Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 - Prima Prova - 24 Novembre 2015

Terza parte (Compito A)

1. a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq 1\,, \quad 0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$$

$$T := \{w \in \mathbb{C} : w = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)z + i \quad z \in S\}\,.$$

Insieme S: settore circolare con centro in $(0,0)$, raggio 1 e angoli tra 0 e $\frac{\pi}{4}$.

Insieme T: il coefficiente che moltiplica z puo' essere riscritto come:

$$1\left(cos\frac{\pi}{4} + icos\frac{\pi}{4}\right);$$

quindi T ruota di $+\frac{\pi}{4}$ attorno all'origine e diventa un settore circolare con centro in $(0,0)$, raggio 1 e angoli tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.
Sommando infine i, l'insieme T e' un settore circolare con centro in $(0,1)$, raggio 1 e angoli tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.

b) Determinare le soluzioni complesse $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z-1)^3 = i$$

e scriverne le soluzioni in forma algebrica.

Sostituzione $w = z - 1$.

$$w^3 = i \Rightarrow w = \sqrt[3]{i} \Rightarrow w = \sqrt[3]{1\left(cos\frac{\pi}{2} + icos\frac{\pi}{2}\right)}$$

Quindi:

$$w_1 = 1\left(cos\frac{\pi}{6} + icos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_2 = 1\left(cos\frac{5\pi}{6} + icos\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_3 = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + icos\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

Infine:

$$z_1 = w_1 + 1 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = w_2 + 1 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\frac{1}{2}$$

$$z_3 = w_3 + 1 = 1 - i$$

2. Calcolare il limite:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+\sqrt{3}\sin^2 x)}{\tan(x^2)\,(e^{2x}-1)^2}$$

Si utilizzano gli asintotici:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+\sqrt{3}\sin^2 x)}{\tan(x^2)\,(e^{2x}-1)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+\sqrt{3}x^2)}{x^2\,(2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3}x^2)^2}{4x^4} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x^4}{4x^4} = \frac{3}{4}$$

3. Assegnata la funzione
$$f(x) := \sqrt[3]{x^3-x^2} \qquad x\in D(f)=\mathbb{R}\,,$$
determinarne:

- limiti a $+\infty$ e $-\infty$ ed eventuali asintoti
- derivata prima f'
- estremi locali
- il grafico qualitativo.

Limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Asintoti: cerchiamo, per $x\to\pm\infty$ un asintoto obliquo della forma $y = mx+q$ $(m,q\in\mathbb{R})$.
Si noti subito che $f(x)\sim x$ per $x\to\pm\infty$, da cui $m=1$.
Inoltre $f(x)-x = \sqrt[3]{x^3-x^2}-x = x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right] \sim x\left(1-\frac{1}{3x}-1\right) = -\frac{1}{3}$ per $x\to\pm\infty$, da cui deduciamo che $q=-\frac{1}{3}$.
Quindi $y = x-\frac{1}{3}$ è asintoto obliquo di f sia per $x\to-\infty$ che per $x\to+\infty$.

Derivata prima:
$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^3-x^2\right)^{-2/3}(3x^2-2x) = \frac{x^{-1/3}}{3}(x-1)^{-2/3}(3x-2) \qquad x\in D(f') = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}.$$

Derivata prima: abbiamo quindi che
$$\begin{cases} f'(x)>0 & \iff x<0,\ \ x>\frac{2}{3}\ \ (x\neq 1) \\ f'(x)=0 & \iff x=\frac{2}{3}, \\ f'(x)<0 & \iff 0<x<\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Inoltre, dai limiti $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to -^+} f'(x) = +\infty$,
deduciamo che

- $x=\frac{2}{3}$ è punto di massimo locale di f,
- $x=0$ è punto di natura cuspidale e punto di minimo locale di f.

Non sono presenti altri estremanti.

Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 - Prima Prova - 24 Novembre 2015

Terza parte (Compito B)

1. a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq 2\,, \quad 0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$T := \{w \in \mathbb{C} : w = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)z - 1 \quad z \in S\}\,.$$

Insieme S: settore circolare con centro in $(0,0)$, raggio 2 e angoli tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Insieme T: il coefficiente che moltiplica z puo' essere riscritto come:

$$1\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + icos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\,;$$

quindi T ruota di $-\frac{\pi}{4}$ attorno all'origine e diventa un settore circolare con centro in $(0,0)$, raggio 2 e angoli tra $-\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$.
Sottraendo infine 1, l'insieme T e' un settore circolare con centro in $(-1,0)$, raggio 2 e angoli tra $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$.

b) Determinare le soluzioni complesse $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z + 2i)^3 = i$$

e scriverne le soluzioni in forma algebrica.

Sostituzione $w = z + 2i$.

$$w^3 = i \Rightarrow w = \sqrt[3]{i} \Rightarrow w = \sqrt[3]{1\left(cos\frac{\pi}{2} + icos\frac{\pi}{2}\right)}$$

Quindi:

$$w_1 = 1\left(cos\frac{\pi}{6} + icos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_2 = 1\left(cos\frac{5\pi}{6} + icos\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_3 = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + icos\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

Infine:

$$z_1 = w_1 - 2i = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$$

$$z_2 = w_2 - 2i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$$

$$z_3 = w_3 - 2i = -3i$$

2. Calcolare il limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+\sqrt{2}\sin^2 x)}{\tan(x^2)\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

> Si utilizzano gli asintotici:
> $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+\sqrt{2}\sin^2 x)}{\tan(x^2)\left(e^{2x}-1\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+\sqrt{2}x^2)}{x^2\left(2x\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{2}x^2)^2}{4x^4} =$$
> $$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{4x^4} = \frac{1}{2}$$

3. Assegnata la funzione
$$f(x) := -\sqrt[3]{x^3+x^2} \qquad x \in D(f) = \mathbb{R}\,,$$
determinarne:
- limiti a $+\infty$ e $-\infty$ ed eventuali asintoti
- derivata prima f'
- estremi locali
- il grafico qualitativo.

> **Limiti**: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad$ e $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
>
> **Asintoti**: cerchiamo, per $x \to \pm\infty$ un asintoto obliquo della forma $y = mx + q$ $(m, q \in \mathbb{R})$.
> Si noti subito che $f(x) \sim -x$ per $x \to \pm\infty$, da cui $m = -1$.
> Inoltre $f(x) + x = x - \sqrt[3]{x^3+x^2} = x\left[1-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/3}\right] \sim x\left(1-1-\dfrac{1}{3x}\right) = -\dfrac{1}{3}$ per $x \to \pm\infty$, da cui deduciamo che $q = -\frac{1}{3}$.
> Quindi $y = -x - \frac{1}{3}$ è asintoto obliquo di f sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.
>
> **Derivata prima**:
> $$f'(x) = -\frac{1}{3}\left(x^3+x^2\right)^{-2/3}(3x^2+2x) = -\frac{x^{-1/3}}{3}(x+1)^{-2/3}(3x+2) \qquad x \in D(f') = \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}.$$
>
> **Derivata prima**: abbiamo quindi che
> $$\begin{cases} f'(x) > 0 & \iff x < -\frac{2}{3},\; x > 0 \;\; (x \neq -1) \\ f'(x) = 0 & \iff x = -\frac{2}{3}, \\ f'(x) < 0 & \iff -\frac{2}{3} < x < 0. \end{cases}$$
>
> Inoltre, dai limiti $\quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty \quad$ e $\quad \lim_{x\to -^+} f'(x) = -\infty$,
> deduciamo che
> - $x = -\frac{2}{3}$ è punto di minimo locale di f,
> - $x = 0$ è punto di natura cuspidale e punto di massimo locale di f.
>
> Non sono presenti altri estremanti.

Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 - Prima Prova - 24 Novembre 2015

Terza parte (Compito C)

1. a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq 1 \,, \quad 0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$T := \{w \in \mathbb{C} : w = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)z - i \quad z \in S\}\,.$$

Insieme S: settore circolare con centro in $(0,0)$, raggio 1 e angoli tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Insieme T: il coefficiente che moltiplica z puo' essere riscritto come:

$$1\left(cos\frac{3\pi}{4} + icos\frac{3\pi}{4}\right);$$

quindi T ruota di $+\frac{3\pi}{4}$ attorno all'origine e diventa un settore circolare con centro in $(0,0)$, raggio 1 e angoli tra $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.

Sottraendo infine i, l'insieme T e' un settore circolare con con centro in $(0,-1)$, raggio 1 e angoli tra $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.

b) Determinare le soluzioni complesse $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z-2)^3 = i$$

e scriverne le soluzioni in forma algebrica.

Sostituzione $w = z - 2$.

$$w^3 = i \Rightarrow w = \sqrt[3]{i} \Rightarrow w = \sqrt[3]{1\left(cos\frac{\pi}{2} + icos\frac{\pi}{2}\right)}$$

Quindi:

$$w_1 = 1\left(cos\frac{\pi}{6} + icos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_2 = 1\left(cos\frac{5\pi}{6} + icos\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_3 = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + icos\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

Infine:

$$z_1 = w_1 + 2 = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = w_2 + 2 = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\frac{1}{2}$$

$$z_3 = w_3 + 2 = 2 - i$$

2. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln^2(1 + \sqrt{2}\sin^2 x)}{\tan(x^2)\,(e^{3x} - 1)^2}$$

Si utilizzano gli asintotici:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln^2(1 + \sqrt{2}\sin^2 x)}{\tan(x^2)\,(e^{3x} - 1)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln^2(1 + \sqrt{2}x^2)}{x^2\,(3x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{2}x^2)^2}{9x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^4}{9x^4} = \frac{2}{9}$$

3. Assegnata la funzione

$$f(x) := \sqrt[3]{x^2 - x^3}\,\left(= -\sqrt[3]{x^3 - x^2}\right) \qquad x \in D(f) = \mathbb{R}\,,$$

determinarne:

- limiti a $+\infty$ e $-\infty$ ed eventuali asintoti
- derivata prima f'
- estremi locali
- il grafico qualitativo.

Limiti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Asintoti: cerchiamo, per $x \to \pm\infty$ un asintoto obliquo della forma $y = mx + q$ $(m, q \in \mathbb{R})$.
Si noti subito che $f(x) \sim -x$ per $x \to \pm\infty$, da cui $m = -1$.
Inoltre $f(x) + x = x - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = x\left[1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/3}\right] \sim x\left(1 - 1 + \frac{1}{3x}\right) = \frac{1}{3}$ per $x \to \pm\infty$, da cui deduciamo che $q = \frac{1}{3}$.
Quindi $y = -x + \frac{1}{3}$ è asintoto obliquo di f sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.

Derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{1}{3}\left(x^3 - x^2\right)^{-2/3}(3x^2 - 2x) = -\frac{x^{-1/3}}{3}\,(x-1)^{-2/3}\,(3x - 2) \qquad x \in D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Derivata prima: abbiamo quindi che

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \iff 0 < x < \frac{2}{3} \\ f'(x) = 0 & \iff x = \frac{2}{3}, \\ f'(x) < 0 & \iff x < 0,\ x > \frac{2}{3}\ (x \neq 1). \end{cases}$$

Inoltre, dai limiti $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -^+} f'(x) = -\infty$,
deduciamo che

- $x = \frac{2}{3}$ è punto di minimo locale di f,
- $x = 0$ è punto di natura cuspidale e punto di massimo locale di f.

Non sono presenti altri estremanti.

Politecnico di Milano, Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 - Prima Prova - 24 Novembre 2015

Terza parte (Compito D)

1. a) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq 1\,, \quad 0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$$

$$T := \{w \in \mathbb{C} : w = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)z - i \quad z \in S\}\,.$$

Insieme S: settore circolare con centro in $(0,0)$, raggio 1 e angoli tra 0 e $\frac{\pi}{4}$.

Insieme T: il coefficiente che moltiplica z puo' essere riscritto come:

$$1\left(cos\frac{3\pi}{4} + icos\frac{3\pi}{4}\right);$$

quindi T ruota di $+\frac{3\pi}{4}$ attorno all'origine e diventa un settore circolare con centro in $(0,0)$, raggio 1 e angoli tra $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.
Sottraendo infine i, l'insieme T e' un settore circolare con con centro in $(0,-1)$, raggio 1 e angoli tra $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.

b) Determinare le soluzioni complesse $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z+2)^3 = i$$

e scriverne le soluzioni in forma algebrica.

Sostituzione $w = z + 2$.

$$w^3 = i \Rightarrow w = \sqrt[3]{i} \Rightarrow w = \sqrt[3]{1\left(cos\frac{\pi}{2} + icos\frac{\pi}{2}\right)}$$

Quindi:

$$w_1 = 1\left(cos\frac{\pi}{6} + icos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_2 = 1\left(cos\frac{5\pi}{6} + icos\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w_3 = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + icos\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

Infine:

$$z_1 = w_1 - 2 = \left(-2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = w_2 - 2 = \left(-2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\frac{1}{2}$$

$$z_3 = w_3 - 2 = -2 - i$$

2. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2)\left(e^{3x}-1\right)^2}{\ln^2(1+\sqrt{2}\sin^2 x)}$$

Si utilizzano gli asintotici:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2)\left(e^{3x}-1\right)^2}{\ln^2(1+\sqrt{2}\sin^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(3x)^2}{\ln^2(1+\sqrt{2}x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{9x^4}{(\sqrt{2}x^2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{9x^4}{2x^4} = \frac{9}{2}$$

3. Assegnata la funzione

$$f(x) := \sqrt[3]{x^3+x^2} \qquad x \in D(f) = \mathbb{R}\,,$$

determinarne:

- limiti a $+\infty$ e $-\infty$ ed eventuali asintoti
- derivata prima f'
- estremi locali
- il grafico qualitativo.

Limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Asintoti: cerchiamo, per $x \to \pm\infty$ un asintoto obliquo della forma $y = mx + q$ $(m, q \in \mathbb{R})$.
Si noti subito che $f(x) \sim x$ per $x \to \pm\infty$, da cui $m = 1$.
Inoltre $f(x) - x = \sqrt[3]{x^3+x^2} - x = x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1\right] \sim x\left(1 + \frac{1}{3x} - 1\right) = \frac{1}{3}$ per $x \to \pm\infty$, da cui deduciamo che $q = \frac{1}{3}$.
Quindi $y = x + \frac{1}{3}$ è asintoto obliquo di f sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^3+x^2\right)^{-2/3}(3x^2+2x) = \frac{x^{-1/3}}{3}\,(x+1)^{-2/3}\,(3x+2) \qquad x \in D(f') = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}.$$

Derivata prima: abbiamo quindi che

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \iff -\frac{2}{3} < x < 0, \\ f'(x) = 0 & \iff x = -\frac{2}{3}, \\ f'(x) < 0 & \iff x < -\frac{2}{3},\ x > 0 \ (x \neq -1). \end{cases}$$

Inoltre, dai limiti $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to -^+} f'(x) = +\infty$,
deduciamo che

- $x = -\frac{2}{3}$ è punto di massimo locale di f,
- $x = 0$ è punto di natura cuspidale e punto di minimo locale di f.

Non sono presenti altri estremanti.