Rette e piani

1. Scrivere l'equazione del piano passante per i punti $A = (2, 1, 0), B = (3, 0, 0), C = (0, 0, 1)$.

2. Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $P = (1, 1, 0)$ e parallelo al piano di equazione $x - z + 1 = 0$.

3. Scrivere l'equazione del piano passante per $A = (3, 0, 1), B = (2, 2, 2)$ e parallelo alla direzione $(1, 1, 0)$.

4. Determinare la distanza tra i piani π, π' di equazioni $x - y + 4z = 0$ e $x - y + 4z - 9 = 0$ rispettivamente.

5. Scrivere l'equazione del piano assiale del segmento di estremi $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 2, 0)$.

6. Stabilire se i punti $A = (1, 1, 1), B = (0, 1, 0), C(0, 2, 1), D = (0, 0, 0)$ sono complanari.

7. Siano date le rette

$$r \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad s \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

Scrivere le equazioni parametriche di r e le equazioni cartesiane di s.

8. Scrivere le equazioni parametriche della retta congiungente i punti $A = (1, 1, 1)$ e $B = (2, 3, 5)$.

9. Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $Q = (1, -1, 0)$, incidente la retta $s : x = y = z$ e parallela al piano $\pi : 2x - y + 4 = 0$.

10. Scrivere le equazioni della retta r che passa per il punto $P = (1, 1, 1)$, è perpedicolare alla retta s di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

ed è parallela al piano π di equazione $x + 3y = 0$.

11. Scrivere le equazioni della retta incidente e perpendicolare ad entrambe le rette:

$$r \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad s \begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 2s \end{cases}$$

12. Calcolare la distanza del punto $P = (2, 0, 1)$ dalla retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

13. Verificare se le rette:

$$r \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad s \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

sono incidenti, parallele o sghembe. Calcolarne la distanza.

14. Trovare il punto Q simmetrico di $P = (4, 0, 16)$ rispetto alla retta r intersezione di $\pi : x + y - 3z = 8$ e $\chi : 3x - y + 2z = 0$.

Soluzioni

1. $x + y + 3z - 3 = 0$

2. $x - z - 1 = 0$

3. $x - y + 3z - 6 = 0$

4. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

5. $x + 2y - z - 3 = 0$

6. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC} \neq 0$, allora i punti dati non sono complanari.

7. Una rappresentazione parametrica di r è:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = -2t \end{cases}$$

Una rappresentazione cartesiana di s è:

$$\begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

8. La retta ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

9. La retta r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

10. La retta ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 - 9t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

11. La retta ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{4}{5}t \\ y = -\frac{2}{5}t \\ z = \frac{2}{5} \end{cases}$$

12. Il piano passante per P e ortogonale a r ha equazione: $x - y - z - 1 = 0$; esso interseca r nel punto $H = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, allora la distanza di P da r vale $PH = \frac{\sqrt{24}}{3}$.

13. Le rette sono parallele; $d(r, s) = d(P, s)$, dove P è un qualunque punto di r, per esempio $P = (0, 0, 1)$. L'equazione del piano per P ortogonale a s è: $x + 2y - z + 1 = 0$; esso interseca s in $H = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{13}{6}\right)$. La distanza tra le due rette è pari a $d(P, H) = \frac{\sqrt{66}}{6}$.

14. La retta r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -16 + 11t \\ z = -8 + 4t \end{cases}$$

Il piano per P perpendicolare a r interseca r nel punto $H = (2, 6, 0)$; H è il punto medio del segmento PQ, dunque $Q = (0, 12, -16)$.