Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

---

Analisi e Geometria 1 **Prima prova in itinere – 19 Novembre 2012**

**Cognome:** ______________________
**Nome:** ______________________
**Matricola:** ______________________

**Compito A**

| **Es. 1**: 6 punti | **Es. 2**: 6 punti | **Es. 3**: 12 punti | **Es. 4**: 6 punti | **Totale** |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

1. Poniamo $z_0 = \dfrac{1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$ .

   (a) Scrivere $(z_0)^{28}$ nella forma algebrica $a + \mathbf{i}b$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

   (b) Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \{w \in \mathbb{C} \; : \; 0 \le \operatorname{Re} w \le 1\,, \; 0 \le \operatorname{Im} w \le 1\}$$
$$B = z_0 A = \{w' \in \mathbb{C} \; : \; w' = z_0 w, \; w \in A\}\,.$$

2. Sia $f$ la funzione definita da $f(x) = x - 2 \operatorname{artg} x$ .

   (a) Determinare gli eventuali asintoti di $f$.

   (b) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo locali.

3. Sia $f$ la funzione definita da

$$f(x) = \left(1 + \sqrt{\frac{x}{2-x}}\right) \mathrm{e}^{-\sqrt{1-x}}\,.$$

   (a) Determinare il campo di esistenza $D$ della funzione $f$ ,

   (b) Dimostrare che la funzione $f$ è crescente su $D$ .

   (c) Determinare l'immagine di $f$ .

4. Sia $f$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x - 1} & \text{se } x > 1 \\ (x-1)^2 + a(x-1) + 1 & \text{se } x \le 1 \end{cases}$$

   dove $a$ un parametro reale.

   (a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f$ è continua nel punto $x_0 = 1$?

   (b) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f$ è derivabile nel punto $x_0 = 1$?

**Punteggio minimo per superare la prova** = 18 punti.
**Tempo**: due ore.

**Soluzioni del compito A**

1. (a) Si ha $z = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}$ .

   (b) Utilizzando la forma trigonometrica di $z$ e la formula di De Moivre, si ha

$$z^{28} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right)^{28} = \cos\frac{28\pi}{3} + \sin\frac{28\pi}{3} \, .$$

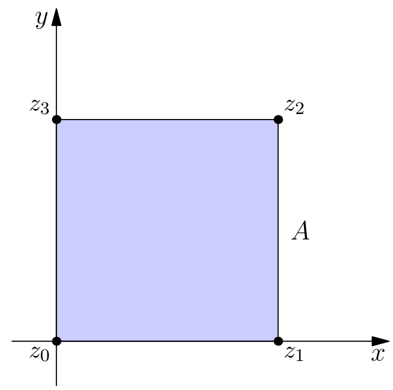
   Poiché

$$\frac{28\pi}{3} = \frac{(4+24)\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 8\pi \, ,$$

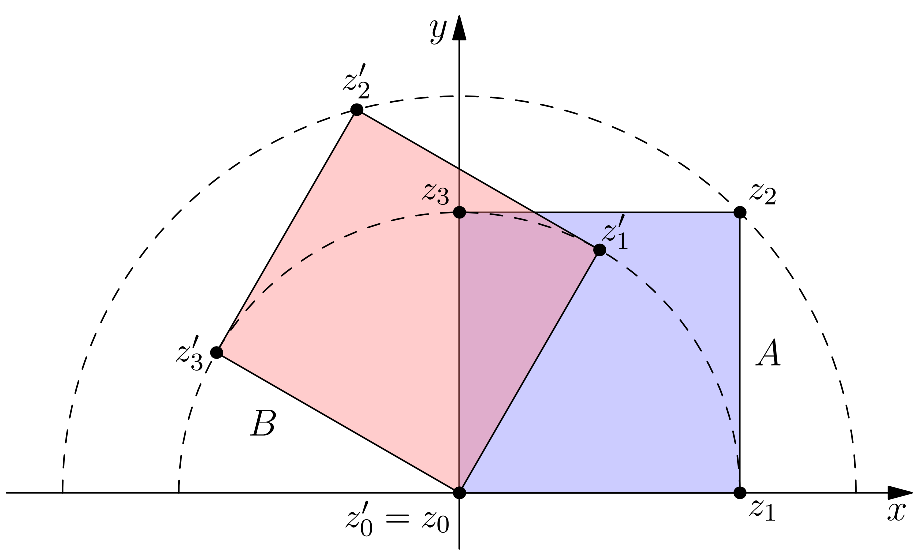
   si ha

$$z^{28} = \cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = -z \, .$$

   (c) L'insieme $A$ è il quadrato di vertici $z_0 = 0$ , $z_1 = 1$ , $z_2 = 1 + \mathbf{i}$ , $z_3 = \mathbf{i}$ .

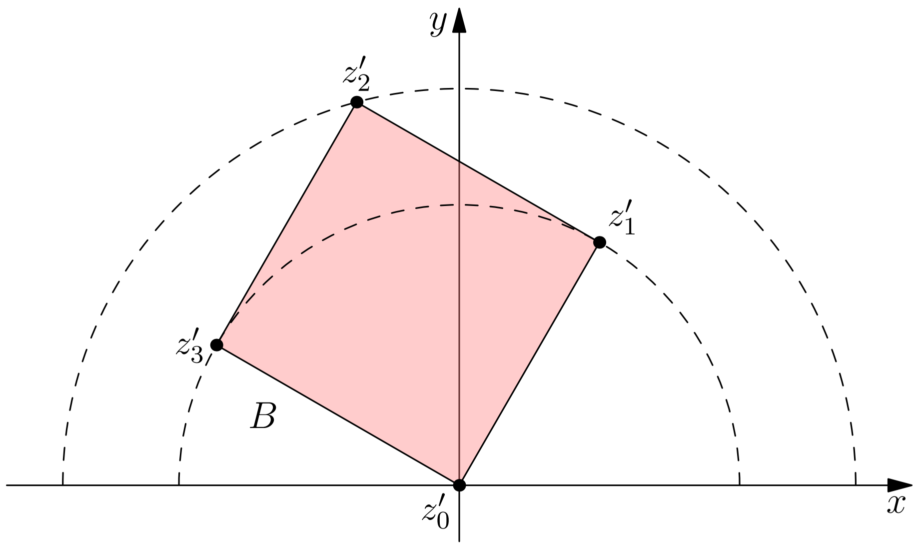



   L'insieme $B$ si ottiene moltiplicando ogni elemento di $A$ per il numero complesso $z$ , che ha modulo $1$ e argomento $\theta = \pi/3$ , ossia $B$ è l'insieme che si ottiene ruotando di un angolo $\theta = \pi/3$ , in senso antiorario attorno all'origine, l'insieme $A$ :



Quindi $B$ è il quadrato di vertici

$$z_0' = 0$$
$$z_1' = \cos\frac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2' = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathbf{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{i}$$
$$z_3' = \cos\frac{5\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}+\mathbf{i}}{2}\,.$$



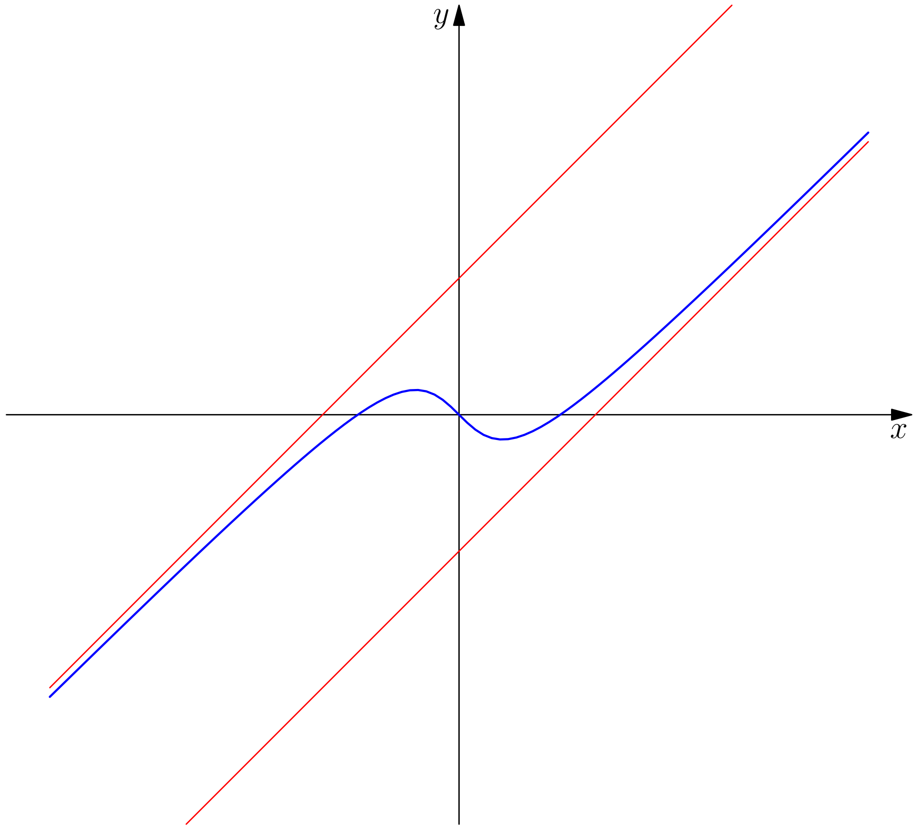

2. (a) Asintoto obliquo per $x \to +\infty$: $y = x - \pi$.
   Asintoto obliquo per $x \to -\infty$: $y = x + \pi$

   (b)

$$f'(x) \;=\; 1 - \frac{2}{1+x^2} \;=\; \frac{x^2-1}{x^2+1}\,.$$

   Quindi, $x_1 = -1$ è l'unico punto di massimo locale (il massimo locale è $f(-1) = -1 + \pi/2$) e $x_1 = 1$ è l'unico punto di minimo locale (il minimo locale è $f(1) = 1 - \pi/2$).

Grafico funzione:




3. (a) Affinché la funzione data sia definita si deve avere

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2-x} \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ x \leq 1\,. \end{cases}$$

Quindi $D = [0,1]$.

(b) La funzione $f$ è crescente essendo il prodotto di due funzioni positive crescenti. Equivalentemente, si ha

$$f'(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x}}\,\frac{1}{(2-x)^2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{1-x}} + \left(1+\sqrt{\frac{x}{2-x}}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}} \geq 0$$

per ogni $x \in (0,1)$.

(c) poiché $f$ è crescente e continua in $D$, i valori massimi e minimi verranno assunti agli estremi dell'intervallo $D$ su cui è definita. Poiché $f(0) = \mathrm{e}^{-1}$ e $f(1) = 2$, si ha $\operatorname{Im} f = [\mathrm{e}^{-1}, 2]$.

4. (a)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 = f(1)\,.$$

Quindi $f(x)$ è continua in $x_0 = 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(b)

$$f'_-(1) = a\,.$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \frac{1}{2}\,.$$

L'ultimo limite con De l'Hospital. Dato che $f(x)$ è continua in $x_0 = 1$, si ha che $f(x)$ è derivabile in $x_0 = 1$ per $a = 1/2$.