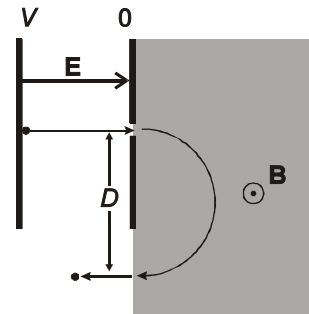




Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. Sostituire i valori numerici solo alla fine, dopo aver ricavato le espressioni letterali. Indicare nome e cognome (in stampatello) e matricola su ogni foglio.

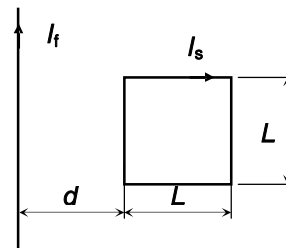
Elettrostatica e Magnetostatica

1. Alcune particelle (massa m , carica $q > 0$) inizialmente ferme vengono accelerate da una differenza di potenziale $V > 0$. Poi entrano in una regione in cui vi è un campo magnetico uniforme B , ortogonale alla loro traiettoria iniziale, diretto come in figura. Dopo avere percorso una semicirconfenza le particelle escono dalla regione con il campo magnetico ad una distanza D dal punto di ingresso.
 - a) Determinare la velocità delle particelle all'ingresso e all'uscita della regione in cui è presente campo magnetico.
 - b) Ricavare l'espressione della distanza D .
 - c) Indicare in che modo l'apparato va modificato per funzionare con particelle cariche negativamente.



2. Un sistema è costituito da due cariche elettriche puntiformi q_1 e q_2 poste a distanza d .
 - a) Dare l'espressione vettoriale della forza elettrica agente su una carica q_3 posta in un generico punto del segmento congiungente le due cariche.
 - b) Determinare il punto di tale segmento in cui la forza si annulla, nell'ipotesi $q_1 = 9q_2$. Stabilire se questo rappresenta un punto di equilibrio stabile o instabile per q_3 .
 - c) Determinare l'energia potenziale elettrica della carica q_3 posta in questo punto.
3. Si è visto sperimentalmente che, mettendo in contatto una sfera isolata con la carica Q ed una sfera ad essa uguale ed inizialmente scarica, la carica della prima sfera si dimezza. Lo stesso tipo di fenomeno può essere osservato tenendo molto distanti le due sfere e collegandole con un filo conduttore.
 - a) Si dica cosa succederebbe in quest'ultimo caso se si collegasse la prima sfera con una seconda di raggio doppio.
 - b) Sia $C_F = 15 \times 10^{-12}$ F la capacità della gabbia di Faraday, assimilabile ad un condensatore cilindrico. L'armatura esterna è posta a terra. Determinare la carica totale presente sulle sfere di raggio minore supponendo che il trasformatore abbia prelevato 1/100 della carica presente sulla superficie di quest'ultima e che tale carica induca ai capi dell'elettrometro una differenza di potenziale pari a 25 V.
 - c) Dire quale tensione misura l'elettrometro nel caso in cui invece di quella esterna venga messa a terra l'armatura interna.

4. Una spira quadrata indeformabile di lato $L = 5$ cm è percorsa da una corrente elettrica di intensità $I_s = 4$ A. Complanare con la spira e alla distanza $d = 20$ cm da uno dei suoi lati, un filo rettilineo ed infinitamente esteso (anch'esso indeformabile) è percorso da una corrente elettrica di intensità pari a $I_f = 10$ A.
 - a) Calcolare la risultante delle forze agenti sulla spira.
 - b) Con i versi delle correnti indicati in figura, la spira viene attratta o respinta dal filo?
 - c) Calcolare la risultante delle forze agenti sul filo.
($\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7}$ Wb²·N⁻¹·m⁻²)



Esercizio 1

a) Applicando il principio di conservazione dell'energia delle particelle:

$$E_k^i + E_p^i = E_k^f + E_p^f$$

si ottiene

$$\Delta E_k = -\Delta E_p = qV .$$

All'istante iniziale le particelle cariche hanno energia cinetica $E_k^i = 0$, da cui si ricava che l'energia cinetica E_k^f di ogni particella carica che raggiunge con velocità v la regione in cui è presente campo magnetico vale:

$$E_k^f = qV = \frac{1}{2}mv^2,$$
$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} .$$

Nella regione in cui è presente campo magnetico, essendo \mathbf{B} perpendicolare alla velocità, il moto delle particelle è circolare uniforme, con accelerazione centripeta a_{cp} costante ottenuta dall'espressione della forza di Lorentz:

$$F = ma_{cp} = qvB .$$

La forza di Lorentz non compie lavoro sulla particella, quindi non ne modifica l'energia cinetica e il modulo della velocità.

b) L'accelerazione centripeta di un corpo in moto circolare uniforme è legata al raggio R dell'orbita:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{2qV}{mR}$$

per cui si ottiene:

$$2R = D = \frac{4V}{vB} = \frac{\sqrt{8V}}{B} \sqrt{\frac{m}{q}}.$$

c) Per far compiere a particelle cariche negativamente la stessa traiettoria indicata nella figura dell'esercizio bisogna utilizzare una differenza di potenziale V *negativa* e un campo magnetico \mathbf{B} *entrante* nel piano del foglio.

Esercizio 2

a) Sia X l'asse che ha per direzione quella della retta che unisce le due cariche. La coordinata x indichi la posizione della carica q_3 . La carica q_1 si trovi nell'origine di X , mentre la carica q_2 si trovi nel punto di coordinata $x = d$. La forza totale che agisce su q_3 è la somma vettoriale delle forze di Coulomb dovute all'interazione elettrostatica di q_3 con q_1 e q_2 , considerate singolarmente. Tale forza ha componente non nulla solo nella direzione X . Tale componente F_X ha la seguente espressione (valida in modulo e segno indipendentemente dal segno delle cariche):

$$F_X = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_3}{x^2} - \frac{q_2 q_3}{(x-d)^2} \right].$$

b) Il punto \bar{x} in cui la forza si annulla è dato da:

$$F_X = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{\bar{x}^2} = \frac{q_2}{(\bar{x}-d)^2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3}{4}d \text{ oppure } \bar{x} = \frac{3}{2}d.$$

La seconda soluzione corrisponde ad una posizione che non si trova sul segmento che congiunge le cariche q_1 e q_2 e va quindi scartata poiché in quel punto l'espressione di F_X di cui al punto a) non è più valida. In \bar{x} la carica q_3 , vincolata a muoversi lungo il segmento congiungente q_1 e q_2 , si trova in un punto di equilibrio *stabile* quando q_1 , q_2 e q_3 hanno lo stesso segno, mentre l'equilibrio è *instabile* quando q_1 , q_2 hanno segno opposto a q_3 . Questo perché nel primo caso per ogni piccolo spostamento dalla posizione di equilibrio la forza totale tende a riportare la carica in \bar{x} , mentre nel secondo ad allontanarla ulteriormente; essendo la forza elettrostatica conservativa, ciò corrisponde al fatto che il punto \bar{x} è un punto di minimo relativo dell'energia potenziale nel primo caso e di massimo relativo nel secondo.

c) L'energia potenziale elettrica di q_3 posta nel punto di coordinata \bar{x} è la somma delle energie potenziali dovute all'interazione con le cariche q_1 e q_2 prese singolarmente. L'espressione dell'energia potenziale E_p di q_3 è quindi pari a (indipendentemente dal segno delle cariche):

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_3}{|\bar{x}|} + \frac{q_2 q_3}{|\bar{x}-d|} \right] = \frac{4}{\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{d}.$$

Esercizio 3

a) Due sfere sufficientemente distanti esercitano effetti di mutua induzione trascurabili. Quindi le due sfere si portano ad un potenziale pari rispettivamente a:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1},$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2},$$

con Q pari alla carica e R pari al raggio della sfera. Collegando le due sfere con un filo conduttore, si impone la condizione $V_1 = V_2$, da cui si ottiene:

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}.$$

Da $R_1 = 2R_2$ si ottiene $Q_1 = 2Q_2$.

b) Sia q la carica prelevata dal trasferitore. Sapendo che $100q = Q_2$ e che $V_{\text{elett.}} = 25 \text{ V} = q/C_F$, si ricava

$$Q_2 = 3.75 \times 10^{-8} \text{ C}.$$

c) Mettendo a massa l'armatura interna della gabbia di Faraday si scherma l'armatura esterna dalla carica contenuta all'interno della gabbia. Pertanto, l'elettrometro misurerebbe una differenza di potenziale nulla fra le due armature.

Esercizio 4

a) Per simmetria, le linee di forza del campo magnetico \mathbf{B} generato dal filo rettilineo sono delle circonferenze con centro sul filo stesso e giacenti in piani ad esso perpendicolari. Applicando il teorema della circuitazione si ricava che il modulo B del campo magnetico generato dal filo ha il seguente valore:

$$B = \frac{\mu_0 I_f}{2\pi r},$$

dove r è la distanza dal filo. Il campo magnetico \mathbf{B} , in corrispondenza della spira, è diretto dall'osservatore verso la pagina ed è perpendicolare al piano della spira stessa.

I due lati della spira perpendicolari al filo sono percorsi da correnti di verso opposto. Le forze applicate a ciascuno di essi hanno stesso modulo, sono parallele al filo rettilineo e hanno versi opposti l'una rispetto all'altra. La loro risultante è quindi nulla.

La forza esercitata su ciascuno dei due lati della spira paralleli al filo vale:

$$\mathbf{F} = I_s \mathbf{L} \times \mathbf{B},$$

ovvero

$$F = L \frac{\mu_0 I_s I_f}{2\pi d} \quad \text{per il lato più vicino al filo,}$$

$$F = L \frac{\mu_0 I_s I_f}{2\pi(d+L)} \quad \text{per il lato più lontano dal filo.}$$

Tali forze sono perpendicolari al filo. Nei due lati della spira la corrente ha verso opposto. La risultante delle forze agenti sulla spira è diretta verso il filo e ha modulo pari a:

$$F_{\text{tot}} = L \frac{\mu_0 I_s I_f}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L} \right) = 4 \times 10^{-7} \text{ N}$$

- b) Con i versi delle correnti indicati in figura il lato della spira viene attratto dal filo (correnti concordi), mentre quello più lontano ne viene respinto. Siccome la forza è inversamente proporzionale alla distanza, la spira viene attratta dal filo.
- c) Per il principio di azione e reazione, la forza che la spira esercita sul filo è uguale in modulo e direzione ma opposta in verso a quella che il filo esercita sulla spira.