Analisi e Geometria 1 **Prima Prova** **26 Novembre 2013 Compito A**	**Docente: *****	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2(a): 11 Es.2(b): 6 Es.2(c): 3 Es.2(d): 7

1. Si consideri la trasformazione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definita da

$$F(z) = \mathbf{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\, z + 1 + \mathrm{i}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

(a) Stabilire se esistono punti fissi di F, cioè punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $F(z) = z$. In caso affermativo, scrivere tali numeri in forma algebrica.

(b) Disegnare sul piano di Gauss il quadrato

$$\mathcal{Q} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\,,\; 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}$$

e la sua immagine

$$F(\mathcal{Q}) = \{w \in \mathbb{C} \;:\; \exists z \in \mathcal{Q}\,(w = F(z))\}\,.$$

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{\mathbf{e}^{2x} + 1}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(a) i. Dimostrare che la funzione f è crescente su $\mathbb{R}$.

ii. Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

e determinare l'immagine I di f.

iii. Determinare gli eventuali punti di flesso della funzione f.

iv. Disegnare il grafico qualitativo della funzione f.

(b) i. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to I$ è invertibile.

ii. Calcolare la derivata della funzione inversa $\widehat{f}$ nel punto $y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

iii. Disegnare il grafico qualitativo della funzione inversa $\widehat{f} : I \to \mathbb{R}$.

(c) Dimostrare che l'equazione $f(x) - x^3 = 0$ possiede almeno una soluzione nell'intervallo $[-1, 1]$.

(d) i. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin della funzione f troncato al secondo ordine, con resto secondo Peano.

ii. Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}f(x) - \sqrt{1+x} + 3x^2}{x\ln(1+x) + \cos x - 1}\,.$$

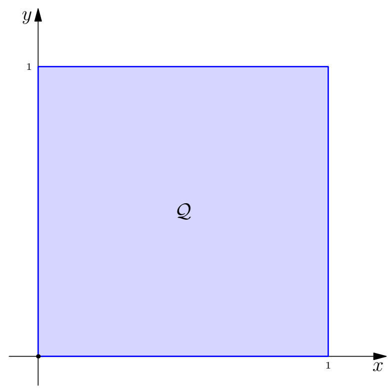
Soluzioni

1. Ricordando che $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta$, si ha $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ e quindi $F(z) = \mathrm{i}\,z + 1 + \mathrm{i}$.

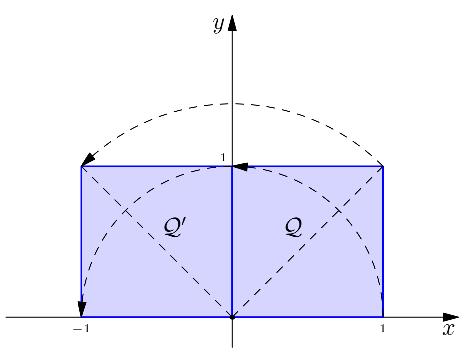
    (a) I punti fissi di F sono i punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $F(z) = z$, ossia tali che $\mathrm{i}\,z + 1 + \mathrm{i} = z$. Da questa equazione si ottiene esattamente una soluzione, data da

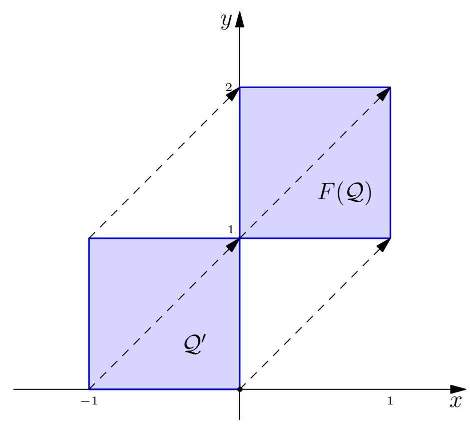
    $$z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}\,.$$

    (b) Il quadrato $\mathcal{Q}$ è il quadrato



    Per determinare l'immagine di $\mathcal{Q}$, basta osservare che la trasformazione F è la rototraslazione data dalla rotazione R di un angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ attorno all'origine, in senso antiorario, seguita dalla traslazione $T(x,y) = (x{+}1, y{+}1)$. Pertanto, l'immagine $F(\mathcal{Q})$ sarà ancora un quadrato. Per ottenere $F(\mathcal{Q})$, prima ruotiamo $\mathcal{Q}$ in senso antiorario attorno all'origine di $90°$ ottenendo il quadrato $\mathcal{Q}' = R(\mathcal{Q})$, e poi trasliamo $\mathcal{Q}'$ di 1 verso destra e di 1 verso l'alto, ottenendo il quadrato $T(\mathcal{Q}') = F(\mathcal{Q})$, come nelle figure seguenti





2. Si osservi, come prima cosa, che la funzione f è effettivamente definita su tutto $\mathbb{R}$ e che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, in particolare, si ha $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

    (a) i. Poiché, la derivata prima di f è

    $$f'(x) = \frac{\mathbf{e}^x}{(\mathbf{e}^{2x}+1)^{3/2}}\,,$$

    la funzione f è derivabile (e continua) su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione f è (strettamente) crescente su tutto $\mathbb{R}$.

    ii. Si hanno i limiti

    $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^-\,.$$

Pertanto, la funzione ammette la retta di equazione $y = 0$ come asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, e la retta di equazione $y = 1$ come asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Di conseguenza, essendo la funzione continua e strettamente crescente, si ha $I = \operatorname{Im} f = (0, 1)$.

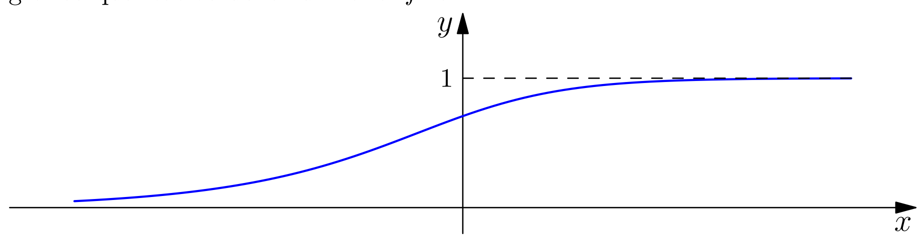
iii. Poiché la derivata seconda di f è

$$f''(x) = \frac{\mathbf{e}^x - 2\mathbf{e}^{3x}}{(\mathbf{e}^{2x} + 1)^{5/2}},$$

si ha $f''(x) \geq 0$ sse $1 - 2\mathbf{e}^{2x} \geq 0$ sse $x \leq -\frac{\ln 2}{2}$. Quindi, la funzione f presenta concavità rivolta verso l'alto per $x < -\frac{\ln 2}{2}$, presenta concavità rivolta verso il basso per $x > -\frac{\ln 2}{2}$, e possiede un flesso nel punto

$$F \equiv \left(-\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

iv. Il grafico qualitativo della funzione f è

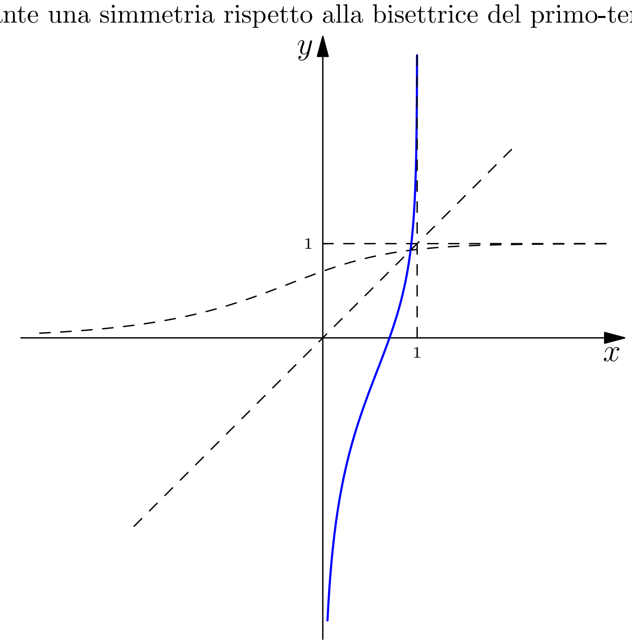


(b) i. Poiché la funzione f di partenza è strettamente crescente, la funzione $f : \mathbb{R} \to I$ è invertibile.

ii. Sia x_0 il punto per cui $y_0 = f(x_0)$, ossia $x_0 = \widehat{f}(y_0)$. Poiché, come osservato inizialmente, si ha $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = y_0$, si ha $x_0 = 0$. Quindi, la derivata della funzione inversa $\widehat{f}$ in $y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è

$$\widehat{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(\widehat{f}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(0)} = 2\sqrt{2}.$$

iii. Il grafico della funzione inversa $\widehat{f} : I \to \mathbb{R}$ si ottiene dal grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to I$ mediante una simmetria rispetto alla bisettrice del primo-terzo quadrante:



(c) Consideriamo la funzione $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = f(x) - x^3$. Questa funzione è continua (essendo differenza di funzioni continue). Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} F(-1) &= \frac{\mathbf{e}^{-1}}{\sqrt{\mathbf{e}^{-2}+1}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}^2+1}} + 1 > 0 \\ F(1) &= \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{e}^2+1}} - 1 = \frac{\mathbf{e} - \sqrt{\mathbf{e}^2+1}}{\sqrt{\mathbf{e}^2+1}} < 0\,. \end{aligned}$$

Pertanto, applicando il teorema degli zeri, esiste almeno un punto $x_0 \in (-1,1)$ tale che $F(x_0) = 0$, ossia tale che $f(x_0) - x_0^3 = 0$. Quindi, l'equazione $f(x) - x^3 = 0$ possiede almeno una soluzione nell'intervallo $(-1,1)$.

(d) i. Lo sviluppo di MacLaurin di f troncato al secondo ordine, con resto secondo Peano, è

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\, x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0\,.$$

Poiché

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,, \qquad f''(0) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\,,$$

si ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\, x - \frac{1}{8\sqrt{2}}\, x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0\,.$$

ii. Per $x \to 0$, si hanno gli sviluppi

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}f(x) - \sqrt{1+x} + 3x^2 = \\ &\quad = 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + o(x^2) - \left(1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + o(x^2)\right) + 3x^2 \\ &\quad = 3x^2 + o(x^2) \\ &x\ln(1+x) + \cos x - 1 = \\ &\quad = x(x + o(x)) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 \\ &\quad = \frac{x^2}{2} + o(x^2)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{3 + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = 6\,.$$