Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	T.	Totale

Analisi e Geometria 1 **COMPITO A**	**Docenti: P. Antonietti, F. Cipriani, F. Colombo, F. Lastaria, G. Mola, E. Munarini, P.Terenzi, C. Visigalli**	**11/11/2008** **Ing. Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi: Es.1=6 punti, Es.2=12 punti, Es.3=6 punti, Es.4=6 punti.

Tempo: due ore. **Punteggio minimo per superare la prova**: 18 punti.

1. Utilizzando il teorema degli zeri stabilire se la seguente equazione

$$xe^x - \sin x = 2x^2 e^x (x - \pi) + 1$$

ha soluzioni in $[0, \pi]$.

Soluzione

Introduciamo la funzione ausiliaria

$$F(x) := xe^x - \sin x - 2x^2 e^x (x - \pi) - 1.$$

Osseviamo che

1) $[0, \pi]$ è un intervallo chiuso e limitato,

2) $F \in C^0([0, \pi])$,

3) $F(0)F(\pi) < 0$, in quanto

$$F(0) = -1 < 0, \quad F(\pi) = \pi e^{\pi} - 1 > 0$$

quindi per il teorema degli zeri esiste $\alpha \in (0, \pi)$ tale che $F(\alpha) = 0$.

2. • Studiare la funzione

$$f(x) = 3 - \arctan \frac{x^2}{x-1}$$

senza lo studio della derivata seconda e tracciare il grafico.

• Calcolare poi la derivata seconda e scrivere poi il polinomio di Mac Laurin di grado due.

Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

Dominio di f: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
Intersezioni del grafico di f **con l'asse** y : $f(0) = 3$
Limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 - \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 + \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3 - \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3 + \frac{\pi}{2}$
Derivata prima: $f'(x) =- \dfrac{1}{1+\dfrac{x^4}{(x-1)^2}} \dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{2x-x^2}{x^4+(x-1)^2}$
Dominio di f': $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
Segno di f': $f' \geq 0 \;\Leftrightarrow 2x - x^2 \geq 0$.
Punti di massimo e minimo locali: $x = 0$ minimo, $x = 2$ massimo
Derivata seconda: $f''(x) = 2\dfrac{x^5-3x^4-x+1}{[(x-1)^2+x^4]^2}$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$.
Polinimo di Mac Laurin: $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 3 + x^2$.

3. Determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\sqrt{x}(e^x-1)\sin x^3}{[\sin x]^\alpha},$$

al variare del parametro reale α.

Soluzione

Utilizzando i limiti notevoli (oppure gli sviluppi di Mac Laurin), si vede facilmente che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\sqrt{x}(e^x-1)\sin x^3}{[\sin x]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^{1/2}x\frac{e^x-1}{x}x^3\frac{\sin x^3}{x^3}}{[\sin x]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^{4+1/2}}{[\sin x]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^{4+1/2}}{x^\alpha} =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad \alpha < 9/2, \\ 3 \quad \text{se} \quad \alpha = 9/2, \\ +\infty \quad \text{se} \quad \alpha > 9/2. \end{cases}$$

4. Risolvere la seguente equazione:

$$(|z|^2 + |z| - 6)(z^3 - i) = 0, \quad \textit{dove} \quad z = x + iy$$

e disegare le soluzioni nel piano di Gauss.

Soluzione

Per la legge di annullamento del prodotto si ha

$$|z|^2 + |z| - 6 = 0, \qquad\qquad z^3 - i = 0.$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado in $|z|$ e otteniamo

$$|z| = 2 \quad e \quad |z| = -3.$$

Solo $|z| = 2$ è accettabile e rappresenta tutti i punti della circonferenza di centro zero e raggio uguale a 2. Resta da risolvere $z^3 - i = 0$:

$$z_k = \cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

5. Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	T.	Totale

Analisi e Geometria 1 **COMPITO B**	**Docenti: P. Antonietti, F. Cipriani, F. Colombo, F. Lastaria, G. Mola, E. Munarini, P.Terenzi, C. Visigalli**	**11/11/2008** **Ing. Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi: Es.1=6 punti, Es.2=12 punti, Es.3=6 punti, Es.4=6 punti.

Tempo: due ore. **Punteggio minimo per superare la prova**: 18 punti.

1. Utilizzando il teorema degli zeri stabilire se la seguente equazione

$$x^3 e^{2x} - \sin x = 2x^2 e^x (x - \pi) + 2$$

ha soluzioni in $[0, \pi]$.

Soluzione

Introduciamo la funzione ausiliaria

$$F(x) := x^3 e^{2x} - \sin x - 2x^2 e^x (x - \pi) - 2.$$

Osseviamo che

1) $[0, \pi]$ è un intervallo chiuso e limitato,

2) $F \in C^0([0, \pi])$,

3) $F(0)F(\pi) < 0$, in quanto

$$F(0) = -2 < 0, \quad F(\pi) = \pi^3 e^{2\pi} - 2 > 0$$

quindi per il teorema degli zeri esiste $\alpha \in (0, \pi)$ tale che $F(\alpha) = 0$.

2. • Studiare la funzione

$$f(x) = -3 + \arctan \frac{x^2}{x-1}$$

senza lo studio della derivata seconda e tracciare il grafico.

• Calcolare poi la derivata seconda e scrivere poi il polinomio di Mac Laurin di grado due.

Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

Dominio di f: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
Intersezioni del grafico di f **con l'asse** y : $f(0) = -3$
Limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -3 + \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -3 - \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -3 + \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -3 - \frac{\pi}{2}$
Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^4}{(x-1)^2}} \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{x^4 + (x-1)^2}$
Dominio di f': $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
Segno di f': $f' \geq 0 \;\Leftrightarrow -2x + x^2 \geq 0$.
Punti di massimo e minimo locali: $x = 0$ massimo, $x = 2$ minimo
Derivata seconda: $f''(x) = -2\dfrac{x^5 - 3x^4 - x + 1}{[(x-1)^2 + x^4]^2}$, $f(0) = -3$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2$.
Polinimo di Mac Laurin: $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = -3 - x^2$.

3. Determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5\sqrt{x}(e^x-1)\sin x^5}{[\sin x]^\alpha},$$

al variare del parametro reale α.

Soluzione

Utilizzando i limiti notevoli (oppure gli sviluppi di Mac Laurin), si vede facilmente che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5\sqrt{x}(e^x-1)\sin x^5}{[\sin x]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x^{1/2}x\frac{e^x-1}{x}x^5\frac{\sin x^5}{x^5}}{[\sin x]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x^{6+1/2}}{[\sin x]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x^{6+1/2}}{x^\alpha} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha < 13/2, \\ 5 & \text{se} \quad \alpha = 13/2, \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha > 13/2. \end{cases}$$

4. Risolvere la seguente equazione:

$$(|z|^2 + 2|z| - 15)(z^3 + 1) = 0, \quad dove \quad z = x + iy$$

e disegare le soluzioni nel piano di Gauss.

Soluzione

Per la legge di annullamento del prodotto si ha

$$|z|^2 + 2|z| - 15 = 0, \qquad\qquad z^3 + 1 = 0.$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado in $|z|$ e otteniamo

$$|z| = 3 \quad e \quad |z| = -5.$$

Solo $|z| = 3$ è accettabile e rappresenta tutti i punti della circonferenza di centro zero e raggio uguale a 3. Resta da risolvere $z^3 + 1 = 0$:

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

5. Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione inversa.