Analisi e Geometria 2

Prima prova in itinere 2014/2015

4 maggio 2015

Svolgimento della versione 1

1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (-3x - 4z, 5y, -4x + 3z)$.

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e provare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F; scrivere una matrice M rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e una matrice ortogonale P di passaggio.

c) Dare un'interpretazione geometrica dell'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $G(x, y, z) = \dfrac{1}{5} F(x, y, z)$.

Soluzione

a) La matrice che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

La matrice A è reale e simmetrica e quindi, per il Teorema Spettrale, è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) L'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ di A è $(\lambda - 5)^2(\lambda + 5) = 0$, dunque gli autovalori sono $\lambda_0 = 5$ (doppio), $\lambda_1 = -5$ (semplice).

L'autospazio $V_5 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ : \ A\mathbf{v} = 5\mathbf{v}\}$ è lo spazio (di dimensione 2) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \quad \text{cioè} \quad \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{cioè} \quad 2x + z = 0\,;$$

risulta quindi $V_5 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Per il Teorema Spettrale, l'autospazio V_{-5} è uno spazio (di dimensione 1) ortogonale all'autospazio V_5, quindi V_{-5} è la retta (per l'origine) ortogonale al piano di equazione $2x + z = 0$; risulta cioè $V_{-5} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Indichiamo con $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i vettori scelti come generatori di V_5 e sia $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ il generatore scelto per V_{-5}. Osservato che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali, una base ortogonale (non ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F è $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Si ottiene una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F normalizzando i vettori:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2, \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 \right) = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right) .$$

La matrice M che rappresenta F rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ e la matrice ortogonale P di passaggio sono:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} .$$

c) Riferendoci alla base di autovettori di F trovata sopra, l'applicazione lineare G è rappresentata dalla matrice diagonale $\frac{1}{5}M = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$. Infatti, per ogni $\mathbf{v}$ vettore del piano di equazione $2x + z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore 5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(5\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,,$$

mentre per ogni vettore sulla retta per l'origine ortogonale al piano di equazione $2x + z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore -5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(-5\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\,.$$

La trasformazione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è dunque la simmetria rispetto il piano di equazione $2x + z = 0$.

2. Data l'equazione differenziale $y'' - y' - 2y = \mathrm{e}^{2t}$,

a) scrivere la soluzione generale;

b) determinare la soluzione il cui grafico ha nell'origine $O(0,0)$ una tangente orizzontale.

Soluzione

a) *i.* Determiniamo la soluzione generale z dell'equazione differenziale omogenea $y'' - y' - 2y = 0$: l'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$; le funzioni $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t}$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$ sono dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea; l'integrale generale è quindi

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{-t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

ii. Cerchiamo una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione differenziale $y'' - y' - 2y = \mathrm{e}^{2t}$ seguendo il metodo di somiglianza; poiché 2 è una soluzione semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{2t}$; da

$$\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{2t} \ , \quad \tilde{y}'(t) = k(1+2t)\,\mathrm{e}^{2t} \ , \quad \tilde{y}''(t) = 2k(2+2t)\,\mathrm{e}^{2t} \ ,$$

sostituendo nell'equazione data si ottiene $k = 1/3$; una soluzione particolare è quindi

$$\tilde{y}(t) = \frac{t}{3}\,\mathrm{e}^{2t} \ .$$

iii. Per il Teorema di Struttura, la soluzione generale dell'equazione $y'' - y' - 2y = \mathrm{e}^{2t}$ è

$$y(t) = z(t) + \tilde{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{3}\,\mathrm{e}^{2t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) \ .$$

b) Si richiede di risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y' - 2y = \mathrm{e}^{2t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Considerata la soluzione generale trovata sopra e la sua derivata:

$$y(t) = A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{3}\,\mathrm{e}^{2t} \ , \quad y'(t) = 2A\,\mathrm{e}^{2t} - B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+2t}{3}\,\mathrm{e}^{2t}$$

le condizioni $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ portano al sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - B + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$ che ha come (unica) soluzione $\begin{cases} A = -\frac{1}{9} \\ B = \frac{1}{9} \end{cases}$, quindi la soluzione il cui grafico ha una tangente orizzontale nell'origine $O(0,0)$ è

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{3}\,\mathrm{e}^{2t} \ .$$

3. Sia f la funzione pari definita su $\mathbb{R}$, periodica di periodo 2π e definita su $[0,\pi]$ da $f(x) = 5 - 2\sin\frac{x}{2}$.
La serie di Fourier associata a f è

$$Sf(x) = 5 - \frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{(4n^2-1)\pi} \cos nx \,.$$

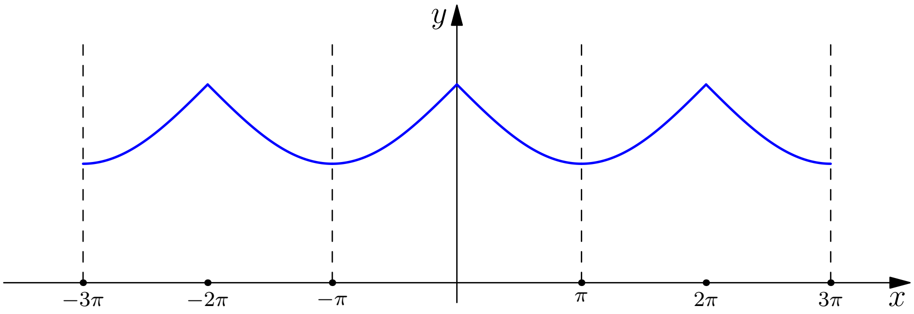
a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Dalla serie $Sf(x)$ data sopra dedurre quali siano i coefficienti di Fourier di f e si impostino poi i calcoli necessari per ottenerli.

c) Dopo aver giustificato la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, calcolarne la somma.

Soluzione

a) Il grafico della funzione f sull'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$ è



b) La serie di Fourier di una funzione f è data da

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \,.$$

Abbiamo dunque

$$a_0 = 2\left(5 - \frac{4}{\pi}\right) \quad , \qquad a_n = \frac{8}{(4n^2-1)\pi} \quad (n \geq 1) \quad , \qquad b_n = 0 \quad (n \geq 1) \,.$$

Poiché f è una funzione pari di periodo 2π, i coefficienti di Fourier di f si ottengono attraverso i seguenti calcoli:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(5 - 2\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad (n \geq 0)\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \geq 1)\,.$$

c) Poiché la funzione f è regolare a tratti su $\mathbb{R}$, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge in ogni punto x di $\mathbb{R}$.
Inoltre, poiché la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, si ha $Sf(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
In particolare, considerando $x_0 = \pi$, abbiamo

$$f(\pi) = 5 - 2\sin\frac{\pi}{2} = 5 - 2 \qquad \text{e} \qquad Sf(\pi) = 5 - \frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{(4n^2-1)\pi}\cos n\pi = 5 - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \,.$$

Da $Sf(\pi) = f(\pi)$ risulta dunque

$$5 - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = 5 - 2$$

e quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ converge e risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{2-\pi}{4} \,.$$

Analisi e Geometria 2

Prima prova in itinere 2014/2015

4 maggio 2015

Svolgimento della versione 2

1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (-3x + 4z, 5y, 4x + 3z)$.

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e provare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F; scrivere una matrice M rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e una matrice ortogonale P di passaggio.

c) Dare un'interpretazione geometrica dell'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $G(x, y, z) = \dfrac{1}{5} F(x, y, z)$.

Soluzione

a) La matrice che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

La matrice A è reale e simmetrica e quindi, per il Teorema Spettrale, è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) L'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ di A è $(\lambda - 5)^2(\lambda + 5) = 0$, dunque gli autovalori sono $\lambda_0 = 5$ (doppio), $\lambda_1 = -5$ (semplice).

L'autospazio $V_5 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ : \ A\mathbf{v} = 5\mathbf{v}\}$ è lo spazio (di dimensione 2) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \quad \text{cioè} \quad \begin{bmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{cioè} \quad 2x - z = 0\,;$$

risulta quindi $V_5 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\alpha \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Per il Teorema Spettrale, l'autospazio V_{-5} è uno spazio (di dimensione 1) ortogonale all'autospazio V_5, quindi V_{-5} è la retta (per l'origine) ortogonale al piano di equazione $2x - z = 0$; risulta cioè $V_{-5} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Indichiamo con $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i vettori scelti come generatori di V_5 e sia $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ il generatore scelto per V_{-5}. Osservato che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali, una base ortogonale (non ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F è $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Si ottiene una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F normalizzando i vettori:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2, \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 \right) = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right) .$$

La matrice M che rappresenta F rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ e la matrice ortogonale P di passaggio sono:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} .$$

c) Riferendoci alla base di autovettori di F trovata sopra, l'applicazione lineare G è rappresentata dalla matrice diagonale $\frac{1}{5}M = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$. Infatti, per ogni $\mathbf{v}$ vettore del piano di equazione $2x - z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore 5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(5\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,,$$

mentre per ogni vettore sulla retta per l'origine ortogonale al piano di equazione $2x - z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore -5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(-5\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\,.$$

La trasformazione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è dunque la simmetria rispetto il piano di equazione $2x - z = 0$.

2. Data l'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{3t}$,

a) scrivere la soluzione generale;

b) determinare la soluzione il cui grafico ha nell'origine $O(0,0)$ una tangente orizzontale.

Soluzione

a) *i.* Determiniamo la soluzione generale z dell'equazione differenziale omogenea $y'' - 2y' - 3y = 0$:
l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$;
le funzioni $y_1(t) = \mathrm{e}^{3t}$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$ sono dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea; l'integrale generale è quindi

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{3t} + B\,\mathrm{e}^{-t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

ii. Cerchiamo una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{3t}$ seguendo il metodo di somiglianza; poiché 3 è una soluzione semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{3t}$; da

$$\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{3t} \ , \quad \tilde{y}'(t) = k(1+3t)\,\mathrm{e}^{3t} \ , \quad \tilde{y}''(t) = 3k(2+3t)\,\mathrm{e}^{3t} \ ,$$

sostituendo nell'equazione data si ottiene $k = 1/4$; una soluzione particolare è quindi

$$\tilde{y}(t) = \frac{t}{4}\,\mathrm{e}^{3t} \ .$$

iii. Per il Teorema di Struttura, la soluzione generale dell'equazione $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{3t}$ è

$$y(t) = z(t) + \tilde{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{3t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{4}\,\mathrm{e}^{3t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) \ .$$

b) Si richiede di risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Considerata la soluzione generale trovata sopra e la sua derivata:

$$y(t) = A\,\mathrm{e}^{3t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{4}\,\mathrm{e}^{3t} \ , \quad y'(t) = 3A\,\mathrm{e}^{3t} - B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+3t}{4}\,\mathrm{e}^{3t}$$

le condizioni $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ portano al sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A - B + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$ che ha come (unica) soluzione $\begin{cases} A = -\frac{1}{16} \\ B = \frac{1}{16} \end{cases}$,
quindi la soluzione il cui grafico ha una tangente orizzontale nell'origine $O(0,0)$ è

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{16}\,\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{16}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{4}\,\mathrm{e}^{3t} \ .$$

3. Sia f la funzione pari definita su $\mathbb{R}$, periodica di periodo 2π e definita su $[0,\pi]$ da $f(x) = 4 - 3\sin\frac{x}{2}$.
La serie di Fourier associata a f è

$$Sf(x) = 4 - \frac{6}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12}{(4n^2-1)\pi} \cos nx \ .$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Dalla serie $Sf(x)$ data sopra dedurre quali siano i coefficienti di Fourier di f e si impostino poi i calcoli necessari per ottenerli.

c) Dopo aver giustificato la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, calcolarne la somma.

Soluzione

a) Grafico omesso.

b) La serie di Fourier di una funzione f è data da

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \ .$$

Abbiamo dunque

$$a_0 = 2\left(4 - \frac{6}{\pi}\right) \quad , \qquad a_n = \frac{12}{(4n^2-1)\pi} \quad (n \geq 1) \quad , \qquad b_n = 0 \quad (n \geq 1) \ .$$

Poiché f è una funzione pari di periodo 2π, i coefficienti di Fourier di f si ottengono attraverso i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(4 - 3\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad (n \geq 0) \ , \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \geq 1) \ . \end{aligned}$$

c) Poiché la funzione f è regolare a tratti su $\mathbb{R}$, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge in ogni punto x di $\mathbb{R}$.
Inoltre, poiché la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, si ha $Sf(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
In particolare, considerando $x_0 = \pi$, abbiamo

$$f(\pi) = 4 - 3\sin\frac{\pi}{2} = 4 - 3 \qquad \text{e} \qquad Sf(\pi) = 4 - \frac{6}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12}{(4n^2-1)\pi}\cos n\pi = 4 - \frac{6}{\pi} + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \ .$$

Da $Sf(\pi) = f(\pi)$ risulta dunque

$$4 - \frac{6}{\pi} + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = 4 - 3$$

e quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ converge e risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{2-\pi}{4} \ .$$

Analisi e Geometria 2

Prima prova in itinere 2014/2015

4 maggio 2015

Svolgimento della versione 3

1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x,y,z) = (3x - 4z, 5y, -4x - 3z)$.

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e provare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F; scrivere una matrice M rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e una matrice ortogonale P di passaggio.

c) Dare un'interpretazione geometrica dell'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $G(x,y,z) = \dfrac{1}{5} F(x,y,z)$.

Soluzione

a) La matrice che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

La matrice A è reale e simmetrica e quindi, per il Teorema Spettrale, è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) L'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ di A è $(\lambda - 5)^2(\lambda + 5) = 0$, dunque gli autovalori sono $\lambda_0 = 5$ (doppio), $\lambda_1 = -5$ (semplice).

L'autospazio $V_5 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \,:\, A\mathbf{v} = 5\mathbf{v}\}$ è lo spazio (di dimensione 2) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \quad \text{cioè} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{cioè} \quad x + 2z = 0\,;$$

risulta quindi $V_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} \,:\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Per il Teorema Spettrale, l'autospazio V_{-5} è uno spazio (di dimensione 1) ortogonale all'autospazio V_5, quindi V_{-5} è la retta (per l'origine) ortogonale al piano di equazione $x + 2z = 0$; risulta cioè $V_{-5} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Indichiamo con $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i vettori scelti come generatori di V_5 e sia $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ il generatore scelto per V_{-5}. Osservato che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali, una base ortogonale (non ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F è $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Si ottiene una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F normalizzando i vettori:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2, \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 \right) = \left(\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right) .$$

La matrice M che rappresenta F rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ e la matrice ortogonale P di passaggio sono:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} .$$

c) Riferendoci alla base di autovettori di F trovata sopra, l'applicazione lineare G è rappresentata dalla matrice diagonale $\frac{1}{5}M = \operatorname{diag}(1,1,-1)$. Infatti, per ogni $\mathbf{v}$ vettore del piano di equazione $x + 2z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore 5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(5\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,,$$

mentre per ogni vettore sulla retta per l'origine ortogonale al piano di equazione $x + 2z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore -5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(-5\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\,.$$

La trasformazione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è dunque la simmetria rispetto il piano di equazione $x + 2z = 0$.

2. Data l'equazione differenziale $y'' - 3y' - 4y = \mathrm{e}^{4t}$,

a) scrivere la soluzione generale;

b) determinare la soluzione il cui grafico ha nell'origine $O(0,0)$ una tangente orizzontale.

Soluzione

a) *i.* Determiniamo la soluzione generale z dell'equazione differenziale omogenea $y'' - 3y' - 4y = 0$:
l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$;
le funzioni $y_1(t) = \mathrm{e}^{4t}$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$ sono dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea; l'integrale generale è quindi

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{4t} + B\,\mathrm{e}^{-t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

ii. Cerchiamo una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione differenziale $y'' - 3y' - 4y = \mathrm{e}^{4t}$ seguendo il metodo di somiglianza; poiché 4 è una soluzione semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{4t}$; da

$$\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{4t} \ , \quad \tilde{y}'(t) = k(1+4t)\,\mathrm{e}^{4t} \ , \quad \tilde{y}''(t) = 4k(2+4t)\,\mathrm{e}^{4t} \ ,$$

sostituendo nell'equazione data si ottiene $k = 1/5$; una soluzione particolare è quindi

$$\tilde{y}(t) = \frac{t}{5}\,\mathrm{e}^{4t} \ .$$

iii. Per il Teorema di Struttura, la soluzione generale dell'equazione $y'' - 3y' - 4y = \mathrm{e}^{4t}$ è

$$y(t) = z(t) + \tilde{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{4t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{5}\,\mathrm{e}^{4t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) \ .$$

b) Si richiede di risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = \mathrm{e}^{4t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Considerata la soluzione generale trovata sopra e la sua derivata:

$$y(t) = A\,\mathrm{e}^{4t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{5}\,\mathrm{e}^{4t} \ , \quad y'(t) = 4A\,\mathrm{e}^{4t} - B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+4t}{5}\,\mathrm{e}^{4t}$$

le condizioni $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ portano al sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ 4A - B + \frac{1}{5} = 0 \end{cases}$ che ha come (unica) soluzione $\begin{cases} A = -\frac{1}{25} \\ B = \frac{1}{25} \end{cases}$,
quindi la soluzione il cui grafico ha una tangente orizzontale nell'origine $O(0,0)$ è

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{25}\,\mathrm{e}^{4t} + \frac{1}{25}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{5}\,\mathrm{e}^{4t} \ .$$

3. Sia f la funzione pari definita su $\mathbb{R}$, periodica di periodo 2π e definita su $[0,\pi]$ da $f(x) = 3 - 4\sin\frac{x}{2}$.
La serie di Fourier associata a f è

$$Sf(x) = 3 - \frac{8}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{(4n^2-1)\pi} \cos nx \ .$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Dalla serie $Sf(x)$ data sopra dedurre quali siano i coefficienti di Fourier di f e si impostino poi i calcoli necessari per ottenerli.

c) Dopo aver giustificato la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, calcolarne la somma.

Soluzione

a) Grafico omesso.

b) La serie di Fourier di una funzione f è data da

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \ .$$

Abbiamo dunque

$$a_0 = 2\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \quad , \qquad a_n = \frac{16}{(4n^2-1)\pi} \quad (n \geq 1) \quad , \qquad b_n = 0 \quad (n \geq 1) \ .$$

Poiché f è una funzione pari di periodo 2π, i coefficienti di Fourier di f si ottengono attraverso i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(3 - 4\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad (n \geq 0) \ , \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \geq 1) \ . \end{aligned}$$

c) Poiché la funzione f è regolare a tratti su $\mathbb{R}$, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge in ogni punto x di $\mathbb{R}$.
Inoltre, poiché la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, si ha $Sf(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
In particolare, considerando $x_0 = \pi$, abbiamo

$$f(\pi) = 3 - 4\sin\frac{\pi}{2} = 3 - 4 \qquad \text{e} \qquad Sf(\pi) = 3 - \frac{8}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{(4n^2-1)\pi}\cos n\pi = 3 - \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \ .$$

Da $Sf(\pi) = f(\pi)$ risulta dunque

$$3 - \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = 3 - 4$$

e quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ converge e risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{2-\pi}{4} \ .$$

Analisi e Geometria 2

Prima prova in itinere 2014/2015

4 maggio 2015

Svolgimento della versione 4

1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (3x + 4z, 5y, 4x - 3z)$.

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e provare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F; scrivere una matrice M rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e una matrice ortogonale P di passaggio.

c) Dare un'interpretazione geometrica dell'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $G(x, y, z) = \dfrac{1}{5} F(x, y, z)$.

Soluzione

a) La matrice che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

La matrice A è reale e simmetrica e quindi, per il Teorema Spettrale, è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) L'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ di A è $(\lambda - 5)^2(\lambda + 5) = 0$, dunque gli autovalori sono $\lambda_0 = 5$ (doppio), $\lambda_1 = -5$ (semplice).

L'autospazio $V_5 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \;:\; A\mathbf{v} = 5\mathbf{v}\}$ è lo spazio (di dimensione 2) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \quad \text{cioè} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,, \quad \text{cioè} \quad x - 2z = 0\,;$$

risulta quindi $V_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \;:\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Per il Teorema Spettrale, l'autospazio V_{-5} è uno spazio (di dimensione 1) ortogonale all'autospazio V_5, quindi V_{-5} è la retta (per l'origine) ortogonale al piano di equazione $x - 2z = 0$; risulta cioè $V_{-5} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

Indichiamo con $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i vettori scelti come generatori di V_5 e sia $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ il generatore scelto per V_{-5}. Osservato che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali, una base ortogonale (non ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F è $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Si ottiene una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F normalizzando i vettori:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2, \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 \right) = \left(\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right).$$

La matrice M che rappresenta F rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ e la matrice ortogonale P di passaggio sono:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

c) Riferendoci alla base di autovettori di F trovata sopra, l'applicazione lineare G è rappresentata dalla matrice diagonale $\frac{1}{5}M = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$. Infatti, per ogni $\mathbf{v}$ vettore del piano di equazione $x - 2z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore 5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(5\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,,$$

mentre per ogni vettore sulla retta per l'origine ortogonale al piano di equazione $x - 2z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore -5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(-5\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\,.$$

La trasformazione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è dunque la simmetria rispetto il piano di equazione $x - 2z = 0$.

2. Data l'equazione differenziale $y'' - 4y' - 5y = \mathrm{e}^{5t}$,

a) scrivere la soluzione generale;

b) determinare la soluzione il cui grafico ha nell'origine $O(0,0)$ una tangente orizzontale.

Soluzione

a) *i.* Determiniamo la soluzione generale z dell'equazione differenziale omogenea $y'' - 4y' - 5y = 0$:
l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$;
le funzioni $y_1(t) = \mathrm{e}^{5t}$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$ sono dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea; l'integrale generale è quindi

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{5t} + B\,\mathrm{e}^{-t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

ii. Cerchiamo una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione differenziale $y'' - 4y' - 5y = \mathrm{e}^{5t}$ seguendo il metodo di somiglianza; poiché 5 è una soluzione semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{5t}$; da

$$\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{5t} , \quad \tilde{y}'(t) = k(1+5t)\,\mathrm{e}^{5t} , \quad \tilde{y}''(t) = 5k(2+5t)\,\mathrm{e}^{5t} ,$$

sostituendo nell'equazione data si ottiene $k = 1/6$; una soluzione particolare è quindi

$$\tilde{y}(t) = \frac{t}{6}\,\mathrm{e}^{5t} .$$

iii. Per il Teorema di Struttura, la soluzione generale dell'equazione $y'' - 4y' - 5y = \mathrm{e}^{5t}$ è

$$y(t) = z(t) + \tilde{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{5t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{6}\,\mathrm{e}^{5t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

b) Si richiede di risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = \mathrm{e}^{5t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Considerata la soluzione generale trovata sopra e la sua derivata:

$$y(t) = A\,\mathrm{e}^{5t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{6}\,\mathrm{e}^{5t} , \quad y'(t) = 5A\,\mathrm{e}^{5t} - B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+5t}{6}\,\mathrm{e}^{5t}$$

le condizioni $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ portano al sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ 5A - B + \frac{1}{6} = 0 \end{cases}$ che ha come (unica) soluzione $\begin{cases} A = -\frac{1}{36} \\ B = \frac{1}{36} \end{cases}$,
quindi la soluzione il cui grafico ha una tangente orizzontale nell'origine $O(0,0)$ è

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{36}\,\mathrm{e}^{5t} + \frac{1}{36}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{6}\,\mathrm{e}^{5t} .$$

3. Sia f la funzione pari definita su $\mathbb{R}$, periodica di periodo 2π e definita su $[0,\pi]$ da $f(x) = 2 - 5\sin\frac{x}{2}$.
La serie di Fourier associata a f è

$$Sf(x) = 2 - \frac{10}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{20}{(4n^2-1)\pi} \cos nx \ .$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Dalla serie $Sf(x)$ data sopra dedurre quali siano i coefficienti di Fourier di f e si impostino poi i calcoli necessari per ottenerli.

c) Dopo aver giustificato la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, calcolarne la somma.

Soluzione

a) Grafico omesso.

b) La serie di Fourier di una funzione f è data da

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \ .$$

Abbiamo dunque

$$a_0 = 2\left(2 - \frac{10}{\pi}\right) \quad , \quad a_n = \frac{20}{(4n^2-1)\pi} \quad (n \geq 1) \quad , \quad b_n = 0 \quad (n \geq 1) \ .$$

Poiché f è una funzione pari di periodo 2π, i coefficienti di Fourier di f si ottengono attraverso i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(2 - 5\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad (n \geq 0) \ , \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \geq 1) \ . \end{aligned}$$

c) Poiché la funzione f è regolare a tratti su $\mathbb{R}$, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge in ogni punto x di $\mathbb{R}$.
Inoltre, poiché la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, si ha $Sf(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
In particolare, considerando $x_0 = \pi$, abbiamo

$$f(\pi) = 2 - 5\sin\frac{\pi}{2} = 2 - 5 \qquad \text{e} \qquad Sf(\pi) = 2 - \frac{10}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{20}{(4n^2-1)\pi}\cos n\pi = 2 - \frac{10}{\pi} + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \ .$$

Da $Sf(\pi) = f(\pi)$ risulta dunque

$$2 - \frac{10}{\pi} + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = 2 - 5$$

e quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ converge e risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{2-\pi}{4} \ .$$

Analisi e Geometria 2

Prima prova in itinere 2014/2015

4 maggio 2015

Svolgimento della versione 5

1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (-4x - 3z, 5y, -3x + 4z)$.

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e provare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F; scrivere una matrice M rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e una matrice ortogonale P di passaggio.

c) Dare un'interpretazione geometrica dell'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $G(x, y, z) = \dfrac{1}{5} F(x, y, z)$.

Soluzione

a) La matrice che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

La matrice A è reale e simmetrica e quindi, per il Teorema Spettrale, è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) L'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ di A è $(\lambda - 5)^2(\lambda + 5) = 0$, dunque gli autovalori sono $\lambda_0 = 5$ (doppio), $\lambda_1 = -5$ (semplice).

L'autospazio $V_5 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ : \ A\mathbf{v} = 5\mathbf{v}\}$ è lo spazio (di dimensione 2) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \quad \text{cioè} \quad \begin{bmatrix} -9 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{cioè} \quad 3x + z = 0\,;$$

risulta quindi $V_5 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -3\alpha \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Per il Teorema Spettrale, l'autospazio V_{-5} è uno spazio (di dimensione 1) ortogonale all'autospazio V_5, quindi V_{-5} è la retta (per l'origine) ortogonale al piano di equazione $3x + z = 0$; risulta cioè $V_{-5} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Indichiamo con $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i vettori scelti come generatori di V_5 e sia $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ il generatore scelto per V_{-5}. Osservato che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali, una base ortogonale (non ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F è $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Si ottiene una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F normalizzando i vettori:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2, \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 \right) = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 0 \\ -3/\sqrt{10} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 0 \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \right) .$$

La matrice M che rappresenta F rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ e la matrice ortogonale P di passaggio sono:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & 3/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} .$$

c) Riferendoci alla base di autovettori di F trovata sopra, l'applicazione lineare G è rappresentata dalla matrice diagonale $\frac{1}{5}M = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$. Infatti, per ogni $\mathbf{v}$ vettore del piano di equazione $3x + z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore 5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(5\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,,$$

mentre per ogni vettore sulla retta per l'origine ortogonale al piano di equazione $3x + z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore -5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(-5\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\,.$$

La trasformazione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è dunque la simmetria rispetto il piano di equazione $3x + z = 0$.

2. Data l'equazione differenziale $y'' - 5y' - 6y = \mathrm{e}^{6t}$,

a) scrivere la soluzione generale;

b) determinare la soluzione il cui grafico ha nell'origine $O(0,0)$ una tangente orizzontale.

Soluzione

a) *i.* Determiniamo la soluzione generale z dell'equazione differenziale omogenea $y'' - 5y' - 6y = 0$: l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$; le funzioni $y_1(t) = \mathrm{e}^{6t}$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$ sono dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea; l'integrale generale è quindi

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{6t} + B\,\mathrm{e}^{-t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

ii. Cerchiamo una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione differenziale $y'' - 5y' - 6y = \mathrm{e}^{6t}$ seguendo il metodo di somiglianza; poiché 6 è una soluzione semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{6t}$; da

$$\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{6t} \ , \quad \tilde{y}'(t) = k(1+6t)\,\mathrm{e}^{6t} \ , \quad \tilde{y}''(t) = 6k(2+6t)\,\mathrm{e}^{6t} \ ,$$

sostituendo nell'equazione data si ottiene $k = 1/7$; una soluzione particolare è quindi

$$\tilde{y}(t) = \frac{t}{7}\,\mathrm{e}^{6t} \ .$$

iii. Per il Teorema di Struttura, la soluzione generale dell'equazione $y'' - 5y' - 6y = \mathrm{e}^{6t}$ è

$$y(t) = z(t) + \tilde{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{6t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{7}\,\mathrm{e}^{6t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) \ .$$

b) Si richiede di risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 5y' - 6y = \mathrm{e}^{6t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Considerata la soluzione generale trovata sopra e la sua derivata:

$$y(t) = A\,\mathrm{e}^{6t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{7}\,\mathrm{e}^{6t} \ , \quad y'(t) = 6A\,\mathrm{e}^{6t} - B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+6t}{7}\,\mathrm{e}^{6t}$$

le condizioni $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ portano al sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ 6A - B + \frac{1}{7} = 0 \end{cases}$ che ha come (unica) soluzione $\begin{cases} A = -\frac{1}{49} \\ B = \frac{1}{49} \end{cases}$, quindi la soluzione il cui grafico ha una tangente orizzontale nell'origine $O(0,0)$ è

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{49}\,\mathrm{e}^{6t} + \frac{1}{49}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{7}\,\mathrm{e}^{6t} \ .$$

3. Sia f la funzione pari definita su $\mathbb{R}$, periodica di periodo 2π e definita su $[0,\pi]$ da $f(x) = 2 + 5\sin\frac{x}{2}$.
La serie di Fourier associata a f è

$$Sf(x) = 2 + \frac{10}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{20}{(1-4n^2)\pi} \cos nx \ .$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Dalla serie $Sf(x)$ data sopra dedurre quali siano i coefficienti di Fourier di f e si impostino poi i calcoli necessari per ottenerli.

c) Dopo aver giustificato la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$, calcolarne la somma.

Soluzione

a) Grafico omesso.

b) La serie di Fourier di una funzione f è data da

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \ .$$

Abbiamo dunque

$$a_0 = 2\left(2 + \frac{10}{\pi}\right) \quad , \qquad a_n = \frac{20}{(1-4n^2)\pi} \quad (n \geq 1) \quad , \qquad b_n = 0 \quad (n \geq 1) \ .$$

Poiché f è una funzione pari di periodo 2π, i coefficienti di Fourier di f si ottengono attraverso i seguenti calcoli:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(2 + 5\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad (n \geq 0) \ ,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \geq 1) \ .$$

c) Poiché la funzione f è regolare a tratti su $\mathbb{R}$, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge in ogni punto x di $\mathbb{R}$.
Inoltre, poiché la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, si ha $Sf(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
In particolare, considerando $x_0 = \pi$, abbiamo

$$f(\pi) = 2 + 5\sin\frac{\pi}{2} = 2 + 5 \qquad \text{e} \qquad Sf(\pi) = 2 + \frac{10}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{20}{(1-4n^2)\pi}\cos n\pi = 2 + \frac{10}{\pi} + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \ .$$

Da $Sf(\pi) = f(\pi)$ risulta dunque

$$2 + \frac{10}{\pi} + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = 2 + 5$$

e quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ converge e risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{\pi - 2}{4} \ .$$

Analisi e Geometria 2

Prima prova in itinere 2014/2015

4 maggio 2015

Svolgimento della versione 6

1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (-4x + 3z, 5y, 3x + 4z)$.

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e provare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F; scrivere una matrice M rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e una matrice ortogonale P di passaggio.

c) Dare un'interpretazione geometrica dell'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $G(x, y, z) = \dfrac{1}{5} F(x, y, z)$.

Soluzione

a) La matrice che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

La matrice A è reale e simmetrica e quindi, per il Teorema Spettrale, è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) L'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ di A è $(\lambda - 5)^2(\lambda + 5) = 0$, dunque gli autovalori sono $\lambda_0 = 5$ (doppio), $\lambda_1 = -5$ (semplice).

L'autospazio $V_5 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ : \ A\mathbf{v} = 5\mathbf{v}\}$ è lo spazio (di dimensione 2) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \quad \text{cioè} \quad \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\,, \quad \text{cioè} \quad 3x - z = 0\,;$$

risulta quindi $V_5 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 3\alpha \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Per il Teorema Spettrale, l'autospazio V_{-5} è uno spazio (di dimensione 1) ortogonale all'autospazio V_5, quindi V_{-5} è la retta (per l'origine) ortogonale al piano di equazione $3x - z = 0$; risulta cioè $V_{-5} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Indichiamo con $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i vettori scelti come generatori di V_5 e sia $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ il generatore scelto per V_{-5}. Osservato che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali, una base ortogonale (non ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F è $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Si ottiene una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F normalizzando i vettori:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2, \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 \right) = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 0 \\ 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 0 \\ -1/\sqrt{10} \end{bmatrix} \right).$$

La matrice M che rappresenta F rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ e la matrice ortogonale P di passaggio sono:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 & 3/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/\sqrt{10} & 0 & -1/\sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

c) Riferendoci alla base di autovettori di F trovata sopra, l'applicazione lineare G è rappresentata dalla matrice diagonale $\frac{1}{5}M = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$. Infatti, per ogni $\mathbf{v}$ vettore del piano di equazione $3x - z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore 5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(5\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,,$$

mentre per ogni vettore sulla retta per l'origine ortogonale al piano di equazione $3x - z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore -5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(-5\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\,.$$

La trasformazione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è dunque la simmetria rispetto il piano di equazione $3x - z = 0$.

2. Data l'equazione differenziale $y'' - 6y' - 7y = \mathrm{e}^{7t}$,

a) scrivere la soluzione generale;

b) determinare la soluzione il cui grafico ha nell'origine $O(0,0)$ una tangente orizzontale.

Soluzione

a) *i.* Determiniamo la soluzione generale z dell'equazione differenziale omogenea $y'' - 6y' - 7y = 0$: l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -1$; le funzioni $y_1(t) = \mathrm{e}^{7t}$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$ sono dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea; l'integrale generale è quindi

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{7t} + B\,\mathrm{e}^{-t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

ii. Cerchiamo una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione differenziale $y'' - 6y' - 7y = \mathrm{e}^{7t}$ seguendo il metodo di somiglianza; poiché 7 è una soluzione semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{7t}$; da

$$\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{7t} , \quad \tilde{y}'(t) = k(1+7t)\,\mathrm{e}^{7t} , \quad \tilde{y}''(t) = 7k(2+7t)\,\mathrm{e}^{7t} ,$$

sostituendo nell'equazione data si ottiene $k = 1/8$; una soluzione particolare è quindi

$$\tilde{y}(t) = \frac{t}{8}\,\mathrm{e}^{7t} .$$

iii. Per il Teorema di Struttura, la soluzione generale dell'equazione $y'' - 6y' - 7y = \mathrm{e}^{7t}$ è

$$y(t) = z(t) + \tilde{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{7t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{8}\,\mathrm{e}^{7t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

b) Si richiede di risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 6y' - 7y = \mathrm{e}^{7t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Considerata la soluzione generale trovata sopra e la sua derivata:

$$y(t) = A\,\mathrm{e}^{7t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{8}\,\mathrm{e}^{7t} , \quad y'(t) = 7A\,\mathrm{e}^{7t} - B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+7t}{8}\,\mathrm{e}^{7t}$$

le condizioni $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ portano al sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ 7A - B + \frac{1}{8} = 0 \end{cases}$ che ha come (unica) soluzione $\begin{cases} A = -\frac{1}{64} \\ B = \frac{1}{64} \end{cases}$,
quindi la soluzione il cui grafico ha una tangente orizzontale nell'origine $O(0,0)$ è

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{64}\,\mathrm{e}^{7t} + \frac{1}{64}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{8}\,\mathrm{e}^{7t} .$$

3. Sia f la funzione pari definita su $\mathbb{R}$, periodica di periodo 2π e definita su $[0,\pi]$ da $f(x) = 3 + 4\sin\frac{x}{2}$.
La serie di Fourier associata a f è

$$Sf(x) = 3 + \frac{8}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{(1-4n^2)\pi} \cos nx \ .$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Dalla serie $Sf(x)$ data sopra dedurre quali siano i coefficienti di Fourier di f e si impostino poi i calcoli necessari per ottenerli.

c) Dopo aver giustificato la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$, calcolarne la somma.

Soluzione

a) Grafico omesso.

b) La serie di Fourier di una funzione f è data da

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \ .$$

Abbiamo dunque

$$a_0 = 2\left(3 + \frac{8}{\pi}\right) \quad , \qquad a_n = \frac{16}{(1-4n^2)\pi} \quad (n \geq 1) \quad , \qquad b_n = 0 \quad (n \geq 1) \ .$$

Poiché f è una funzione pari di periodo 2π, i coefficienti di Fourier di f si ottengono attraverso i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(3 + 4\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad (n \geq 0) \ , \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \geq 1) \ . \end{aligned}$$

c) Poiché la funzione f è regolare a tratti su $\mathbb{R}$, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge in ogni punto x di $\mathbb{R}$.
Inoltre, poiché la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, si ha $Sf(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
In particolare, considerando $x_0 = \pi$, abbiamo

$$f(\pi) = 3 + 4\sin\frac{\pi}{2} = 3 + 4 \qquad \text{e} \qquad Sf(\pi) = 3 + \frac{8}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{(1-4n^2)\pi}\cos n\pi = 3 + \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} \ .$$

Da $Sf(\pi) = f(\pi)$ risulta dunque

$$3 + \frac{8}{\pi} + \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} = 3 + 4$$

e quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ converge e risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{\pi - 2}{4} \ .$$

Analisi e Geometria 2

Prima prova in itinere 2014/2015

4 maggio 2015

Svolgimento della versione 7

1. Si consideri l'applicazione lineare $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita da $F(x,y,z)=(4x-3z,5y,-3x-4z)$.

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e provare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F; scrivere una matrice M rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e una matrice ortogonale P di passaggio.

c) Dare un'interpretazione geometrica dell'applicazione lineare $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita da $G(x,y,z)=\dfrac{1}{5}F(x,y,z)$.

Soluzione

a) La matrice che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A=\begin{bmatrix}4&0&-3\\0&5&0\\-3&0&-4\end{bmatrix}$.

La matrice A è reale e simmetrica e quindi, per il Teorema Spettrale, è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) L'equazione caratteristica $\det(A-\lambda I)=0$ di A è $(\lambda-5)^2(\lambda+5)=0$, dunque gli autovalori sono $\lambda_0=5$ (doppio), $\lambda_1=-5$ (semplice).

L'autospazio $V_5=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3\ :\ A\mathbf{v}=5\mathbf{v}\}$ è lo spazio (di dimensione 2) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A-5I)\mathbf{v}=\mathbf{0}\,,\quad \text{cioè}\quad \begin{bmatrix}-1&0&-3\\0&0&0\\-3&0&-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\,,\quad\text{cioè}\quad x+3z=0\,;$$

risulta quindi $V_5=\left\{\begin{bmatrix}3\alpha\\\beta\\-\alpha\end{bmatrix}\ :\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$.

Per il Teorema Spettrale, l'autospazio V_{-5} è uno spazio (di dimensione 1) ortogonale all'autospazio V_5, quindi V_{-5} è la retta (per l'origine) ortogonale al piano di equazione $x+3z=0$; risulta cioè $V_{-5}=\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right\}$.

Indichiamo con $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ i vettori scelti come generatori di V_5 e sia $\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$ il generatore scelto per V_{-5}. Osservato che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali, una base ortogonale (non ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F è $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$. Si ottiene una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F normalizzando i vettori:

$$\mathcal{B}=\left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1,\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2,\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3\right)=\left(\begin{bmatrix}3/\sqrt{10}\\0\\-1/\sqrt{10}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/\sqrt{10}\\0\\3/\sqrt{10}\end{bmatrix}\right)\,.$$

La matrice M che rappresenta F rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ e la matrice ortogonale P di passaggio sono:

$$M=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&-5\end{bmatrix}\quad,\qquad P=\begin{bmatrix}3/\sqrt{10}&0&1/\sqrt{10}\\0&1&0\\-1/\sqrt{10}&0&3/\sqrt{10}\end{bmatrix}\,.$$

c) Riferendoci alla base di autovettori di F trovata sopra, l'applicazione lineare G è rappresentata dalla matrice diagonale $\frac{1}{5}M=\operatorname{diag}(1,1,-1)$. Infatti, per ogni $\mathbf{v}$ vettore del piano di equazione $x+3z=0$ (autospazio di F relativo all'autovalore 5) risulta

$$G(\mathbf{v})=\frac{1}{5}F(\mathbf{v})=\frac{1}{5}(5\mathbf{v})=\mathbf{v}\,,$$

mentre per ogni vettore sulla retta per l'origine ortogonale al piano di equazione $x+3z=0$ (autospazio di F relativo all'autovalore -5) risulta

$$G(\mathbf{v})=\frac{1}{5}F(\mathbf{v})=\frac{1}{5}(-5\mathbf{v})=-\mathbf{v}\,.$$

La trasformazione $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ è dunque la simmetria rispetto il piano di equazione $x+3z=0$.

2. Data l'equazione differenziale $y'' - 7y' - 8y = \mathrm{e}^{8t}$,

a) scrivere la soluzione generale;

b) determinare la soluzione il cui grafico ha nell'origine $O(0,0)$ una tangente orizzontale.

Soluzione

a) *i.* Determiniamo la soluzione generale z dell'equazione differenziale omogenea $y'' - 7y' - 8y = 0$: l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -1$; le funzioni $y_1(t) = \mathrm{e}^{8t}$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$ sono dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea; l'integrale generale è quindi

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{8t} + B\,\mathrm{e}^{-t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

ii. Cerchiamo una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione differenziale $y'' - 7y' - 8y = \mathrm{e}^{8t}$ seguendo il metodo di somiglianza; poiché 8 è una soluzione semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{8t}$; da

$$\tilde{y}(t) = kt\,\mathrm{e}^{8t} \ , \quad \tilde{y}'(t) = k(1+8t)\,\mathrm{e}^{8t} \ , \quad \tilde{y}''(t) = 8k(2+8t)\,\mathrm{e}^{8t} \ ,$$

sostituendo nell'equazione data si ottiene $k = 1/9$; una soluzione particolare è quindi

$$\tilde{y}(t) = \frac{t}{9}\,\mathrm{e}^{8t} \ .$$

iii. Per il Teorema di Struttura, la soluzione generale dell'equazione $y'' - 7y' - 8y = \mathrm{e}^{8t}$ è

$$y(t) = z(t) + \tilde{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{8t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{9}\,\mathrm{e}^{8t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) \ .$$

b) Si richiede di risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 7y' - 8y = \mathrm{e}^{8t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Considerata la soluzione generale trovata sopra e la sua derivata:

$$y(t) = A\,\mathrm{e}^{8t} + B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{9}\,\mathrm{e}^{8t} \ , \quad y'(t) = 8A\,\mathrm{e}^{8t} - B\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+8t}{9}\,\mathrm{e}^{8t}$$

le condizioni $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ portano al sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ 8A - B + \frac{1}{9} = 0 \end{cases}$ che ha come (unica) soluzione $\begin{cases} A = -\frac{1}{81} \\ B = \frac{1}{81} \end{cases}$,
quindi la soluzione il cui grafico ha una tangente orizzontale nell'origine $O(0,0)$ è

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{81}\,\mathrm{e}^{8t} + \frac{1}{81}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t}{9}\,\mathrm{e}^{8t} \ .$$

3. Sia f la funzione pari definita su $\mathbb{R}$, periodica di periodo 2π e definita su $[0,\pi]$ da $f(x) = 4 + 3\sin\frac{x}{2}$.
La serie di Fourier associata a f è

$$Sf(x) = 4 + \frac{6}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12}{(1-4n^2)\pi} \cos nx \, .$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Dalla serie $Sf(x)$ data sopra dedurre quali siano i coefficienti di Fourier di f e si impostino poi i calcoli necessari per ottenerli.

c) Dopo aver giustificato la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$, calcolarne la somma.

Soluzione

a) Grafico omesso.

b) La serie di Fourier di una funzione f è data da

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \, .$$

Abbiamo dunque

$$a_0 = 2\left(4 + \frac{6}{\pi}\right) \quad , \qquad a_n = \frac{12}{(1-4n^2)\pi} \quad (n \geq 1) \quad , \qquad b_n = 0 \quad (n \geq 1) \, .$$

Poiché f è una funzione pari di periodo 2π, i coefficienti di Fourier di f si ottengono attraverso i seguenti calcoli:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(4 + 3\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad (n \geq 0) \, ,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \geq 1) \, .$$

c) Poiché la funzione f è regolare a tratti su $\mathbb{R}$, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge in ogni punto x di $\mathbb{R}$.
Inoltre, poiché la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, si ha $Sf(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
In particolare, considerando $x_0 = \pi$, abbiamo

$$f(\pi) = 4 + 3\sin\frac{\pi}{2} = 4 + 3 \qquad \text{e} \qquad Sf(\pi) = 4 + \frac{6}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12}{(1-4n^2)\pi}\cos n\pi = 4 + \frac{6}{\pi} + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} \, .$$

Da $Sf(\pi) = f(\pi)$ risulta dunque

$$4 + \frac{6}{\pi} + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} = 4 + 3$$

e quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ converge e risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{\pi - 2}{4} \, .$$

Analisi e Geometria 2

Prima prova in itinere 2014/2015

4 maggio 2015

Svolgimento della versione 8

1. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(x, y, z) = (4x + 3z, 5y, 3x - 4z)$.

a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e provare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F ; scrivere una matrice M rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e una matrice ortogonale P di passaggio.

c) Dare un'interpretazione geometrica dell'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $G(x, y, z) = \dfrac{1}{5} F(x, y, z)$.

Soluzione

a) La matrice che rappresenta F rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

La matrice A è reale e simmetrica e quindi, per il Teorema Spettrale, è ortogonalmente diagonalizzabile.

b) L'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$ di A è $(\lambda - 5)^2(\lambda + 5) = 0$, dunque gli autovalori sono $\lambda_0 = 5$ (doppio), $\lambda_1 = -5$ (semplice).

L'autospazio $V_5 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ : \ A\mathbf{v} = 5\mathbf{v}\}$ è lo spazio (di dimensione 2) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - 5I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \,, \quad \text{cioè} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \,, \quad \text{cioè} \quad x - 3z = 0 \,;$$

risulta quindi $V_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 3\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Per il Teorema Spettrale, l'autospazio V_{-5} è uno spazio (di dimensione 1) ortogonale all'autospazio V_5 , quindi V_{-5} è la retta (per l'origine) ortogonale al piano di equazione $x - 3z = 0$; risulta cioè $V_{-5} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$.

Indichiamo con $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i vettori scelti come generatori di V_5 e sia $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ il generatore scelto per V_{-5} . Osservato che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali, una base ortogonale (non ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F è $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Si ottiene una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F normalizzando i vettori:

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2, \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 \right) = \left(\begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 0 \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 0 \\ -3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \right) .$$

La matrice M che rappresenta F rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ e la matrice ortogonale P di passaggio sono:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 0 & 1/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{10} & 0 & -3/\sqrt{10} \end{bmatrix} .$$

c) Riferendoci alla base di autovettori di F trovata sopra, l'applicazione lineare G è rappresentata dalla matrice diagonale $\frac{1}{5}M = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$. Infatti, per ogni $\mathbf{v}$ vettore del piano di equazione $x - 3z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore 5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(5\mathbf{v}) = \mathbf{v} \,,$$

mentre per ogni vettore sulla retta per l'origine ortogonale al piano di equazione $x - 3z = 0$ (autospazio di F relativo all'autovalore -5) risulta

$$G(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}F(\mathbf{v}) = \frac{1}{5}(-5\mathbf{v}) = -\mathbf{v} \,.$$

La trasformazione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è dunque la simmetria rispetto il piano di equazione $x - 3z = 0$.

2. Data l'equazione differenziale $y'' - 8y' - 9y = e^{9t}$,

a) scrivere la soluzione generale;

b) determinare la soluzione il cui grafico ha nell'origine $O(0,0)$ una tangente orizzontale.

Soluzione

a) *i.* Determiniamo la soluzione generale z dell'equazione differenziale omogenea $y'' - 8y' - 9y = 0$: l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$ ha due soluzioni reali e distinte: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$; le funzioni $y_1(t) = e^{9t}$ e $y_2(t) = e^{-t}$ sono dunque due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea; l'integrale generale è quindi

$$z(t) = A\,e^{9t} + B\,e^{-t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

ii. Cerchiamo una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione differenziale $y'' - 8y' - 9y = e^{9t}$ seguendo il metodo di somiglianza; poiché 9 è una soluzione semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione del tipo $\tilde{y}(t) = kt\,e^{9t}$; da

$$\tilde{y}(t) = kt\,e^{9t} , \quad \tilde{y}'(t) = k(1+9t)\,e^{9t} , \quad \tilde{y}''(t) = 9k(2+9t)\,e^{9t} ,$$

sostituendo nell'equazione data si ottiene $k = 1/10$; una soluzione particolare è quindi

$$\tilde{y}(t) = \frac{t}{10}\,e^{9t} .$$

iii. Per il Teorema di Struttura, la soluzione generale dell'equazione $y'' - 8y' - 9y = e^{9t}$ è

$$y(t) = z(t) + \tilde{y}(t) = A\,e^{9t} + B\,e^{-t} + \frac{t}{10}\,e^{9t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

b) Si richiede di risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 8y' - 9y = e^{9t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Considerata la soluzione generale trovata sopra e la sua derivata:

$$y(t) = A\,e^{9t} + B\,e^{-t} + \frac{t}{10}\,e^{9t} , \quad y'(t) = 9A\,e^{9t} - B\,e^{-t} + \frac{1+9t}{10}\,e^{9t}$$

le condizioni $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ portano al sistema $\begin{cases} A + B = 0 \\ 9A - B + \frac{1}{10} = 0 \end{cases}$ che ha come (unica) soluzione $\begin{cases} A = -\frac{1}{100} \\ B = \frac{1}{100} \end{cases}$,
quindi la soluzione il cui grafico ha una tangente orizzontale nell'origine $O(0,0)$ è

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{100}\,e^{9t} + \frac{1}{100}\,e^{-t} + \frac{t}{10}\,e^{9t} .$$

3. Sia f la funzione pari definita su $\mathbb{R}$, periodica di periodo 2π e definita su $[0,\pi]$ da $f(x) = 5 + 2\sin\frac{x}{2}$.
La serie di Fourier associata a f è

$$Sf(x) = 5 + \frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{(1-4n^2)\pi} \cos nx \ .$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Dalla serie $Sf(x)$ data sopra dedurre quali siano i coefficienti di Fourier di f e si impostino poi i calcoli necessari per ottenerli.

c) Dopo aver giustificato la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$, calcolarne la somma.

Soluzione

a) Grafico omesso.

b) La serie di Fourier di una funzione f è data da

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \ .$$

Abbiamo dunque

$$a_0 = 2\left(5 + \frac{4}{\pi}\right) \quad , \qquad a_n = \frac{8}{(1-4n^2)\pi} \quad (n \geq 1) \quad , \qquad b_n = 0 \quad (n \geq 1) \ .$$

Poiché f è una funzione pari di periodo 2π, i coefficienti di Fourier di f si ottengono attraverso i seguenti calcoli:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(5 + 2\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad (n \geq 0) \ ,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \geq 1) \ .$$

c) Poiché la funzione f è regolare a tratti su $\mathbb{R}$, la serie di Fourier $Sf(x)$ converge in ogni punto x di $\mathbb{R}$.
Inoltre, poiché la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, si ha $Sf(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
In particolare, considerando $x_0 = \pi$, abbiamo

$$f(\pi) = 5 + 2\sin\frac{\pi}{2} = 5 + 2 \qquad \text{e} \qquad Sf(\pi) = 5 + \frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{(1-4n^2)\pi}\cos n\pi = 5 + \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \ .$$

Da $Sf(\pi) = f(\pi)$ risulta dunque

$$5 + \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = 5 + 2$$

e quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ converge e risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{\pi - 2}{4} \ .$$