ESPRESSIONE DELLA MISURA E DELLE INCERTEZZA

Introduzione

Una misura è un'informazione costituita da:

1. Numero
2. Incertezza
3. Unità di misura

Analizziamo ora singolarmente ciascun elemento.

1 - Il numero

Nello scrivere un numero è importante considerare il giusto numero di cifre significative. Tale concetto è legato all'approssimazione con cui si sceglie di rappresentare una grandezza. L'ultima cifra significativa di un numero è quella incerta. Ricordiamo che gli zeri dopo il numero sono da considerare come cifre significative, al contrario se gli zeri sono prima del numero non vengono considerate nel conteggio delle cifre significative poiché non aggiungono informazione al valore stesso. È inoltre necessario cercare di evitare di scrivere dei numeri come "5000" perché tale espressione non permette di capire se gli zeri indicano un'approssimazione o meno; in questo caso sarebbe necessario ricorre alla notazione scientifica così da evidenziare in modo chiaro e inequivocabile le cifre significative considerate. Definiamo dunque l'arrotondamento come un metodo che permette di semplificare un numero seguendo due semplici regole:

1. le cifre da 0 a 4 comportano un arrotondamento sulla cifra precedente della stessa unità
2. dal 5 al 9 la cifra precedente è arrotondata all'unità superiore

2 - L'incertezza

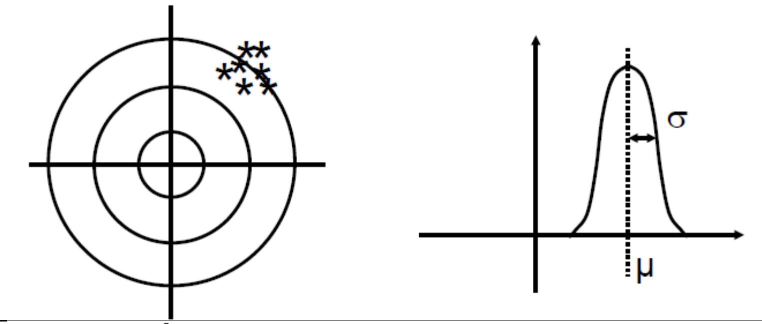
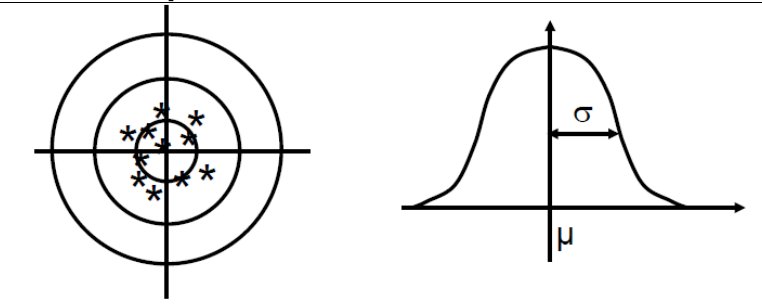
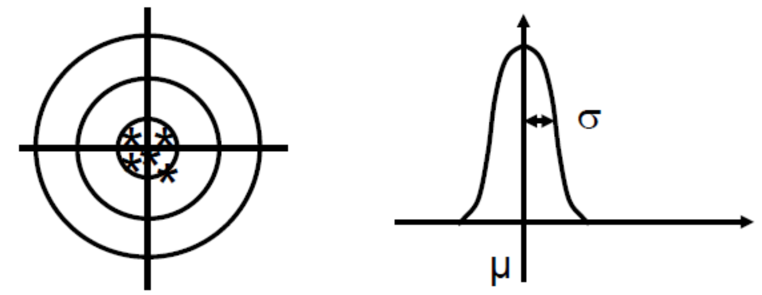
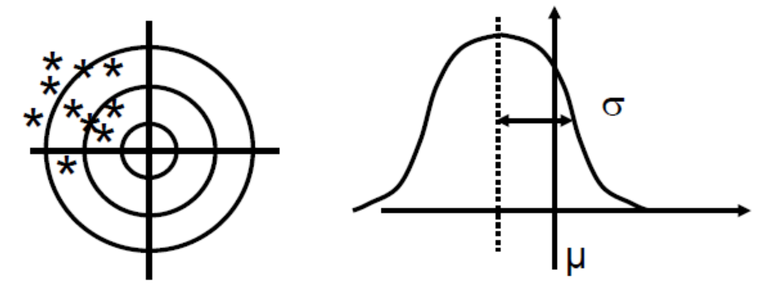
L'incertezza è fondamentale perché è il valore che indica la dispersione dei dati, in qualche modo intuitivamente, indica anche qual è il livello di affidabilità di una misura. Si definisce incertezza un numero associato al risultato di una misurazione, che esprime la dispersione dei valori che possono ragionevolmente essere attribuiti al misurando (Es: il gps non fornisce una posizione precisa ma un raggio, presenta dell'incertezza). È importante sottolineare che il concetto di incertezza è diverso e non sostituibile dal termine errore. Analizziamo ora questa differenza mettendo in evidenza due diversi approcci:

- Approccio classico = secondo tale approccio si definiva l'errore come variazione tra il valore vero della misura e la lettura effettuata. Il valore vero non è però noto, esiste solo convenzionalmente e dunque ne consegue che l'errore non è conoscibile. Sempre secondo questa teoria classica l'errore era costituito da due componenti:
  - Casuale = errore dovuto alla variazione imprevedibile o casuale, nel tempo o nello spazio, delle grandezze d'influenza. Tale errore dà luogo a variazioni in osservazioni ripetute sul misurando. Non è possibile correggerlo ma lo si può ridurre aumentando il numero di osservazioni
  - Sistematica = se una grandezza d'influenza produce un effetto identificato in un errore sistematico, tale effetto può essere quantificato e corretto apportando una correzione.
- Approccio GUM = secondo tale approccio non si può parlare di errore, perché non si conosce il valore vero; si può solo affermare che il valore vero si trova all'interno di un intervallo di valori, con un certo livello di probabilità. Dall'errore si passa dunque al concetto di stima accompagnata da un intervallo di incertezza. Così come per l'errore, anche per l'incertezza si distinguono le due componenti casuale e sistematica. Generalmente però quando si parla di incertezza, secondo la normativa, si fa riferimento solo alla parte random, casuale. L'effetto sistematico va quindi trascurato perché si presuppone di avere un'ampia conoscenza dello strumento utilizzato per la misura e dunque si dà per scontato che, se si mette in evidenza un effetto sistematico, questo vada corretto prima delle misure, e tale correzione sarà affetta anch'essa da un'incertezza.

Distinguiamo ora l'accuratezza (da usare al posto dell'espressione *precisione*) dall'incertezza definendola come l'accordo tra il risultato di una misura ed il valore, convenzionalmente vero, del misurando. Tale valore risulta dunque essere un concetto qualitativo. Rispetto all'incertezza è importante sottolineare che:

- Solo le definizioni hanno incertezza nulla
- L'incertezza di una misurazione non può essere ridotta a piacimento: esistono dei limiti, economici, fisici e tecnologici, a questo processo. In questo caso di parla di incertezza intrinseca.

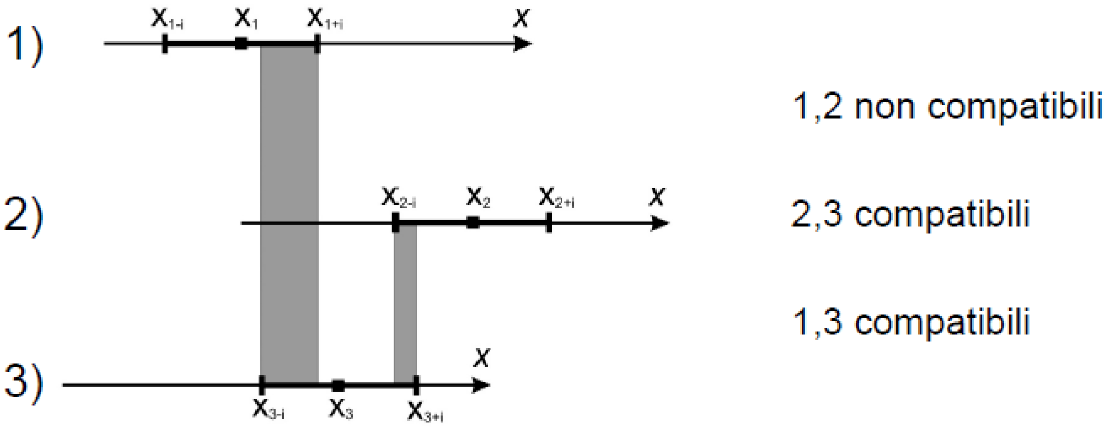
Analizziamo ora 4 diversi casi:

	In questo esempio la misura è: • Poco accurata = si ha un effetto sistematico non trascurabile • Poco dispersa poiché i punti sono tutti vicini
	In questo esempio la misura è: • Molto accurata • Molto dispersa
	In questo esempio la misura è: • Molto accurata • Poco dispersa
	In questo esempio la misura è: • Poco accurata • Molto dispersa

L’incertezza può essere il risultato di diversi fattore; le fonti di incertezza in una misurazione sono numerose, ma le più comuni sono:

- Non costanza dello stato del sistema tra le misurazioni
- Incompleta definizione del sistema
- Presenza di effetti strumentali

Passando dal concetto di errore a quello di stima accompagnata da un intervallo di incertezza occorre sostituire anche il concetto di uguaglianza con il concetto di compatibilità cioè una condizione che si verifica quando le fasce di valore assegnate in diverse occasioni come misura dello stesso parametro nello stato hanno almeno un elemento in comune. Affinché diverse misure siano compatibili è necessario e sufficiente che esista un elemento comune a tutte le fasce di valore: un insieme di misure che soddisfi questa condizione si dice mutuamente compatibile. La compatibilità non è una proprietà transitiva come invece lo è l'uguaglianza.



Oltre all'incertezza occorre definire l'incertezza tipo cioè l'incertezza del risultato di una misurazione espressa come scarto tipo. Cerchiamo ora di capire come si ottiene l'incertezza, analizzando due metodi diversi che portano allo stesso risultato:

- Valutazione dell'incertezza di categoria A = metodo di valutazione dell'incertezza per mezzo dell'analisi statistica di serie di osservazioni
- Valutazione dell'incertezza di categoria B = metodo di valutazione dell'incertezza con mezzi diversi dall'analisi statistica di serie di osservazioni

Lo scopo della classificazione in categoria A e categoria B è quello di indicare le due diverse modalità di valutazione delle compatibilità dell'incertezza ed ha unicamente utilità didattica. La classificazione non sottintende l'esistenza di una differenza nella natura delle componenti risultati dai due tipi di valutazione. Entrambi i tipi di valutazione sono basati su distribuzioni di probabilità e le componenti risultanti da ambedue i metodi sono qualificate mediante varianze o scarti tipo. Ciò che occorre tenere a mente è che nel caso A l'incertezza è ottenuta da una densità di probabilità derivata da una distribuzione di frequenza osservata mentre nel caso B l'incertezza è ottenuta da una densità di probabilità ipotizzata sulla base del grado di credenza nel verificarsi di un evento (probabilità soggettiva). Se si è in presenza di misure indirette è necessario definire l'incertezza combinata.
Analizziamo ora più approfonditamente i due metodi di stima dell'incertezza.

Incertezza di tipo A

Questo primo metodo consiste nel valutare l'incertezza per mezzo dell'analisi statistica di serie di osservazioni. Solitamente si fa riferimento ad una distribuzione gaussiana dei valori delle misure effettuate in corrispondenza di un determinato valore di riferimento o di una t-Student se il numero di campioni è modesto. La miglior stima del valore medio atteso μ_x di una grandezza x che varia casualmente e della quale sono state ottenute N osservazioni indipendentei x_k nelle stesse condizioni sperimentali è il valore medio $\bar{x}$ delle N osservazioni:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

Le singole osservazioni x_k differiscono a causa di variazioni casuali delle grandezze d'influenza, o effetti aleatori. La varianza sperimentale delle osservazioni, che stima la varianza σ^2 della distribuzione di probabilità di x_k, cioè la varianza della popolazione è data da (n è di ripetizioni della misura):

$$S_p^2 = S^2(x_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$$

Questa stima della varianza e la sua radice quadrata positiva denominata scarto tipo sperimentale, caratterizzano la variabilità dei valori osservati x_k cioè la loro dispersione intorno alla media. La radice quadrata della varianza definisce la deviazione standard (o scarto tipo), S_p che ha unità di misura omogena con la media. È importante tener presente che:

- Per stimare l'incertezza di tipo A si fanno N misure ripetute e si calcola la deviazione standard delle misure ripetute cioè S_p
- La deviazione standard delle misure ripetute S_p è una stima dell'incertezza standard dello strumento e varrà anche nel caso di nuove misure future. In altre parole, le N misure fatte servono per caratterizzare l'incertezza dello strumento
- Quando si userà quello stesso strumento per fare una nuova misura senza ripetizioni il valore dell'incertezza sarà proprio S_p
- Quando si userà quello stesso strumento per fare una nuova misura ripetendola n volte, l'incertezza sarà inferiore, grazie al fatto che si faranno n medie. L'incertezza di una misura ripetuta n volte è la deviazione standard della media S_m e vale:

$$S_m = \frac{S_p}{\sqrt{n}}$$

  La miglior stima della varianza della media sarà quindi data dal quadrato della deviazione standard della media:

$$S_m^2 = S^2(\bar{x}) = \frac{S_p^2}{n} = \frac{S^2(x_k)}{n}$$

La varianza sperimentale della media $S^2(\bar{x})$ e lo scarto tipo sperimentale della media $S(\bar{x})$ quantificano quanto bene $\bar{x}$ stimi il valore atteso μ_x di x_k ed entrambi possono essere adottati come valutazione quantitativa dell'incertezza di $\bar{x}$. Ricapitolando dunque se si fa una misura singola l'incertezza è la deviazione standard, se invece si fanno più misure l'incertezza è la deviazione standard della media.
Al crescere delle ripetizioni della misura diminuisce l'incertezza associata alla misura media. Nell'incertezza di tipo A la misura finale è data dalla media e la sua incertezza è lo scarto tipo della media stessa:

$$x = \bar{x} \pm \frac{S_p}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm S_m$$

Riassunto simbologia:

- μ_x valore atteso
- $\bar{x}$ valor medio
- N numero di osservazioni
- n numero di volte che una misura è stata ripetuta
- x_k valori delle singole osservazioni
- S_p deviazione standard delle misure ripetute= scarto tipo
- S_p^2 varianza (sperimentale) delle osservazioni = varianza della popolazione
- S_m deviazione standard della media
- S_m^2 varianza (sperimentale) della media

Incertezza di tipo B

Questo secondo metodo consiste nel valutare l'incertezza con mezzi diversi dall'analisi statistica di serie di osservazioni. Per una stima x_i della grandezza d'ingresso x_i che non è stata ottenuta da osservazioni ripetute, la varianza stimata $u^2(x_i)$ o l'incertezza tipo $u(x_i)$ sono valutate per mezzo di un "giudizio scientifico" basato su tutte le informazioni disponibili sulla possibile variabilità di x_i. Per determinare tale incertezza si possono usare diverse informazioni:

- Dati di misurazioni precedenti
- Esperienza o conoscenza generale del comportamento e delle proprietà del materiale e strumenti di interesse
- Specifiche tecniche del costruttore

- Dati forniti in certificati di taratura da altri
- Incertezze assegnare a valori di riferimento presi da manuali

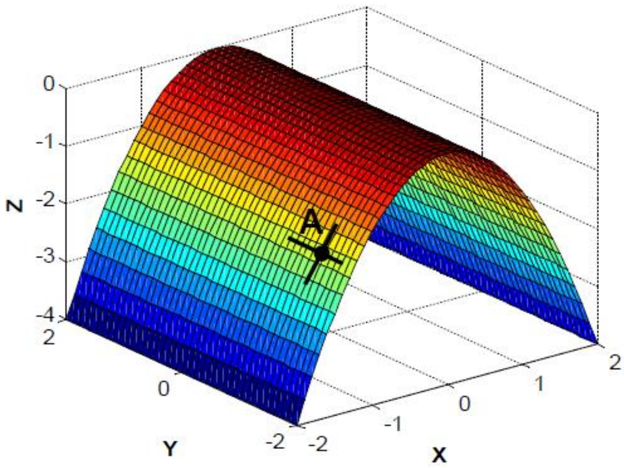
L'uso dell'insieme di informazioni disponibili per una valutazione di categoria B dell'incertezza tipo richiede capacità di approfondimento basata sull'esperienza e su conoscenza generali. Tutte le valutazioni di tipo B hanno per definizione un numero infinito di gradi di libertà.
Un esempio di incertezza di tipo B è lo strumento a display digitale. In questo caso ad esempio lo strumento può fornire solo numeri interi e dunque nell'intervallo tra 10.5 e 11,5 tutti i valori sono equamente probabili; la funzione distribuzione di probabilità è una costante nell'intervallo e nulla fuori da esso. Dal momento che nessun valore ha probabilità di uscita maggiore degli altri la distribuzione di probabilità è detta rettangolare. La densità di probabilità sarà $f(x) = \frac{1}{2}a$ nell'intervallo, dove a è la semiampiezza dell'intervallo stesso, e 0 fuori da esso. Lo scarto tipo, o deviazione standard, se la distribuzione è rettangolare, varrà:

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Se la distribuzione di probabilità è di un'altra forma, la deviazione standard sarà calcolabile mediante funzioni diverse.

Incertezza combinata

Quotidianamente potrebbe essere richiesto, ed è molto utile, combinare i tipi di incertezza (ad esempio se si conosce l'incertezza dello spazio e quello del tempo è necessario combinarle per conoscere l'incertezza della velocità). Iniziamo ad affrontare questo problema con un approccio intuitivo. Ipotizziamo di essere su una montagna e presupponiamo di voler conoscere la nostra quota Z conoscendo le nostre coordinate mediante un GPS e la funzione $Z = Z(X, Y)$. È possibile affermare che:



- Se si misura in modo poco accurato la coordinata Y la misura di Z varia notevolmente poiché si "sale" o si "scende" dalla montagna
- Se si misura in modo poco accurato la coordinata X la misura di Z non varia poiché si rimane sempre alla stessa quota

Si può dunque concludere che l'incertezza su X e su Y ha diversi effetti sull'incertezza della Z. Quindi in generale diverse incertezze influiscono diversamente il valore dell'incertezza finale. Per determinare il "peso" che ogni incertezza ha su quella finale è necessario utilizzare la formula di propagazione dell'incertezza che vale sole se è possibile fare l'ipotesi che non ci sia correlazione tra le variabili che si considerano come ingressi. Cioè l'incertezza delle variabili deve essere disgiunta perché altrimenti si dovrebbero tenere conto dei valori incrociati (la covarianza). Tale legge afferma che l'incertezza combinata è pari alla radice della sommatoria in quadratura tra i termini pesati delle incertezze in ingresso:

$$i = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 * i^2(x_i)}$$

<u>Esempio propagazione dell'incertezza</u>: determinare l'incertezza della potenza sapendo l'incertezza del resistore e quella della tensione

$$\begin{cases} R = 1250\ \Omega \pm 5\% \\ V = 55V \pm 2V \end{cases} \qquad W = \frac{V^2}{R} = 2{,}42\ W$$

Per prima cosa si calcolano le singole incertezze:

$$\begin{cases} i_R = 1250 * 0{,}05 = 62{,}5\ \Omega \\ i_V = 2V \end{cases}$$

Si calcolano poi le derivate parziali della potenza rispetto le singole variabili:

$$\frac{\partial W}{\partial R} = -\frac{V^2}{R^2} = 0{,}001936$$

$$\frac{\partial W}{\partial V} = \frac{2V}{R} = 0{,}088$$

Si calcola ora l'incertezza combinata applicando la formula:

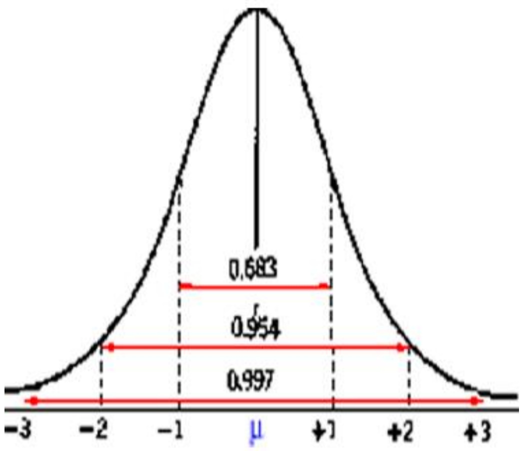
$$i = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 * i^2(x_i)} = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial R}\right)^2 * {i_R}^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial V}\right)^2 * {i_V}^2} = 0{,}21\ W$$

Si scrive il risultato finale:

$$W = 2{,}42 \pm 0{,}21\ W$$

Incertezza estesa

L'incertezza combinata, o più in generale l'incertezza, fornisce un indice sulla dispersione dei dati; non si ha però mai la certezza di aver preso il campo corretto e quindi si tende ad allargarlo quel minimo indispensabile così da poter considerare una maggiore dispersione di dati, considerando anche i casi meno probabili. Grazie a questo metodo si ha una maggiore confidenza del fatto che nell'intervallo considerato possa cadere quel dato valore. Si parla dunque di incertezza estesa come la grandezza che definisce, intorno al risultato di una misurazione, un intervallo che ci si aspetta comprendere una frazione rilevante della distribuzione di valori ragionevolmente attribuibili al misurando. L'incertezza estesa di ottiene moltiplicando l'incertezza tipo per un opportuno fattore di ricopertura. Lo scopo dell'incertezza estesa è dunque la costruzione di un intervallo di valori che contenga il misurando con la confidenza desiderata. Un livello di confidenza del 95% significa che, ripetendo 100 volte n misurazioni (n è costante), 95 intervalli su 100 costruiti come [media ± fattore di copertura * deviazione standard della media] contengono il misurando.

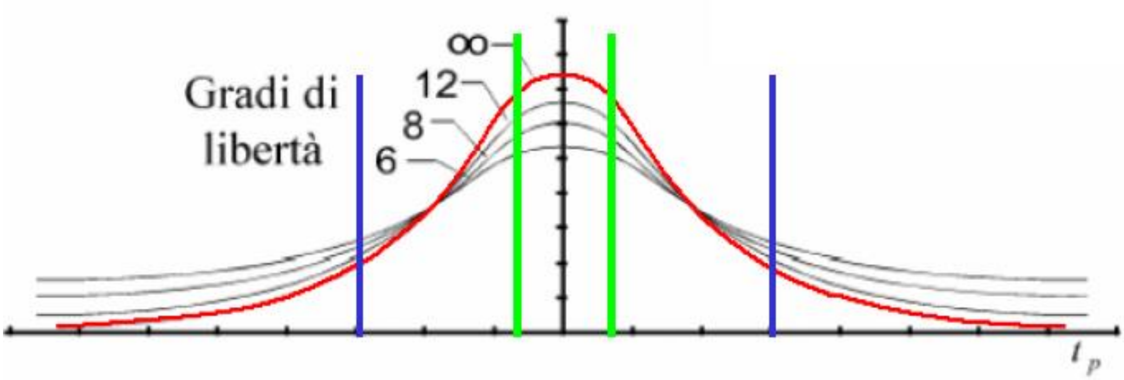


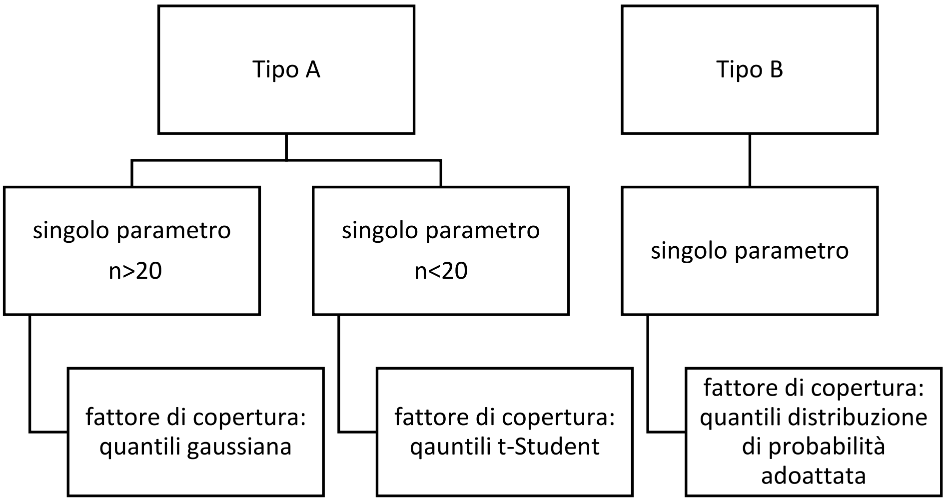
In caso di incertezza A, come fattori di copertura si utilizzano gli opportuni quantili della distribuzione gaussiana. ($n > 20$), mentre nella t-Student si tiene conto del fatto che è fenomeno gaussiana non conosciuto in maniera precisa ($n < 20$). Tendenzialmente si usa la gaussiana perché moltissimo fenomeni fisici si distribuiscono con questo andamento. In generale si avrà che:

- 68% delle letture cade nell'intervallo centrato su μ e di estremi $\mu \pm \sigma$
- 95% delle letture cade nell'intervallo centrato su μ e di estremi $\mu \pm 2\sigma$
- 99.7% delle letture cade nell'intervallo su μ e di estremi $\mu \pm 3\sigma$

In caso di incertezza B, come fattori di copertura si utilizzano gli opportuni quantili relativi alla distribuzione di probabilità adottata.
In caso di incertezza estesa è obbligatorio indicare, associato alla misura, il livello di confidenza, il fattore di copertura e la distribuzione probabilistica utilizzata. Esempio:
misura diretta (incertezza A): $10{,}0 \pm 0{,}5\ m$
misura con incertezza estesa: $10{,}0 \pm 0{,}98\ m\ (LC\ 95\%, fc\ 1{,}96, distribuzione\ gaussiana)$
Se si è in presenza di un'incertezza combinata, il fattore di copertura si sceglie nel seguente modo: per prima cosa si ipotizza di considerare il caso, molto diffuso, in cui non si abbiano

ingressi con incertezza stimata con pochi gradi. (Ricordiamo che di solito se si fanno 20 o 30 misurazioni si conosce il fenomeno abbastanza bene e quindi si utilizza l'andamento gaussiano). Ipotizziamo quindi di avere un elevato numero di gradi di libertà (almeno una ventina di prove) per gli ingressi con incertezza A oppure ipotizziamo di avere alcuni ingressi con incertezza B poiché queste avranno finiti gradi di libertà. In questo caso l'utilizzo della gaussiana per il calcolo del fattore di copertura dell'incertezza combinata fornisce risultati più che accettabili.
A pari ampiezza di intervallo sull'ascissa la gaussiana ha un'area sottesa maggiore di qualunque t-Student. La t-Student è caratterizzata dal numero di gradi di libertà v. Per v che tende all'infinito la t-Student tende alla distruzione gaussiana.





Metodo Monte Carlo

Quando non si hanno sufficienti dati sperimentali o il fenomeno risulta essere troppo complesso per poter essere risolto con la teoria di propagazione dell'incertezza si può ricorre al metodo Monte Carlo. Tale metodo serve dunque per stimare l'incertezza combinata nel caso in cui le ipotesi per l'applicazione della propagazione dell'incertezza non siano verificate. Concettualmente il metodo si basa sulla possibilità di eseguire, utilizzando numeri estratti a caso (numeri casuali), un campionamento di una distribuzione di probabilità assegnata, F(X)=Y; ossia sulla possibilità di generare una sequenza di eventi X_1, X_2, ..., X_n, ..., distribuiti secondo la F(X). In pratica, invece di servirsi di un campione di numeri effettivamente estratti a caso, si ricorre a una sequenza di numeri ottenuti con un processo iterativo ben determinato; tali numeri vengono detti pseudo-casuali giacché, pur non essendo casuali, hanno proprietà statistiche analoghe a quelle dei veri numeri casuali. Analizziamo ora passo dopo passo la formulazione:

- Definizione della grandezza da misurare Y
- Definizione delle grandezze d'ingresso X_i da cui dipendere la grandezza Y
- Definire il modello che lega le grandezze X_i alla grandezza Y
- Assegnare alle grandezze in ingresso X_i una distribuzione di probabilità adeguata

Per la propagazione si deve:

- Definire un numero di iterazioni sufficientemente alto, almeno 10^6
- L'algoritmo Monte Carlo ad ogni iterazione seleziona, per ognuna delle grandezze d'ingresso, un valore random tra quelli definiti dalla corrispettiva distribuzione
- Ad ogni iterazione si determina un valore per la grandezza di uscita Y
- Alla fine delle iterazioni quello che si ottiene è la distribuzione di probabilità della grandezza Y

Ottenuta la distribuzione di probabilità della grandezza Y è possibile ottenere diversi risultati come la stima della media di Y, la stima della deviazione standard di Y e la stima del fattore di copertura necessario, dato un determinato valore di confidenza

3 – L'unità di misura

L'espressione *unità di misura* è un termine di riferimento, adottato per convenzione, per confrontare una grandezza con altre della stessa specie. Con l'espressione *sistema di unità di misura* si definisce l'insieme organico di definizioni di unità di misure pertinenti a grandezze di specie diverse tra loro collegate. Secondo l'attribuzione della specie si può associare ad ogni grandezza una specie: essa va intesa come una proprietà astratta, comune a tutte le grandezze considerate omogenee. Il termine di riferimento nell'ambito delle grandezze della stessa specie che costituisce l'unità di misura è il campione. I campioni (la tendenza attuale è di riferirli alle proprietà atomiche della materia) devono essere:

- Accurati: devono avere una piccola incertezza
- Accessibili
- Riproducibili
- Invariabili

Per convenzione non si definisce un campione per qualunque grandezza, ma si definiscono solo quelli strettamente indispensabili: si derivano così le altre grandezze dai campioni delle grandezze fondamentali. Non si definisce, ad esempio, un campione per la velocità, ma lo si definisce per lo spazio e per il termo. Nei sistemi di unità di misura è quindi possibile definire due tipi diversi di grandezza:

- Grandezze fondamentali = misurabili direttamente
- Grandezze derivate = ottenute in base alle relazioni che le legano alle fondamentali

Per convenzione occorre fissare quali sono le grandezze determinabili direttamente e in base a quali relazioni definire le grandezze derivate. Tale convenzione costituisce un sistema di unità di misura. Esistono diversi tipi di sistemi di unità di misura:

- Coerenti o sistemi di unità di misura assoluti = è un sistema che definisce in modo indipendente tra loro, solamente alcune unità di misura, che vengono dette di base o fondamentali. Esse vengono scelte in maniera opportuna e le altre unità di misura devono poter essere ricavare da quelle di base mediante leggi di coordinamento note. Le unità di misura ricavate da quelle base prendono il nome di unità di misura derivate. In Italia per legge, dal 1978 è stato adottato il Sistema Internazionale di unità di misura che un sistema di unità di misura coerente
- Non coerenti o sistemi di unità di misura = è un sistema che definisce un'unità di misura per ciascuna grandezza

Analizziamo ora brevemente le caratteristiche di un sistema di misura:

- Universale = accettato da tutti
- Stabile = i campioni devono essere legati a fenomeni della fisica inalterabili
- Accurato = quanto una specifica applicazione lo richieda
- Pratico
- Coerente =deve essere possibile esprime qualunque grandezza in funzione di quelle di base, senza ricorrere a costanti o coefficienti
- Uniforme = si deve poter ricavare il valore di un intervallo da due letture lungo una scala
- Decimale

Il Sistema Internazionale

Nel Sistema Internazionale sono definire 7 grandezze fondamentali (lunghezza, tempo, massa, temperatura, intensità di corrente elettrica, intensità luminosa e quantità di sostanza), 2 grandezze supplementari cioè definizioni di cui non esistono campioni e le grandezze derivate, ottenibili dalle fondamentali per mezzo si un'espressione monomia:

$$unità SI = m^{\alpha 1} kg^{\alpha 2} s^{\alpha 3} A^{\alpha 4} K^{\alpha 5} cd^{\alpha 6} mol^{\alpha 7} rad^{\alpha 8} sr^{\alpha 9}$$

Le due grandezze supplementari sono l'angolo piano e l'angolo solido. Il primo si misura in radiante cioè l'angolo piano compreso fra due raggi che, sulla circonferenza del cerchio, intercettano un arco di lunghezza pari a quella del raggio. Il secondo si misura in steradiante cioè l'angolo solido che, avendo il vertice al centro di una sfera, delimita sulla superficie di questa un'area pari a quella del quadrato di lato uguale al raggio della sfera. Nel sistema internazionali sono definiti i multipli e i sottomultipli fondamentali. Viene inoltre definito il decibel dB, fondamentale in molti tipi di misure. Il decibel viene introdotto per esprimere il rapporto tra due potenze P_1 e P_2; lo si definisce infatti come il dislivello di potenza. Se le due potenze sono il risultato di due tensione V_1 e V_2 applicate a due resistori R_1 e R_2 si può scrivere:

$$dB = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{\frac{V_2^2}{R_2}}{\frac{V_1^2}{R_1}} = 10 \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + 10 \log_{10} \frac{R_1}{R_2} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} + 10 \log_{10} \frac{R_1}{R_2}$$

$$se\ R_1 = R_2 \quad \rightarrow \quad dB = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1}$$

È importante sottolineare che le grandezze fondamentali del Sistema Internazionale hanno delle dipendenze tra loro.
Altri sistemi di riferimento sono quello Assoluto Anglosassone, quello Metrico Gravitazionale.

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza	Nome dell'unità di misura	Simbolo dell'unità di misura
lunghezza	l	metro	m
massa	m	kilogrammo	kg
tempo	t	secondo	s
corrente elettrica	I	ampere	A
temperatura	T	kelvin	K
quantità di sostanza	n	mole	mol
intensità luminosa	i_v	candela	cd