphi_1)\right) + e^{-\alpha_2 t}\left(b\left|x_2{}^{(2)}\right|\cos(\omega_2 t + \psi_{22} + \varphi_2)\right) \end{cases}$$

2. Soluzione attraverso il problema autovalori e autovettori = metto a sistema l'equazione di moto con un'identità ed effettuo un cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} [M]\underline{\ddot{x}} + [R]\underline{\dot{x}} + [K]\underline{x} = \emptyset \\ [M]\underline{\dot{x}} = [M]\underline{\dot{x}} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \underline{\dot{x}} = \underline{z} \\ \underline{\ddot{x}} = \underline{\dot{z}} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \underline{w} = \begin{Bmatrix} \underline{z} \\ \underline{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{x} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{\dot{w}} = \begin{Bmatrix} \underline{\dot{z}} \\ \underline{\dot{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\ddot{x}} \\ \underline{\dot{x}} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [M] \end{bmatrix}\underline{\dot{w}} + \begin{bmatrix} [R] & [K] \\ -[M] & 0 \end{bmatrix}\underline{w} = \emptyset$$

$$[B]\underline{\dot{w}} + [C]\underline{w} = \emptyset$$

Ipotizziamo ora una soluzione di primo tentativo: $\underline{w} = \underline{w_0}e^{\lambda t}$
$\underline{\dot{w}} = \lambda\underline{w_0}e^{\lambda t}$

Sostituendo:

$$[B]\lambda\underline{w_0}e^{\lambda t} + [C]\underline{w_0}e^{\lambda t} = \emptyset$$

$$([B]\lambda + [C])\underline{w_0}e^{\lambda t} = \emptyset$$

$$([B]\lambda + [C])\underline{w_0} = \emptyset$$

$$([B]^{-1}[B]\lambda + [B]^{-1}[C])\underline{w_0} = \emptyset$$

$$([I]\lambda + [B]^{-1}[C])\underline{w_0} = \emptyset$$

Moto forzato – forzante costante

Analizziamo ora la risposta di un moto forzato. In questo caso l'equazione di partenza è la seguente:

$$[M]\underline{\ddot{x}} + [R]\underline{\dot{x}} + [K]\underline{x} = \underline{F}$$

La forzante può essere di diversi tipi:
- Costante $\underline{F} = \underline{P}$
- Armonica
- Periodica che può essere vista come sommatoria di forzanti armoniche
- Generiche (non periodiche o randomiche)

Iniziamo a studiare il caso in cui la forzante sia costante $\underline{F} = \underline{P}$. In questo caso la soluzione di primo tentativo risulta essere anch'essa una costante quindi:

$$\underline{x} = \underline{x_0}$$
$$\underline{\dot{x}} = \underline{0}$$
$$\underline{\ddot{x}} = \underline{0}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione di moto del sistema di ottiene:

$$[K]\underline{x_0} = \underline{P}$$

La soluzione $\underline{x_0}$ può essere facilmente ricavata invertendo la matrice di rigidezza:

$$\underline{x_0} = [K]^{-1}\underline{P}$$

Moto forzato – forzante sinusoidale

Se invece la forzante ha una natura sinusoidale $\underline{F} = F_0 \cos(\Omega t) = F_0 e^{i\Omega t}$ la soluzione di primo tentativo risulta essere:

$$\underline{x} = \underline{x_0} e^{i\Omega t}$$
$$\underline{\dot{x}} = i\Omega \underline{x_0} e^{i\Omega t}$$
$$\underline{\ddot{x}} = -\Omega^2 \underline{x_0} e^{i\Omega t}$$

Che sostituendoli nell'equazione di moto del sistema si ottiene:

$$[M]\underline{\ddot{x}} + [R]\underline{\dot{x}} + [K]\underline{x} = \underline{F}$$

$$-[M]\Omega^2 \underline{x_0} e^{i\Omega t} + [R]i\Omega \underline{x_0} e^{i\Omega t} + [K]\underline{x_0} e^{i\Omega t} = \underline{F_0} e^{i\Omega t}$$

$$(-[M]\Omega^2 + [R]i\Omega + [K])\underline{x_0} e^{i\Omega t} = \underline{F_0} e^{i\Omega t}$$

$$(-[M]\Omega^2 + [R]i\Omega + [K])\underline{x_0} = \underline{F_0}$$

$$[A]\underline{x_0} = \underline{F_0}$$

In questo specifico caso la pulsazione è nota, è non omogena ed è complessa, al contrario invece dell'equazione ottenuta per il calcolo delle frequenze proprie e dei modi di vibrare del sistema. Dunque la soluzione $\underline{x_0}$ può essere ricavata invertendo la matrice $[A]$ e moltiplicandola per $\underline{F_0}$:

$$\underline{x_0} = [A]^{-1}\underline{F_0}$$

Partizione

Il sistema generico che si ottiene dopo aver ricavato tutti i legami cinematici e aver scritto le forme di energia in funzione delle variabili indipendenti è il seguente:

$$[M]\underline{\ddot{z}} + [R]\underline{\dot{z}} + [K]\underline{z} = \underline{Q}$$

A questo punto possiamo operare la partizione e dunque ricordando che le matrici possono essere scritte nel seguente modo e che il vettore delle variabili indipendenti e quello delle forze esterne attive agenti sul sistema possono essere riscritti come segue:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LV}] \\ [M_{VL}] & [M_{VV}] \end{bmatrix} \qquad [R] = \begin{bmatrix} [R_{LL}] & [R_{LV}] \\ [R_{VL}] & [R_{VV}] \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LV}] \\ [K_{VL}] & [K_{VV}] \end{bmatrix} \qquad \underline{z} = \begin{Bmatrix} \underline{z_L} \\ \underline{z_V} \end{Bmatrix} \qquad \underline{Q} = \begin{Bmatrix} \underline{Q_L} \\ \underline{Q_V} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LV}] \\ [M_{VL}] & [M_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\ddot{z}_L} \\ \underline{\ddot{z}_V} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [R_{LL}] & [R_{LV}] \\ [R_{VL}] & [R_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\dot{z}_L} \\ \underline{\dot{z}_V} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LV}] \\ [K_{VL}] & [K_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{z_L} \\ \underline{z_V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Q_L} \\ \underline{Q_V} \end{Bmatrix}$$

Il sistema generico può dunque essere riscritto come un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} [M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L} + [R_{LL}]\underline{\dot{z}_L} + [K_{LL}]\underline{z_L} = \underline{Q_L} - [M_{LV}]\underline{\ddot{z}_V} - [R_{LV}]\underline{\dot{z}_V} - [K_{LV}]\underline{z_V} \\ \underline{Q_V} = [M_{VL}]\underline{\ddot{z}_L} + [R_{VL}]\underline{\dot{z}_L} + [K_{VL}]\underline{z_L} + [M_{VV}]\underline{\ddot{z}_V} + [R_{VV}]\underline{\dot{z}_V} + [K_{VV}]\underline{z_V} \end{cases}$$

Calcolo delle pulsazioni e delle frequenze proprie

A questo punto per calcolare le frequenze proprie prendo la prima delle due equazioni che costituiscono il sistema e nello specifico la prendo non forzata e non smorzata e per un sistema libero ($\underline{z_V} = \underline{0}$) ottenendo dunque:

$$[M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L} + [K_{LL}]\underline{z_L} = \underline{0}$$

Propongo una soluzione del tipo:

$$\underline{z_L} = \underline{z_{L0}}e^{i\omega t}$$
$$\underline{\dot{z}_L} = i\omega \underline{z_{L0}}e^{i\omega t}$$
$$\underline{\ddot{z}_L} = -\omega^2 \underline{z_{L0}}e^{i\omega t}$$

$e^{i\omega t}$ posso mandarlo via perché è un termine sempre positivo

Sostituisco queste soluzioni nell'equazione non forzata e non smorzata:

$$[M_{LL}](-\omega^2 \underline{z_{L0}}e^{i\omega t}) + [K_{LL}]\underline{z_{L0}}e^{i\omega t} = 0$$

$$(-\omega^2[M_{LL}] + [K_{LL}])\underline{z_{L0}}e^{i\omega t} = 0$$

Ho dunque due soluzioni:

- Soluzione banale: $\underline{z_{L0}} = 0 \rightarrow$ non ci interessano soluzioni banali
- Soluzione non banale: $-\omega^2[M_{LL}] + [K_{LL}] = 0$

  $$[A] = -\omega^2[M_{LL}] + [K_{LL}]$$

  Ottengo così un'equazione algebrica lineare di grado 2 parametrica in ω. Ricordiamo che A è una matrice dunque per poter risolvere questa equazione e trovarne gli zeri occorre annullare il suo determinante. In questo modo si ricava ω_1 e ω_2. Ho così ricavato le due pulsazioni proprie del sistema. Per ricavare le frequenze proprie associate si procede nel seguente modo:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \qquad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

Calcolo dei modi di vibrare del sistema

Per ricavare i modi di vibrare del sistema associati alla pulsazione ω_i procedo nel seguente modo. Sostituisco ω_i nella seguente equazione:

$$(-{\omega_i}^2[M_{LL}] + [K_{LL}])\underline{z_{L0}}e^{i\omega t} = 0$$

$$(-{\omega_i}^2[M_{LL}] + [K_{LL}])\underline{z_{L0}} = 0$$

Anche in questo caso ho semplificato il termine esponenziale in quanto sempre positivo. Si ottiene dunque un sistema indeterminato le cui equazioni sono combinazioni lineari e quindi sono linearmente dipendenti le une dalle altre. Dando ora valore 1 a una delle componenti di $\underline{z_{L0}}$ si ricava $\underline{z_{L0}}^{(i)}$ cioè il modo di vibrare associato alla i-esima frequenza propria del sistema

Funzione di risposta in frequenza da coppia

Considero la prima equazione del sistema ottenuta in precedenza con la partizione:

$$[M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L} + [R_{LL}]\underline{\dot{z}_L} + [K_{LL}]\underline{z_L} = \underline{Q_L} - [M_{LV}]\underline{\ddot{z}_V} - [R_{LV}]\underline{\dot{z}_V} - [K_{LV}]\underline{z_V}$$

Impongo $\underline{\ddot{z}_V} = \underline{\dot{z}_V} = \underline{z_V} = \underline{0}$ e modulo della coppia uguale a 1: $C_0 = 1$. Dunque, elimino dall'equazione sopra scritto tutti contributi dovuti a $\underline{z_V}$:

$$[M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L} + [R_{LL}]\underline{\dot{z}_L} + [K_{LL}]\underline{z_L} = C_0 e^{i\Omega t} = \underline{b} e^{i\Omega t}$$

Dato che impongo che $\underline{z_L} = \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}$

$$\underline{\dot{z}_L} = i\Omega \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}$$

$$\underline{\ddot{z}_L} = -\Omega^2 \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}$$

Ottengo il seguente sistema:

$$[M_{LL}](-\Omega^2 \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}) + [R_{LL}] i\Omega \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} + [K_{LL}]\underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} = \underline{b} e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 [M_{LL}] + [R_{LL}] i\Omega + [K_{LL}])\underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} = \underline{b} e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 [M_{LL}] + [R_{LL}] i\Omega + [K_{LL}])\underline{z_{L0}} = \underline{b}$$

$$[A]\underline{z_{L0}} = \underline{b}$$

Da questa equazione posso ricavare $\underline{z_{L0}} = [A]^{-1}\underline{b}$ cioè un vettore di numeri complessi i cui moduli rappresentano le funzioni di trasferimento dell'ampiezza di vibrazioni di oscillazione con forzamento C. Il modulo della componente della i-esima riga di $\underline{z_{L0}}$ è la funzione di trasferimento in ampiezza del i-esimo grado di libertà:

$$\underline{z_{L0}} = \begin{bmatrix} FRF_{C\rightarrow gdl1} \\ FRF_{C\rightarrow gdl2} \end{bmatrix}$$

Funzione di risposta in frequenza da forza

Considero la prima equazione del sistema ottenuta in precedenza con la partizione:

$$[M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L} + [R_{LL}]\underline{\dot{z}_L} + [K_{LL}]\underline{z_L} = \underline{Q_L} - [M_{LV}]\underline{\ddot{z}_V} - [R_{LV}]\underline{\dot{z}_V} - [K_{LV}]\underline{z_V}$$

Impongo $\underline{\ddot{z}_V} = \underline{\dot{z}_V} = \underline{z_V} = \underline{0}$ e modulo della forza uguale a 1: $F_0 = 1$. Dunque, elimino dall'equazione sopra scritto tutti contributi dovuti a $\underline{z_V}$:

$$[M_{LL}]\underline{\ddot{z}_L} + [R_{LL}]\underline{\dot{z}_L} + [K_{LL}]\underline{z_L} = F_0 e^{i\Omega t} = \underline{b} e^{i\Omega t}$$

Dato che impongo che $\underline{z_L} = \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}$

$$\underline{\dot{z}_L} = i\Omega \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}$$

$$\underline{\ddot{z}_L} = -\Omega^2 \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}$$

Ottengo il seguente sistema:

$$[M_{LL}](-\Omega^2 \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}) + [R_{LL}] i\Omega \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} + [K_{LL}] \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} = \underline{b} e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 [M_{LL}] + [R_{LL}] i\Omega + [K_{LL}]) \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} = \underline{b} e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 [M_{LL}] + [R_{LL}] i\Omega + [K_{LL}]) \underline{z_{L0}} = \underline{b}$$

$$[A] \underline{z_{L0}} = \underline{b}$$

Da questa equazione posso ricavare $\underline{z_{L0}} = [A]^{-1} \underline{b}$ cioè un vettore di numeri complessi i cui moduli rappresentano le funzioni di trasferimento dell'ampiezza di vibrazioni di oscillazione con forzamento F. Il modulo della componente della i-esima riga di $\underline{z_{L0}}$ è la funzione di trasferimento in ampiezza del i-esimo grado di libertà:

$$\underline{z_{L0}} = \begin{bmatrix} FRF_{F \to gdl1} \\ FRF_{F \to gdl2} \end{bmatrix}$$

Funzione di risposta in frequenza da vincolo imposto

Considero la prima equazione del sistema ottenuta in precedenza con la partizione:

$$[M_{LL}] \underline{\ddot{z}_L} + [R_{LL}] \underline{\dot{z}_L} + [K_{LL}] \underline{z_L} = \underline{Q_L} - [M_{LV}] \underline{\ddot{z}_V} - [R_{LV}] \underline{\dot{z}_V} - [K_{LV}] \underline{z_V}$$

Impongo $\underline{z_{V0}} = 1$ e $\underline{Q_L} = \underline{0}$. Imponiamo che

$$\underline{z_L} = \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} \qquad \underline{z_V} = e^{i\Omega t}$$

$$\underline{\dot{z}_L} = i\Omega \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} \qquad \underline{\dot{z}_V} = i\Omega e^{i\Omega t}$$

$$\underline{\ddot{z}_L} = -\Omega^2 \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} \qquad \underline{\ddot{z}_V} = -\Omega^2 e^{i\Omega t}$$

Dunque si semplifica l'equazione sopra scritta e si ottiene:

$$[M_{LL}](-\Omega^2 \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t}) + [R_{LL}] i\Omega \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} + [K_{LL}] \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} = -[M_{LV}](-\Omega^2 e^{i\Omega t}) - [R_{LV}] i\Omega e^{i\Omega t} - [K_{LV}] e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 [M_{LL}] + [R_{LL}] i\Omega + [K_{LL}]) \underline{z_{L0}} e^{i\Omega t} = (\Omega^2 [M_{LV}] - [R_{LV}] i\Omega - [K_{LV}]) e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 [M_{LL}] + [R_{LL}] i\Omega + [K_{LL}]) \underline{z_{L0}} = (\Omega^2 [M_{LV}] - [R_{LV}] i\Omega - [K_{LV}])$$

$$[A] \underline{z_{L0}} = \underline{b}$$

Da questa equazione posso ricavare $\underline{z_{L0}} = [A]^{-1} \underline{b}$ cioè un vettore di numeri complessi i cui moduli rappresentano le funzioni di trasferimento dell'ampiezza di vibrazioni di oscillazione con forzamento z. Il modulo della componente della i-esima riga di $\underline{z_{L0}}$ è la funzione di trasferimento in ampiezza del i-esimo grado di libertà:

$$\underline{z_{L0}} = \begin{bmatrix} FRF_{z \to gdl1} \\ FRF_{z \to gdl2} \end{bmatrix}$$