Curve

1. Sia γ la curva di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

con $-\pi \leq t \leq \pi$. Stabilire se γ è chiusa; calcolare il vettore tangente e il suo modulo; stabilire se γ è regolare.

2. Sia γ la curva piana di equazione polare $\rho = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ per $\theta \in [0, 2\pi]$. Scrivere le equazioni parametriche di γ; stabilire se la curva è chiusa; calcolare il vettore tangente e il suo modulo; stabilire se la curva è regolare.

3. Calcolare la lunghezza della curva γ di equazione vettoriale $\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + t^3\underline{j},\ -1 \leq t \leq 1$.

4. Calcolare la lunghezza della curva γ di equazione cartesiana $y = \log x,\ 1 \leq x \leq \sqrt{3}$.

5. Calcolare la lunghezza della curva γ di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin t \qquad \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ z = \log(3 \sin t) \end{cases}$$

6. Calcolare la lunghezza della curva γ di equazione cartesiana $y = e^x,\ 0 \leq x \leq 1$.

7. Calcolare la lunghezza della curva γ di equazione polare $\rho = e^{-\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

8. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva γ di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = -3 \cos t \\ z = 4t \end{cases}$$

nel punto P di γ corrispondente al valore del parametro $t = 0$.

9. Calcolare la lunghezza della curva γ di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

con $-\pi \leq t \leq \pi$.

Soluzioni

1. Si ha che $\gamma(-\pi) = (-1, -\pi)$, $\gamma(\pi) = (-1, \pi)$, dunque la curva non è chiusa; $\gamma'(t) = (t\cos t, t\sin t)$; $|\gamma'(t)| = |t|$; la curva non è regolare nel punto $(1, 0)$.

2. Le equazioni parametriche di γ sono:

$$\begin{cases} x = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta \\ y = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta \end{cases}$$

La curva è chiusa: $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (0, 0)$;
$\gamma'(\theta) = \left(\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\theta - \sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\theta, \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\theta + \sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\theta\right)$; $|\gamma'(\theta)| = \left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$, la curva non è regolare in $(0, 0)$.

3. $L = \displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{4t^2 + 9t^4}\,dt = \int_{-1}^{1}|t|\sqrt{4 + 9t^2}\,dt = 2\int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2}\,dt = \frac{2}{27}(13\sqrt{13} - 8)$

4. $L = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t^2}{t^2 - 1}\,dt = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} - \log 3\right)$ (si è effettuata la sostituzione $\sqrt{1 + x^2} = t$)

5. $L = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{2}\log 3$ (si è effettuata la sostituzione $\tan\dfrac{t}{2} = s$)

6. $L = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{1+e^2}}{\sqrt{1+e^2}} + \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ (si è effettuata la sostituzione $\sqrt{1+e^{2x}} = t$)

7. $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{-2\theta}}\,d\theta = \sqrt{2}(1-e^{-2\pi})$

8. Si ha che $P = (0,-3,0)$ e che il vettore tangente alla curva in P è $(2,0,4)$, dunque le equazioni della retta tangente sono:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 \\ z = 4t \end{cases}$$

9. $L = \int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt = \pi^2$