1. Sia $f(x) = \dfrac{\sin(\sqrt[3]{x}) - e^{\sqrt[3]{x}} + 1}{\ln(1 + \sin\sqrt[3]{x})}$

(a) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} f(x)$. Risposta: $\boxed{0}$

(b) Esistono un numero $K \neq 0$ e un numero $\alpha > 0$ per i quali si abbia $f(x) \sim Kx^{\alpha}$, per $x \to 0$? In caso affermativo, determinare una tale funzione Kx^{α}. Risposta: $\boxed{-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}}$

(c) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 0$.

Poniamo $\sqrt[3]{x} = t$. Quando $x \to 0$, anche $t \to 0$. Per il denominatore valgono le equivalenze:

$$\ln(1 + \sin t) \sim \sin t \sim t, \qquad \text{per } t \to 0$$

Il numeratore è

$$\sin t - e^t + 1 = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) - 1 - t - \frac{t^2}{2!} + o(t^2) + 1 = -\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Dunque

$$\frac{\sin t - e^t + 1}{\ln(1 + \sin t)} \sim \frac{-\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t} \sim -t/2$$

Quindi, quando t tende a zero, il limite è zero. La funzione assegnata $f(x)$, per $x \to 0$, è equivalente a $-t/2 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$.

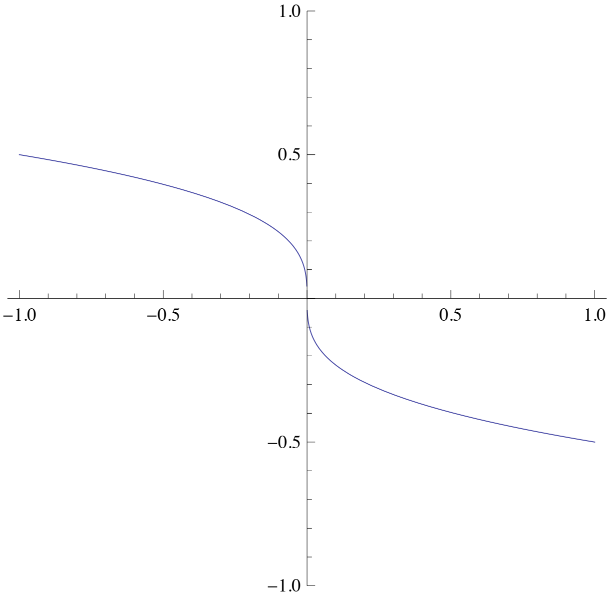

Figura 1: Grafico, vicino a $x_0 = 0$, di $-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

Insieme di definizione di f: $(0, +\infty)$
Limiti agli estremi: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
Eventuali asintoti: $x = 0$ (asintoto verticale); $y = 0$ (asintoto orizzontale).
Derivata prima: $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$
Qual è il più grande intervallo sul quale f è crescente? $(0, 1]$ Qual è il più grande intervallo sul quale f è decrescente? $[1, +\infty)$
L'unico punto di massimo locale (e globale) è $x_0 = 1$. Non ci sono punti di minimo locale.
Derivata seconda: $f''(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}$
Studio della convessità e della concavità : f è concava su $(0, \sqrt{e})$; f è convessa su $(\sqrt{e}, +\infty)$.
Disegnare un grafico qualitativo di f:
Disegnare un grafico qualitativo di $\lvert f(x) \rvert$ (valore assoluto di x).
Esistono punti in cui la funzione $\lvert f(x) \rvert$ *non* è derivabile? Motivare la risposta. La funzione $\lvert f(x) \rvert$ non è derivabile in $x_0 = \frac{1}{e}$.

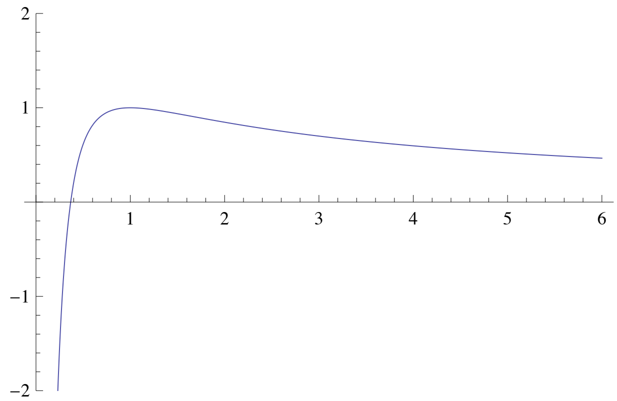

Figura 2: Grafico di $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$

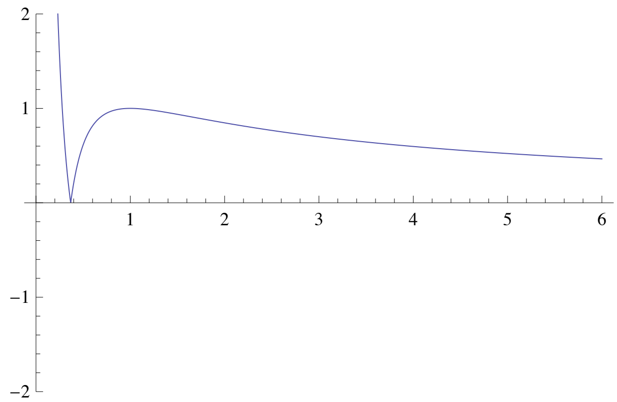

Figura 3: Grafico di $|f(x)| = \left|\dfrac{1+\ln x}{x}\right|$

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ b-1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x_0 = 0$.

Risposta: f è continua in $x_0 = 0$ se $a > 0$ e $b = 1$

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$.

Risposta: f è derivabile in $x_0 = 0$ se $a > 1$ e $b = 1$

Se $a > 0$, la funzione $|x|^a \sin \frac{1}{x}$ è prodotto della funzione $|x|^a$, che tende a zero, per il fattore limitato $\sin \frac{1}{x}$ (che oscilla tra -1 e 1), e quindi converge a zero. Se invece $a \leq 0$, il limite non esiste. Dunque f è continua in 0 se e solo se $a > 0$ e $b - 1 = 0$.

Perché la funzione $f(x)$ sia derivabile in $x_0 = 0$, anzitutto deve essere continua in x_0. Quindi si deve supporre $a > 0$ e $b - 1 = 0$. Il limite del rapporto incrementale in $x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h|^a \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} |h|^{a-1} \sin \frac{1}{h}$$

esiste finito (e vale 0) se e solo se $a - 1 > 0$. Quindi $f(x)$ è derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se $a > 1$ e $b = 1$.

4. Si consideri l'equazione

$$(z-1)^3 = (1-i\sqrt{3})^3$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica $a+ib$:

$$\boxed{-1, \qquad 2+i\sqrt{3}, \qquad 2-i\sqrt{3}}$$

(b) Disegnare tutte le soluzioni sul piano complesso:

L'equazione $(z-1)^3 = (1-i\sqrt{3})^3$ è un'equazione algebrica di terzo grado. Quindi, per il teorema fondamentale dell'algebra, ha esattamente tre soluzioni complesse. Ponendo $w = z-1$, l'equazione si trasforma in $w^3 = (1-i\sqrt{3})^3$. Si tratta allora di trovare le tre radici terze del numero $(1-i\sqrt{3})^3$. Una di tali radici è ovviamente $w_0 = 1-i\sqrt{3}$. Moltiplicando $w_0 = 1-i\sqrt{3}$ per le tre radici terze dell'unità , che sono

$$\epsilon_0 = 1, \qquad \epsilon_1 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \epsilon_2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

si ottengono le tre radici terze complesse di $(1-i\sqrt{3})^3$:

$$w_0 \cdot 1 = 1-i\sqrt{3}, \qquad w_0 \cdot \epsilon_1 = 1+i\sqrt{3}, \qquad w_0 \cdot \epsilon_2 = -2$$

Da questi valori, sommando 1, ricaviamo i tre valori di $z = w+1$:

$$z_0 = 2-i\sqrt{3}, \qquad z_1 = 2+i\sqrt{3}, \qquad z_2 = -1$$