Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **2 maggio 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_3) = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3. \end{cases}$$

(a) Si scriva la matrice che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

(b) Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di $\mathbf{T}$.

(c) Si dia la definizione di funzione iniettiva. L'applicazione $\mathbf{T}$ è iniettiva?

Soluzione

(a) La matrice che rappresenta T rispetto alla base considerata è la matrice le cui colonne sono le componenti, rispetto alla base stessa, dei trasformati dei vettori della base, cioè $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Con una riduzione per righe della matrice A, si vede che il rango di A è 3. Dunque, per il teorema delle dimensioni, la dimensione del nucleo è zero.

(c) Siano A, B insiemi. Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ (con dominio A e codominio B) si dice iniettiva se, per ogni $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

In modo equivalente, f è iniettiva se, se, per ogni $x, y \in A$,

$$x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

L'applicazione lineare T è iniettiva perché $\mathrm{Ker}\, T = \mathbf{0}$.

(a) Sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (matrice 2×1) e sia $A = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ (prodotto di matrici).

i. Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando la risposta. Se lo è, si scriva una matrice diagonale simile alla matrice A.

ii. Esistono basi *ortonormali* di $\mathbb{R}^2$ formate da autovettori di A? Se esistono, se ne trovi una.

iii. Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: "*Se* $\mathbf{u}$ *è una qualunque matrice reale* $n \times 1$, *allora gli autovalori della matrice* $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ *sono tutti reali*". $\boxed{}$ Giustificare la risposta.

Soluzione

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. A è simmetrica dunque è diagonalizzabile per il teorema spettrale. Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$ e sono 0 e 2. Una matrice diagonale simile ad A è $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Gli autovettori relativi all'autovalore 0 sono le soluzioni del sistema $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, cioè dell'equazione $x + y = 0$. Gli autovettori relativi all'autovalore 2 sono le soluzioni del sistema $(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, cioè dell'equazione $x - y = 0$. Una base ortonormale formata da autovettori è: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1); \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \right\}$.

(c) L'affermazione è vera infatti la matrice $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ è simmetrica come si può vedere calcolandola esplicitamente: se $\mathbf{u} = [x_1, ..., x_n]^{\mathrm{T}}$, si ha che $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & ... & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & ... & x_2x_n \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ x_1x_n & x_2x_n & ... & x_n^2 \end{bmatrix}$. Oppure, osservando che $(AB)^T = B^T A^T$, si ha che $(\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}})^T = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$, il che dimostra che la matrice $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ è simmetrica.

(a) Si enunci il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

(b) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$z''(x) - 10z'(x) + 26z(x) = 0.$$

(c) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) - 10y'(x) + 26y(x) = -5e^{5x} + 26x.$$

Soluzione

(a)

Spazio delle soluzioni dell'eq.^{ne} non omogenea
=
Spazio delle soluzioni dell'eq.^{ne} omogenea
+
Una particolare soluzione dell'eq.^{ne} non omogenea

(b) L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 10\lambda + 26 = 0$$

che ha le due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = 5 \pm i$. L'integrale generale è quindi

$$z(x) = e^{5x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

dove C_1, C_2 sono costanti reali arbitrarie.

(c) Bisogna determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Applicando il metodo di somiglianza, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$y_0(x) = ae^{5x} + bx + c$$

Sostituendo nell'equazione si ricava $a = -5,\ b = 1,\ c = \dfrac{5}{13}$. Quindi otteniamo l'integrale generale

$$y(x) = e^{5x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 5e^{5x} + x + \frac{5}{13},$$

dove C_1, C_2 sono costanti reali arbitrarie.