

MICHELA ELEUTERI

# ANALISI MATEMATICA

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

*Trasformazioni di coordinate, campi vettoriali, superfici*



A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica  
non assomigli al papà 😊



---

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali</b> | <b>5</b>  |
| 1.1      | Limiti, continuità e differenziabilità . . . . .                               | 5         |
| 1.2      | Teorema di inversione locale . . . . .   | 9         |
| 1.3      | Esercizi riguardanti la matrice Jacobiana . . . . .                            | 11        |
| 1.3.1    | Esercizi proposti . . . . .  | 11        |
| 1.3.2    | Esercizi senza soluzione . . . . .   | 21        |
| <b>2</b> | <b>Campi vettoriali</b>  | <b>25</b> |
| 2.1      | Campi vettoriali . . . . .   | 25        |
| 2.2      | Linee integrali . . . . .  | 26        |
| 2.3      | Operatore rotore e operatore divergenza . . . . .                              | 27        |
| 2.3.1    | L'operatore rotore . . . . .   | 27        |
| 2.3.2    | L'operatore divergenza . . . . .   | 28        |
| 2.4      | Campi vettoriali conservativi . . . . .  | 29        |
| 2.5      | Domini connessi o semplicemente connessi . . . . .                             | 33        |
| 2.6      | Lavoro o integrale di linea di un campo vettoriale . . . . .                   | 34        |
| 2.7      | Lavoro di un campo conservativo . . . . .                                      | 37        |
| 2.8      | Il linguaggio delle forme differenziali . . . . .                              | 40        |
| 2.9      | Formula di Gauss-Green nel piano . . . . .                                     | 40        |
| 2.9.1    | Calcolo di aree mediante integrali curvilinei . . . . .                        | 43        |
| 2.9.2    | Calcolo di integrali doppi espressi mediante integrali di linea . . . . .      | 44        |
| 2.10     | Esercizi proposti . . . . .  | 45        |
| 2.10.1   | Rotore e divergenza . . . . .  | 45        |
| 2.10.2   | Campi vettoriali . . . . .   | 54        |
| 2.10.3   | Formula di Gauss-Green . . . . .   | 86        |
| <b>3</b> | <b>Superfici e integrali superficiali</b>                                      | <b>93</b> |
| 3.1      | Superfici in forma parametrica . . . . .                                       | 93        |
| 3.2      | Superfici regolari in forma parametrica . . . . .                              | 94        |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 3.2.1 | Superfici cartesiane (grafico di una funzione di due variabili) . . . . .   | 95  |
| 3.2.2 | Superfici di rotazione . . . . .  | 96  |
| 3.3   | Retta e piano normale, retta e piano tangente . . . . .                     | 98  |
| 3.3.1 | Caso della superficie in $\mathbb{R}^3$ . . . . .                           | 98  |
| 3.3.2 | Caso della curva in $\mathbb{R}^2$ . . . . .                                | 99  |
| 3.3.3 | Caso della curva in $\mathbb{R}^3$ . . . . .                                | 100 |
| 3.4   | Area e integrali di superficie . . . . .                                    | 104 |
| 3.4.1 | Area di una superficie . . . . .  | 104 |
| 3.4.2 | Integrale di superficie di una funzione continua . . . . .                  | 107 |
| 3.5   | Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie . . . . .           | 108 |
| 3.5.1 | Superfici orientate. Bordo di una superficie. . . . .                       | 109 |
| 3.5.2 | Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata . . . . . | 110 |
| 3.6   | Teorema della divergenza . . . . .  | 112 |
| 3.7   | Il teorema di Stokes o del rotore . . . . .                                 | 115 |
| 3.8   | Esercizi proposti . . . . .   | 117 |
| 3.8.1 | Integrali di superficie . . . . .   | 117 |
| 3.8.2 | Flusso di un campo attraverso una superficie. Teorema della divergenza .    | 121 |
| 3.8.3 | Teorema del rotore . . . . .  | 125 |

---

---

# CAPITOLO 1

---

## Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali

In questo capitolo andremo a studiare funzioni di più variabili a valori vettoriali, cioè oggetti del tipo  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n, m > 1$ . In particolare lavoreremo con:

- 1) trasformazioni di coordinate;
- 2) campi vettoriali, cioè funzioni  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;
- 3) superfici in forma parametrica in  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.1. Limiti, continuità e differenziabilità per funzioni di più variabili a valori vettoriali

---

Vogliamo ora studiare i concetti di limite, continuità e differenziabilità per funzioni di più variabili a valori vettoriali. È chiaro che si riuniscono qui due fatti: le nozioni di limite, continuità e differenziabilità per funzioni reali di più variabili e il fatto che in generale, per studiare una funzione a valori vettoriali si può ragionare componente per componente.

□ **Definizione 1.1.1.** Sia  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definita almeno in un intorno del punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , salvo al più il punto  $\mathbf{x}_0$  stesso e sia  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$ . Allora si dice che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

se accade

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| = 0.$$

Se  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , possiamo scrivere

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \quad \text{con } f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ per } i = 1, 2, \dots, m.$$

Le funzioni  $f_i$  si diranno COMPONENTI di  $\mathbf{f}$  e sono funzioni reali di più variabili. Analogamente a quanto visto per funzioni di una variabile a valori vettoriali, si dimostra che il limite si calcola componente per componente

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) = \left( \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \dots, \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x}) \right).$$

In maniera naturale si introduce il concetto di FUNZIONE CONTINUA e si dimostra che una funzione  $\mathbf{f}$  è continua se e soltanto se lo sono tutte le sue componenti. Quindi sia la nozione di limite che quella di continuità si riconducono alle analoghe nozioni per funzioni di più variabili a valori reali.

□ **Definizione 1.1.2.** Diremo che  $\mathbf{f}$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  se tutte le componenti lo sono. Esplicitamente questo significa che per  $i = 1, 2, \dots, m$  valgono le relazioni

$$f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j + o(|\mathbf{h}|) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

Queste  $m$  relazioni si possono anche scrivere in maniera compatta in *forma matriciale*. Infatti rappresentando la funzione  $\mathbf{f}$  e i punti di  $\mathbb{R}^n$  come vettori colonna delle loro componenti si ha

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

A questo punto possiamo introdurre la MATRICE JACOBIANA di  $\mathbf{f}$  che ha per righe i gradienti delle componenti di  $\mathbf{f}$  calcolate nel punto  $\mathbf{x}_0$  (che si indica con  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0)$  oppure anche con  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)$ )

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x}_0).$$

Si nota che la matrice Jacobiana ha  $m$  righe e  $n$  colonne. Il determinante della matrice Jacobiana si dice JACOBIANO e si indica con la notazione  $J_{\mathbf{f}}$ . *Nel seguito, talvolta, con un abuso di notazione, si indicherà la matrice Jacobiana e lo Jacobiano con la stessa notazione.*

Allora la differenziabilità si può riscrivere usando la relazione

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

In questo caso dunque la quantità  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$  indica il prodotto matriciale (quindi righe per colonne) tra la matrice Jacobiana di  $\mathbf{f}$  calcolata in  $\mathbf{x}_0$  e l'incremento  $\mathbf{h}$  (che è un vettore).



□ **Definizione 1.1.3.** Il DIFFERENZIALE di  $\mathbf{f}$  (calcolato in  $\mathbf{x}_0$ ) è la funzione lineare  $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definita da:

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}.$$

Ragionando componente per componente e applicando la condizione sufficiente per la differenziabilità delle funzioni a valori reali, si ottiene il seguente teorema.

**Teorema 1.1.4.** *Condizione sufficiente affinché una funzione  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $A$  aperto sia differenziabile in  $A$  è che tutti gli elementi della sua matrice Jacobiana siano funzioni continue in  $A$ .*

Anche nel caso vettoriale naturalmente è vero che se  $\mathbf{f}$  è differenziabile allora è derivabile e continua, ma il viceversa non vale.

La nozione di matrice Jacobiana permette di enunciare il teorema della differenziazione di funzioni composte in un'unica forma che comprende i casi particolari già trattati.

**Teorema 1.1.5.** *Siano  $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{g} : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  e supponiamo che la funzione composta  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  sia ben definita almeno in un intorno  $C$  di  $\mathbf{x}_0 \in A$ , cioè si abbia  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Supponiamo che  $\mathbf{f}$  sia differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{g}$  sia differenziabile in  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Allora anche la composta  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  risulta differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e la sua matrice Jacobiana si ottiene come prodotto matriciale delle matrici Jacobiane di  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ , calcolate nei punti  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  rispettivamente, cioè*

$$\mathbf{J}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

🔗 **Esempio 1.1.6.** Siano  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  date da

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(u, v, w) &= (u + v, e^w) & \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{G}(x, y) &= (y - x, \sin x) & \forall (x, y) \in [0, 2\pi]^2. \end{aligned}$$

Le composizioni  $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$  hanno senso? Per quella (o quelle) che lo avessero, si calcoli la matrice Jacobiana.

La funzione composta  $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$  ha senso perché il codominio di  $\mathbf{F}$  coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di  $\mathbf{G}$ . La funzione composta  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$  non ha senso perché il codominio di  $\mathbf{G}$  ha dimensione 2 mentre il dominio di  $\mathbf{F}$  ha dimensione 3.

Si ha  $\mathbf{H} := \mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\mathbf{H}(u, v, w) = (e^w - u - v, \sin(u + v))$ .

Poniamo

$$H_1(u, v, w) = e^w - u - v \quad H_2(u, v, w) = \sin(u + v).$$

La funzione  $\mathbf{H}$  è differenziabile in tutti i punti di  $\mathbb{R}^3$  perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti.

Primo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $\mathbf{H}$ .

Si ha

$$J_{\mathbf{H}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial u} & \frac{\partial H_1}{\partial v} & \frac{\partial H_1}{\partial w} \\ \frac{\partial H_2}{\partial u} & \frac{\partial H_2}{\partial v} & \frac{\partial H_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^w \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $\mathbf{H}$ .

Le funzioni  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  sono differenziabili in quanto lo sono tutte le loro componenti. Quindi ha senso calcolare le matrici Jacobiane di  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$ . Poniamo  $F_1(u, v, w) = u + v$ ,  $F_2(u, v, w) = e^w$ ,  $G_1(x, y) = y - x$  e  $G_2(x, y) = \sin x$ . Quindi si ha

$$J_{\mathbf{F}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}$$

$$J_{\mathbf{G}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto la matrice Jacobiana di  $\mathbf{G}$  va calcolata nel punto  $\mathbf{F}(u, v, w) = (u + v, e^w)$  e si ha dunque

$$J_{\mathbf{G}}[\mathbf{F}(u, v, w)] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{H}}(u, v, w) &:= J_{\mathbf{G}}[\mathbf{F}(u, v, w)] \cdot J_{\mathbf{F}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^w \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 1.2. Teorema di inversione locale

□ **Definizione 1.2.1.** Una funzione  $f : A \rightarrow B$  con  $A, B$  aperti di  $\mathbb{R}^n$  si dice **INIETTIVA** se

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A, \quad f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2.$$

$f$  si dice **SURIETTIVA** su  $B$  se

$$\forall \mathbf{y} \in B, \exists \mathbf{x} \in A \text{ tale che } f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

Infine  $f$  si dice **BIETTIVA** O **BIUNIVOCA** se è iniettiva e suriettiva, ossia

$$\forall \mathbf{y} \in B, \exists! \mathbf{x} \in A \text{ tale che } f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

In tal caso la corrispondenza che associa ad ogni  $\mathbf{y} \in B$  questo elemento  $\mathbf{x} \in A$  univocamente determinato si dice **FUNZIONE INVERSA** di  $f$ .

Si ha il seguente risultato.

**Teorema 1.2.2.** (INVERSIONE LOCALE) *Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $A$  aperto tale che  $f \in \mathcal{C}^1(A)$ . Supponiamo che per un certo punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  si abbia  $\det \mathbf{J}f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Allora esistono un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  e un intorno  $V$  di  $f(\mathbf{x}_0)$  tra i quali la funzione  $f$  è biunivoca. Inoltre detta  $g : V \rightarrow U$  la corrispondenza inversa si ha che  $g \in \mathcal{C}^1(V)$  e*

$$\mathbf{J}g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{J}f(\mathbf{x})^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

Osserviamo che le corrispondenze di questo tipo risultano invertibili *solo localmente* anche se le ipotesi sono verificate in ogni punto del dominio. Questo è diverso dal caso unidimensionale per cui se  $f'(x) \neq 0$  allora  $f'$  ha segno costante e quindi  $f$  è strettamente monotona da cui  $f$  invertibile (globalmente).

□ **Definizione 1.2.3.** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una trasformazione di coordinate  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **DIFFEOMORFISMO** (O **DIFFEOMORFISMO GLOBALE**) se  $f \in \mathcal{C}^1(A)$ ,  $f$  globalmente invertibile in  $A$  e la sua inversa  $g : f(A) \rightarrow A$  è di classe  $\mathcal{C}^1(A)$  nel suo dominio  $f(A)$ .  $f$  si dice **DIFFEOMORFISMO LOCALE** se  $f \in \mathcal{C}^1(A)$  e per ogni  $\mathbf{x}_0 \in A$  ha un intorno  $U \subset A$  in cui  $f$  è invertibile con inversa di classe  $\mathcal{C}^1$ .

Il teorema di inversione locale garantisce che una trasformazione di coordinate  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $f \in \mathcal{C}^1(A)$  e  $\det \mathbf{J}f(\mathbf{x}) \neq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in A$  sia un diffeomorfismo locale in  $A$ . Se queste condizioni sono soddisfatte con l'eccezione di qualche punto di  $A$ , allora questi punti si diranno **PUNTI SINGOLARI** della trasformazione.

 **Esempio 1.2.4.** (COORDINATE POLARI NEL PIANO) Consideriamo la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta & \rho \in [0, +\infty) \\ y = \rho \sin \theta & \theta \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

con determinante  $\rho$ . Quindi la trasformazione è regolare con l'eccezione di  $\rho = 0$ . Se restringiamo dunque la trasformazione a

$$\mathbf{T}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \quad \text{in} \quad A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$$

otteniamo un diffeomorfismo globale tra  $A$  e il piano di  $\mathbb{R}^2$  privato della semiretta  $x \geq 0$  e  $y = 0$ .

 **Esempio 1.2.5.** (COORDINATE CILINDRICHE IN  $\mathbb{R}^3$ ) Consideriamo la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta & \rho \in [0, +\infty) \\ y = \rho \sin \theta & \theta \in [0, 2\pi) \\ z = t & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante  $\rho$ . Quindi la trasformazione è regolare con l'eccezione di  $\rho = 0$ . Se restringiamo dunque la trasformazione all'aperto

$$A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

otteniamo un diffeomorfismo globale tra  $A$  e  $\mathbb{R}^3$  privato della semiretta  $x \geq 0$  e  $y = 0$ .

 **Esempio 1.2.6.** (COORDINATE SFERICHE IN  $\mathbb{R}^3$ ) Consideriamo la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \in [0, +\infty) \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta & \theta \in [0, 2\pi) \\ z = \rho \cos \varphi & \varphi \in [0, \pi]. \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante  $\rho^2 \sin \varphi$ . Quindi la trasformazione è regolare con l'eccezione di  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$  e  $\rho = 0$ . Se restringiamo dunque la trasformazione all'aperto

$$A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$$

otteniamo un diffeomorfismo globale.

## 1.3. Esercizi riguardanti la matrice Jacobiana

### 1.3.1. Esercizi proposti

#### ✎ Esercizio 1.3.1.

Siano  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  date da

$$F(u, v, w) = (\sin u, vw) \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,$$

$$G(x, y) = (3x, e^{xy}) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si scriva esplicitamente la funzione composta  $G \circ F$  e se ne calcoli la matrice Jacobiana.

La funzione composta  $G \circ F$  ha senso perché il codominio di  $F$  coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di  $G$ .

Si ha  $H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $H(u, v, w) = (3 \sin u, e^{(vw) \sin u})$ .

Poniamo

$$H_1(u, v, w) = 3 \sin u \quad H_2(u, v, w) = e^{(vw) \sin u}.$$

La funzione  $H$  è differenziabile in tutti i punti di  $\mathbb{R}^3$  perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti.

Primo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $H$ .

Si ha

$$\begin{aligned} J_H(u, v, w) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial u} & \frac{\partial H_1}{\partial v} & \frac{\partial H_1}{\partial w} \\ \frac{\partial H_2}{\partial u} & \frac{\partial H_2}{\partial v} & \frac{\partial H_2}{\partial w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cos u & 0 & 0 \\ e^{(vw) \sin u} (vw) \cos u & e^{(vw) \sin u} w \sin u & e^{(vw) \sin u} v \sin u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $H$ .

Le funzioni  $F$  e  $G$  sono differenziabili in quanto lo sono tutte le loro componenti. Quindi ha senso calcolare le matrici Jacobiane di  $F$  e  $G$ . Poniamo  $F_1(u, v, w) = \sin u$ ,  $F_2(u, v, w) = v w$ ,  $G_1(x, y) = 3x$  e  $G_2(x, y) = e^{xy}$ .

Quindi si ha

$$J_F(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & 0 & 0 \\ 0 & w & v \end{pmatrix}$$

$$J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y e^{xy} & x e^{xy} \end{pmatrix}$$

A questo punto la matrice Jacobiana di  $G$  va calcolata nel punto  $F(u, v, w) = (\sin u, v w)$  e si ha dunque

$$J_G[F(u, v, w)] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ v w e^{(vw) \sin u} & \sin u e^{(vw) \sin u} \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_H(u, v, w) := J_G[F(u, v, w)] \cdot J_F(u, v, w) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ v w e^{(vw) \sin u} & \sin u e^{(vw) \sin u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u & 0 & 0 \\ 0 & w & v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cos u & 0 & 0 \\ e^{(vw) \sin u} (vw) \cos u & e^{(vw) \sin u} w \sin u & e^{(vw) \sin u} v \sin u \end{pmatrix}.$$

### ✎ Esercizio 1.3.2.

Siano

$$f(x, z) = \sin(xz) \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x) = \cos(xe^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si calcolino la matrice Jacobiana ed il determinante Jacobiano (quando è possibile) delle seguenti funzioni:

$$F(x, z) = (\sin z, f(x, z)) \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^2, \quad G(x, y) = (3e^{y-x}, g(x)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Le funzioni  $F$  e  $G$  sono differenziabili perché le loro componenti sono funzioni differenziabili. Inoltre la matrice Jacobiana in entrambi i casi è una matrice quadrata; allora ha senso calcolare in entrambi i casi il determinante Jacobiano. Poniamo

$$F_1(x, z) = \sin z \quad F_2(x, z) = \sin(xz) \quad G_1(x, y) = 3e^{y-x} \quad G_2(x, y) = \cos(xe^x)$$

da cui

$$J_F(x, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos z \\ z \cos(xz) & x \cos(xz) \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det J_F(x, z) = -z \cos(xz) \cos z.$$

D'altra parte

$$J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{y-x} & 3e^{y-x} \\ -\sin(xe^x)e^x(x+1) & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det J_G(x, y) = 3e^{y-x}e^x(x+1)\sin(xe^x) = 3e^y(x+1)\sin(xe^x).$$

✎ **Esercizio 1.3.3.**

Siano  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  date da

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= (u + v, e^w) & \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \\ G(x, y) &= (y - x, \sin x) & \forall (x, y) \in [0, 2\pi]^2. \end{aligned}$$

Le composizioni  $G \circ F$ ,  $F \circ G$  hanno senso? Per quella (o quelle) che lo avessero, si calcoli la matrice Jacobiana.

La funzione composta  $G \circ F$  ha senso perché il codominio di  $F$  coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di  $G$ . La funzione composta  $F \circ G$  non ha senso perché il codominio di  $G$  ha dimensione 2 mentre il dominio di  $F$  ha dimensione 3.

Si ha  $H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $H(u, v, w) = (e^w - u - v, \sin(u + v))$ .

Poniamo

$$H_1(u, v, w) = e^w - u - v \quad H_2(u, v, w) = \sin(u + v).$$

La funzione  $H$  è differenziabile in tutti i punti di  $\mathbb{R}^3$  perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti.

Primo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $H$ .

Si ha

$$J_H(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial u} & \frac{\partial H_1}{\partial v} & \frac{\partial H_1}{\partial w} \\ \frac{\partial H_2}{\partial u} & \frac{\partial H_2}{\partial v} & \frac{\partial H_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^w \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $H$ .

Le funzioni  $F$  e  $G$  sono differenziabili in quanto lo sono tutte le loro componenti. Quindi ha senso calcolare le matrici Jacobiane di  $F$  e  $G$ . Poniamo  $F_1(u, v, w) = u + v$ ,  $F_2(u, v, w) = e^w$ ,  $G_1(x, y) = y - x$  e  $G_2(x, y) = \sin x$ .

Quindi si ha

$$J_F(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}$$

$$J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto la matrice Jacobiana di  $G$  va calcolata nel punto  $F(u, v, w) = (u + v, e^w)$  e si ha dunque

$$J_G[F(u, v, w)] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned} J_H(u, v, w) &:= J_G[F(u, v, w)] \cdot J_F(u, v, w) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^w \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

▮ **Esercizio 1.3.4.**



Siano  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  date da

$$H(u, v, w) = (u + v, e^w) \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,$$

$$L(x, y) = (y - x, \sin x, y, y) \quad \forall (x, y) \in [0, 2\pi]^2.$$

Le composizioni  $H \circ L$ ,  $L \circ H$  hanno senso? Per quella (o quelle) che lo avessero, si calcoli la matrice Jacobiana.

La funzione composta  $L \circ H$  ha senso perché il codominio di  $H$  coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di  $L$ . La funzione composta  $H \circ L$  non ha senso perché il codominio di  $L$  ha dimensione 4 mentre il dominio di  $H$  ha dimensione 3.

Si ha  $F := L \circ H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  con  $F(u, v, w) = (e^w - u - v, \sin(u + v), e^w, e^w)$ .

Poniamo

$$F_1(u, v, w) = e^w - u - v \quad F_2(u, v, w) = \sin(u + v) \quad F_3(u, v, w) = e^w \quad F_4(u, v, w) = e^w.$$

La funzione  $F$  è differenziabile in tutti i punti di  $\mathbb{R}^3$  perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti. La matrice Jacobiana di  $F$  può essere calcolata in due modi in analogia con quanto visto nella versione A del tema. Qui presentiamo per brevità solo uno dei due modi.

Si ha

$$J_F(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial w} \\ \frac{\partial F_4}{\partial u} & \frac{\partial F_4}{\partial v} & \frac{\partial F_4}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^w \\ \cos(u + v) & \cos(u + v) & 0 \\ 0 & 0 & e^w \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}$$

#### ✎ Esercizio 1.3.5.

Siano  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  date da

$$F(u, v, w) = (u(w^2)^\pi, e^v) \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,$$

$$G(x, y) = (y - x, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Le composizioni  $G \circ F$ ,  $F \circ G$  hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la matrice Jacobiana.

La funzione composta  $G \circ F$  ha senso perché il codominio di  $F$  coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di  $G$ . La funzione composta  $F \circ G$  non ha senso perché il codominio di  $G$  ha dimensione 2 mentre il dominio di  $F$  ha dimensione 3.

Si ha  $H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $H(u, v, w) = (e^v - u w^{2\pi}, u w^{2\pi})$ .

Poniamo

$$H_1(u, v, w) = e^v - u w^{2\pi} \quad H_2(u, v, w) = u w^{2\pi}.$$

La funzione  $H$  è differenziabile in tutti i punti di  $\mathbb{R}^3$  perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti.

Primo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $H$ .

Si ha

$$J_H(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial u} & \frac{\partial H_1}{\partial v} & \frac{\partial H_1}{\partial w} \\ \frac{\partial H_2}{\partial u} & \frac{\partial H_2}{\partial v} & \frac{\partial H_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w^{2\pi} & e^v & -u 2\pi w^{2\pi-1} \\ w^{2\pi} & 0 & u 2\pi w^{2\pi-1} \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $H$ .

Le funzioni  $F$  e  $G$  sono differenziabili in quanto lo sono tutte le loro componenti. Quindi ha senso calcolare le matrici Jacobiane di  $F$  e  $G$ . Poniamo  $F_1(u, v, w) = u w^{2\pi}$ ,  $F_2(u, v, w) = e^v$ ,  $G_1(x, y) = y - x$  e  $G_2(x, y) = x$ .

Quindi si ha

$$J_F(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{2\pi} & 0 & u 2\pi w^{2\pi-1} \\ 0 & e^v & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_H(u, v, w) := J_G[F(u, v, w)] \cdot J_F(u, v, w) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{2\pi} & 0 & u 2\pi w^{2\pi-1} \\ 0 & e^v & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -w^{2\pi} & e^v & -u 2\pi w^{2\pi-1} \\ w^{2\pi} & 0 & u 2\pi w^{2\pi-1} \end{pmatrix}.$$

✎ **Esercizio 1.3.6.**

Siano  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  date da

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= (e^{(e^u)}w, \sqrt{-v}) & \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \\ g(x, y) &= (y, x) + (x - y, 2x) & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Si dica se le composizioni  $g \circ f$ ,  $f \circ g$  hanno senso. In caso affermativo si scriva esplicitamente la funzione composta, se ne indichi l'insieme di definizione, se ne calcoli la matrice Jacobiana, e si indichi l'insieme in cui la funzione composta è differenziabile.

La funzione composta  $g \circ f$  ha senso perché il codominio di  $f$  ha la stessa dimensione del dominio di  $g$ . La funzione composta  $f \circ g$  non ha senso perché il codominio di  $g$  ha dimensione 2 mentre il dominio di  $f$  ha dimensione 3.

Si ha  $h := g \circ f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $h(u, v, w) = (e^{(e^u)}w, 3e^{(e^u)}w)$ . L'insieme di definizione  $A$  della funzione composta  $h = g \circ f$  è

$$A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v \leq 0\}.$$

Poniamo

$$h_1(u, v, w) = e^{(e^u)}w \quad h_2(u, v, w) = 3e^{(e^u)}w.$$

Si ha

$$J_h(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} & \frac{\partial h_1}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} & \frac{\partial h_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(e^u)}e^u w & 0 & e^{(e^u)} \\ 3e^{(e^u)}e^u w & 0 & 3e^{(e^u)} \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $h$ . Poniamo  $f_1(u, v, w) = e^{(e^u)}w$ ,  $f_2(u, v, w) = \sqrt{-v}$ ,  $g_1(x, y) = x$  e  $g_2(x, y) = 3x$ . Quindi si ha

$$J_f(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(e^u)}e^u w & 0 & e^{(e^u)} \\ 0 & (-1)\frac{1}{2\sqrt{-v}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned}
 J_h(u, v, w) &:= J_g[f(u, v, w)] \cdot J_f(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(e^u)} e^u w & 0 & e^{(e^u)} \\ 0 & (-1) \frac{1}{2\sqrt{-v}} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{(e^u)} e^u w & 0 & e^{(e^u)} \\ 3e^{(e^u)} e^u w & 0 & 3e^{(e^u)} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

L'insieme in cui  $h$  è differenziabile è

$$\dot{A} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v < 0\}.$$

✎ **Esercizio 1.3.7.**

Siano  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  le seguenti funzioni:

$$\mathbf{G}(u, v, w) = (u^2 w, \sqrt{-uv}), \quad \mathbf{H}(x, y) = (y, x, x).$$

Si dica se le composizioni  $\mathbf{G} \circ \mathbf{H}$  e  $\mathbf{H} \circ \mathbf{G}$  hanno senso. In caso affermativo si scriva esplicitamente la funzione composta e se ne indichi l'insieme di definizione, se ne calcoli la matrice jacobiana, e si indichi l'insieme in cui la funzione composta è differenziabile.

Entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione ha la stessa dimensione del dominio della seconda.

Prima di tutto si ha che

$$\mathbf{F} := \mathbf{G} \circ \mathbf{H} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{F}(x, y) = (y^2 x, \sqrt{-yx}) \quad \forall (x, y) \in A.$$

L'insieme di definizione è

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}$$

che è l'unione del secondo e del quarto quadrante, assi compresi. Posto

$$\mathbf{F}_1(x, y) = y^2 x \quad \mathbf{F}_2(x, y) = \sqrt{-yx}$$

si ha inoltre

$$J_{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2yx \\ -\frac{y}{2\sqrt{-yx}} & -\frac{x}{2\sqrt{-yx}} \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente inoltre che l'insieme in cui  $\mathbf{F}$  è differenziabile è

$$\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0\}$$

che è l'unione del secondo e quarto quadrante, assi esclusi.

D'altra parte

$$\mathbf{L} := \mathbf{H} \circ \mathbf{G} : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad L(u, v, w) = (\sqrt{-uv}, u^2w, u^2w) \quad \forall (u, v, w) \in B.$$

L'insieme di definizione è

$$B = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : uv \leq 0\}.$$

Posto

$$\mathbf{L}_1(u, v, w) = \sqrt{-uv} \quad \mathbf{L}_2(u, v, w) = u^2w \quad \mathbf{L}_3(u, v, w) = u^2w$$

si ha inoltre

$$J_{\mathbf{L}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial v} & \frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \mathbf{L}_3}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{L}_3}{\partial v} & \frac{\partial \mathbf{L}_3}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{2\sqrt{-uv}} & -\frac{u}{2\sqrt{-uv}} & 0 \\ 2uw & 0 & u^2 \\ 2uw & 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente inoltre che l'insieme in cui  $\mathbf{L}$  è differenziabile è  $\mathring{B}$ .

✎ **Esercizio 1.3.8.**

Siano  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  date da

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= (u(w^2)^e, \pi^v) \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \\ G(x, y) &= (y + x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Le composizioni  $G \circ F$ ,  $F \circ G$  hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la matrice Jacobiana.

La funzione composta  $G \circ F$  ha senso perché il codominio di  $F$  coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di  $G$ . La funzione composta  $F \circ G$  non ha senso perché il codominio di  $G$  ha dimensione 2 mentre il dominio di  $F$  ha dimensione 3.

Si ha  $H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $H(u, v, w) = (\pi^v + uw^{2e}, \pi^v)$ .

Poniamo

$$H_1(u, v, w) = \pi^v + uw^{2e} \quad H_2(u, v, w) = \pi^v.$$

La funzione  $H$  è differenziabile in tutti i punti di  $\mathbb{R}^3$  perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti.

Primo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $H$ .

Si ha

$$J_H(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial u} & \frac{\partial H_1}{\partial v} & \frac{\partial H_1}{\partial w} \\ \frac{\partial H_2}{\partial u} & \frac{\partial H_2}{\partial v} & \frac{\partial H_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{2e} & \pi^v \log \pi & u(2e)w^{2e-1} \\ 0 & \pi^v \log \pi & 0 \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di  $H$ .

Le funzioni  $F$  e  $G$  sono differenziabili in quanto lo sono tutte le loro componenti. Quindi ha senso calcolare le matrici Jacobiane di  $F$  e  $G$ . Poniamo  $F_1(u, v, w) = uw^{2e}$ ,  $F_2(u, v, w) = \pi^v$ ,  $G_1(x, y) = y + x$  e  $G_2(x, y) = y$ .

Quindi si ha

$$J_F(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{2e} & 0 & u2ew^{2e-1} \\ 0 & \pi^v \log \pi & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_H(u, v, w) := J_G[F(u, v, w)] \cdot J_F(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{2e} & 0 & u2ew^{2e-1} \\ 0 & \pi^v \log \pi & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} w^{2e} & \pi^v \log \pi & u2ew^{2e-1} \\ 0 & \pi^v \log \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

### ✎ Esercizio 1.3.9.

Siano  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  date da:

$$\mathbf{H}(u, v, w) = (\log(-u), \cos(\sin w)) \quad , \quad \mathbf{G}(x, y) = (y, x) + (x - y, -x) .$$

Si dica se le composizioni  $\mathbf{G} \circ \mathbf{H}$  e  $\mathbf{H} \circ \mathbf{G}$  hanno senso. In caso affermativo si scriva esplicitamente la funzione composta, se ne indichi l'insieme di definizione, se ne calcoli la matrice jacobiana.

La funzione composta  $\mathbf{G} \circ \mathbf{H}$  ha senso perché il codominio di  $\mathbf{H}$  ha la stessa dimensione del dominio di  $\mathbf{G}$ . La funzione composta  $\mathbf{H} \circ \mathbf{G}$  non ha senso perché il codominio di  $\mathbf{G}$  ha dimensione 2 mentre il dominio di  $\mathbf{H}$  ha dimensione 3.

Si ha  $\mathbf{F} := \mathbf{G} \circ \mathbf{H} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\mathbf{F}(u, v, w) = (\log(-u), 0)$ . L'insieme di definizione  $A$  della funzione composta  $\mathbf{F} = \mathbf{G} \circ \mathbf{H}$  è

$$A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u < 0\}.$$

Poniamo

$$\mathbf{F}_1(u, v, w) = \log(-u) \quad \mathbf{F}_2(u, v, w) = 0.$$

Si può calcolare la matrice Jacobiana nel modo seguente

$$J_{\mathbf{F}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial v} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 1.3.2. Esercizi senza soluzione

#### ✎ Esercizio 1.3.10.

Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$g(t) = (2t, t^2, -t^3)$$

a) Si calcoli  $J_g(t)$

b) Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , si calcoli  $J_h(1)$  dove  $h(t) = f(g(t))$ , sapendo che  $\nabla f(2, 1, -1) = (-3, 4, 1)$ .

#### ✎ Esercizio 1.3.11.

Siano  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definite da

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 \quad g(u, v) = (uv, u/v).$$

Calcolare le derivate parziali di  $h(u, v) = f(g(u, v))$  nel punto  $(1, 2)$ .

#### ✎ Esercizio 1.3.12.

Siano  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  due campi vettoriali così definiti:

$$f(x, y) = (ye^{x^2}, \sin(x + y), \cos(xy)) \quad g(x, y, z) = (zx^2, 4x^2 + e^y, z^3 - x)$$

- Si scriva la matrice jacobiana di  $f$  e  $g$  in un generico punto dello spazio
- Si determini l'espressione analitica della funzione composta  $h(x, y) = g(f(x, y))$
- Si calcoli la matrice jacobiana di  $h$  in  $(0, \pi)$ .

✎ **Esercizio 1.3.13.**

Data la funzione scalare  $f$  definita in

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 4, 0 < v \leq 1\}$$

e la funzione  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$g(x, y) = (x^2 + y^2, xy).$$

Si determini l'insieme di definizione della funzione composta  $F(x, y) = f(g(x, y))$  e si calcoli  $J_F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  sapendo che  $J_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = (-1, 2)$ .

✎ **Esercizio 1.3.14.**

Siano  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  due campi vettoriali così definiti:

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, y) \quad g(x, y, z) = (x + 2y^2 + 3z^3, (2y - x^2))$$

- Si calcolino le matrici jacobiane di  $f$  e  $g$
- Si determini l'espressione analitica della funzione composta  $h(x, y, z) = f(g(x, y, z))$
- Si calcoli la matrice jacobiana di  $h$  in  $(1, -1, 1)$ .

✎ **Esercizio 1.3.15.**

Al variare delle funzioni  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  scrivere il gradiente di  $h(s, t) = f(g(s, t))$

$$a) f(x, y) = 3x^2y + \frac{1}{x^2} \quad g(s, t) = \left( \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}, (s^2 + t^2)^2 \right)$$

$$b) f(x, y) = y^2 \tan x \quad g(s, t) = \left( \arctan s, \frac{t^2}{s} \right)$$



✎ **Esercizio 1.3.16.**

Al variare delle funzioni  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  scrivere le matrici jacobiane di  $f$ , di  $g$  (dove  $f$  e  $g$  sono definite) e di  $f \circ g$  :

- a)  $f(x, y, z) = (x^2y + z, xz)$        $g(r, s, t) = (r, s, t)$   
 b)  $f(x, y, z) = (z - xy, x^2y + z)$        $g(r, s, t) = (r, s^2t, rst)$   
 c)  $f(x, y, z) = (1, \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$        $g(r, s, t) = (e^r, e^s, e^t)$   
 d)  $f(x, y, z) = (e^{x+y+z}, 1)$        $g(r, s, t) = (\log s, \log t, \log r)$

✎ **Esercizio 1.3.17.**

Al variare delle funzioni  $f$  e  $g$  scrivere le matrici jacobiane di  $f$ , di  $g$  e di  $g \circ f$  :

- a)  $f(t) = (t, 1 - t, 2t)$        $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$   
 b)  $f(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$        $g(x, y, z) = (x^2 - y^2, y^2 - z^2)$   
 c)  $f(u, v) = (uv, \frac{u}{v}, u + v)$        $g(x, y, z) = (x, xy, xz)$   
 d)  $f(u, v) = (uv, u^2v^2)$        $g(x, y) = (x^2 - y^2, x - y)$



---

---

## CAPITOLO 2

---

# Campi vettoriali

### 2.1. Campi vettoriali

---

□ **Definizione 2.1.1.** Un CAMPO VETTORIALE è una funzione  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . In quest'ottica, una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  viene anche detta CAMPO SCALARE.

Nella definizione di CAMPO VETTORIALE il dominio  $\mathbb{R}^n$  e il codominio  $\mathbb{R}^m$  sono “pensati” in maniera differente: il primo come “insieme di punti” (dello spazio o dello spazio-tempo), il secondo come “insieme di vettori”.

Se  $n = m = 3$  un campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dunque associa ad ogni punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  un vettore  $\mathbf{F}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ; nel seguito useremo una delle due notazioni:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}F_1(x, y, z) + \mathbf{j}F_2(x, y, z) + \mathbf{k}F_3(x, y, z)$$

oppure

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

dove le componenti  $F_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sono campi scalari.

Possiamo elencare alcuni esempi di campi vettoriali:

- il CAMPO GRAVITAZIONALE  $\mathbf{F}(x, y, z)$  causato da un corpo, che è la forza di attrazione che il corpo esercita su una massa unitaria posta nel punto  $(x, y, z)$ ;
- il CAMPO ELETTROSTATICO  $\mathbf{E}(x, y, z)$  causato da un corpo elettricamente carico, è la forza elettrica che il corpo esercita su una carica unitaria posta in  $(x, y, z)$ , forza che può essere attrattiva o repulsiva;
- il CAMPO DELLE VELOCITÀ  $\mathbf{v}(x, y, z)$  di un fluido (o di un solido) in moto è la velocità con cui si muove la particella che si trova nel punto  $(x, y, z)$ . Se il moto non è stazionario, allora il campo delle velocità dipenderà anche dal tempo  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ ;

d) il GRADIENTE  $\nabla f(x, y, z)$  di un qualsiasi campo scalare  $f$  fornisce la direzione e l'intensità della massima rapidità di variazione di  $f$  in  $(x, y, z)$ . In particolare il GRADIENTE DELLA TEMPERATURA  $\nabla T(x, y, z)$  è un campo vettoriale, la cui direzione e la cui intensità sono uguali a quelle della massima rapidità di variazione della temperatura nel punto  $(x, y, z)$  di un materiale che conduce il calore. Il GRADIENTE DELLA PRESSIONE  $\nabla P(x, y, z, t)$  fornisce un'informazione analoga relativamente alla pressione in un fluido in moto, che può essere un liquido o un gas.

✎ **Esempio 2.1.2.** (CAMPO GRAVITAZIONALE DI UNA MASSA PUNTUALE)

Il campo gravitazionale causato da una massa puntiforme  $m$  che si trova nel punto  $P_0$  di vettore posizione  $\mathbf{r}_0$  è

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{-km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -km \frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}$$

Si osservi che  $\mathbf{F}$  è diretto verso il punto  $\mathbf{r}_0$  e che il suo modulo è dato da

$$|\mathbf{F}| = \frac{km}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}.$$

✎ **Esempio 2.1.3.** (CAMPO ELETTROSTATICO DOVUTO A UNA CARICA PUNTUALE)

Il campo elettrostatico  $\mathbf{F}$  dovuto a una carica puntuale  $q$  in  $P_0$  è espresso dalla stessa formula del campo gravitazionale precedente tranne che  $-m$  è sostituito da  $q$ . La ragione del segno opposto è che cariche simili si respingono mentre le masse si attirano.

✎ **Esempio 2.1.4.** (CAMPO DELLE VELOCITÀ DI UN SOLIDO IN ROTAZIONE)

Il campo della velocità di un solido, in rotazione attorno all'asse  $z$  con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$  è

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\Omega y\mathbf{i} + \Omega x\mathbf{j}.$$

Essendo lo stesso in tutti i piani normali all'asse  $z$ , il campo  $\mathbf{v}$  può essere considerato un campo vettoriale piano.

## 2.2. Linee integrali

□ **Definizione 2.2.1.** Dato un campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  chiameremo LINEA INTEGRALE DEL CAMPO una qualsiasi curva regolare tangente in ogni punto al campo vettoriale. Se il campo ha significato fisico di forza, le linee integrali si dicono anche LINEE DI FORZA; se invece si tratta di un campo di velocità, si diranno LINEE DI FLUSSO.

Supponiamo di avere una linea integrale del campo  $\mathbf{F}$  cioè  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Se in ogni punto  $\mathbf{r}(t)$  si impone che il campo  $\mathbf{F}$  sia tangente alla linea, questo significa che il vettore  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  è parallelo al vettore  $\mathbf{r}'(t)$  cioè esiste una funzione scalare  $\lambda(t)$  tale che

$$\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)). \quad (2.2.1)$$

Volendo esprimere la (2.2.1) componente per componente si ottiene

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda(t)F_1(x, y, z) \\ y'(t) = \lambda(t)F_2(x, y, z) \\ z'(t) = \lambda(t)F_3(x, y, z) \end{cases}$$

che è anche equivalente a

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}.$$

Pertanto se si è interessati a determinare le linee integrali, occorre dunque risolvere il precedente sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Se in più si impone che la curva passi per un punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , tale sistema avrà un'unica soluzione locale (a patto di avere le necessarie ipotesi sul campo  $\mathbf{F}$ , ossia che  $\mathbf{F}$  sia ben definito, regolare e non nullo). Questo ci permette di asserire che le curve integrali del campo costituiscono una famiglia di linee a due a due prive di intersezioni, cioè per ogni fissato punto dello spazio passa una e una sola linea integrale del campo.

## 2.3. Operatore rotore e operatore divergenza

---

Introduciamo in questa sezione due importanti operatori che agiscono sui campi vettoriali.

### 2.3.1. L'operatore rotore

**□ Definizione 2.3.1.** Sia  $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ . Si definisce **ROTORE** di  $\mathbf{F}$  il campo

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Il simbolo  $\nabla \times \mathbf{F}$  rappresenta il prodotto vettoriale formale tra l'operatore  $\nabla$  e il campo  $\mathbf{F}$ . Se  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  il campo  $\mathbf{F}$  si dice **IRROTAZIONALE**.

Nel caso particolare di un campo piano  $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i}F_1(x, y) + \mathbf{j}F_2(x, y)$  si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k};$$

in questo caso dunque il vettore  $\nabla \times \mathbf{F}$  è perpendicolare al piano in cui si trova  $\mathbf{F}$ ; è sempre bene notare che la nozione di rotore ha senso solo se ambientata in  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.3.2. L'operatore divergenza

□ **Definizione 2.3.2.** Sia  $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ . Si definisce DIVERGENZA di  $\mathbf{F}$  il campo scalare

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Per esempio se  $\mathbf{F} = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$  è un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Si ha inoltre che  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  è un campo scalare, cioè una funzione reale di 3 variabili. Il simbolo  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  denota il prodotto scalare formale dell'operatore  $\nabla$  e del campo  $\mathbf{F}$ .

✎ **Esempio 2.3.3.** Siano  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  date da

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= u - w & \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \\ G(x) &= (2x, -x, x^3) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le composizioni  $G \circ F$ ,  $F \circ G$  hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la divergenza (se ha senso).

Entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione coincide (e quindi in particolare ha la stessa dimensione) del dominio della seconda funzione. Esplicitando  $G \circ F$  e  $F \circ G$ , si ha

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad H(u, v, w) = (2(u - w), w - u, (u - w)^3) \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$L := F \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad L(x) = 2x - x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'operatore divergenza si può applicare a campi vettoriali da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Quindi, posto

$$H_1(u, v, w) = 2(u - w) \quad H_2(u, v, w) = w - u \quad H_3(u, v, w) = (u - w)^3$$

si ha

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial u} + \frac{\partial H_2}{\partial v} + \frac{\partial H_3}{\partial w} = 2 + 0 - 3(u - w)^2 = 2 - 3u^2 + 6uw - 3w^2.$$

Nel caso di funzioni scalari, l'operatore divergenza si riduce alla derivata prima. Dunque si ha

$$L'(x) = 2 - 3x^2.$$

✎ **Esempio 2.3.4.** Siano  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  date da

$$F(u, v, w) = w - v \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,$$

$$G(x) = (x, -x, x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Le composizioni  $G \circ F$ ,  $F \circ G$  hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli il rotore (se ha senso).

Entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione coincide (e quindi in particolare ha la stessa dimensione) del dominio della seconda funzione. Esplicito  $G \circ F$  e  $F \circ G$ . Si ha

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad H(u, v, w) = (w - v, v - w, (w - v)^2) \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$L := F \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad L(x) = x^2 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'operatore rotore si applica a campi vettoriali da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Quindi ha senso calcolare  $\text{rot } H$ . Posto

$$H_1(u, v, w) = w - v \quad H_2(u, v, w) = v - w \quad H_3(u, v, w) = (w - v)^2$$

si ha

$$\text{rot } H = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ w - v & v - w & (w - v)^2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \text{rot } H &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial}{\partial v}(w - v)^2 - \frac{\partial}{\partial w}(v - w) \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial}{\partial w}(w - v) - \frac{\partial}{\partial u}(w - v)^2 \right) \\ &+ \mathbf{k} \left( \frac{\partial}{\partial u}(v - w) - \frac{\partial}{\partial v}(w - v) \right) = \mathbf{i}(-2(w - v) + 1) + \mathbf{j}(1 - 0) + \mathbf{k}(0 + 1) \\ &= (1 - 2w + 2v, 1, 1). \end{aligned}$$

## 2.4. Campi vettoriali conservativi

Sappiamo che il gradiente di un campo scalare è un campo vettoriale. È naturale chiedersi se tutti i campi vettoriali sono a loro volta gradienti di un campo scalare, ovvero ci si può domandare se, dato un campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  esista  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  campo scalare tale che

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla U(x, y, z) = \left( \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

La risposta in generale è no, come mostra il prossimo esempio.

Si può dunque introdurre la seguente definizione che diamo in generale per  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

**□ Definizione 2.4.1.** *Un campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice CONSERVATIVO in un aperto  $A$  se  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(A)$  ed esiste una funzione  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  detta POTENZIALE tale che  $U \in \mathcal{C}^2(A)$  e  $\mathbf{F} = \nabla U$  in tutto  $A$ .*

**✎ Esempio 2.4.2.** *Dimostrare che il seguente campo vettoriale non è conservativo*

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2, xy^2).$$

SOLUZIONE. Se il campo  $\mathbf{F}$  fosse conservativo dovrebbe esistere  $U$  funzione potenziale tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 \quad \frac{\partial U}{\partial y} = xy^2.$$

Dalla prima relazione, integrando rispetto alla variabile  $x$  seguirebbe che  $U(x, y) = x^3 + g(y)$  con  $g$  funzione derivabile della sola variabile  $y$ . Ma allora, derivando questa relazione rispetto alla variabile  $y$  si otterrebbe  $U_y(x, y) = g'(y)$  costante rispetto a  $x$ , assurdo perché  $U_y(x, y) = xy^2$ .

Sarebbe dunque interessante possedere dei criteri che permettono di decidere se un campo è conservativo oppure no e in caso affermativo calcolarne il potenziale. L'esempio precedente suggerisce l'idea di utilizzare il teorema di Schwarz per ricavare una *condizione necessaria* che deve essere soddisfatta affinché un qualunque campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sia conservativo:

**Teorema 2.4.3.** (CONDIZIONE DELLE DERIVATE IN CROCE) *Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un campo di classe  $\mathcal{C}^1(A)$  conservativo in  $A$ , allora soddisfa le relazioni:*

$$\begin{cases} \partial_y F_1 = \partial_x F_2 \\ \partial_z F_1 = \partial_x F_3 \\ \partial_z F_2 = \partial_y F_3 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  è un campo conservativo in un aperto  $A$ , allora esiste  $U(x, y, z)$  tale che

$$\begin{cases} U_x = F_1 \\ U_y = F_2 \\ U_z = F_3 \end{cases}$$



Derivando la prima equazione rispetto a  $y$  e la seconda rispetto a  $x$  otteniamo:

$$U_{xy} = \partial_y F_1 \quad U_{yx} = \partial_x F_2.$$

Se  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1$  e dunque  $U_{xy}, U_{yx}$  sono continue, per il teorema di Schwarz ne segue

$$\partial_y F_1 = \partial_x F_2.$$

Analogamente si deducono le relazioni

$$\partial_z F_1 = \partial_x F_3 \quad \partial_z F_2 = \partial_y F_3.$$

□

Per un campo bidimensionale le relazioni precedenti si riducono a una sola:

$$\partial_y F_1 = \partial_x F_2.$$

☞ **Osservazione 2.4.4.** Ricordando la definizione dell'operatore rotore appena introdotto, ci si accorge che la condizione delle derivate in croce altro non è che richiedere che  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  cioè che il campo  $\mathbf{F}$  sia irrotazionale. In tal caso il teorema precedente si enuncia dicendo che un campo conservativo è irrotazionale. Ciò si vede anche osservando che se un campo è conservativo, allora è il gradiente di un certo potenziale  $U$  e si ha la seguente identità

$$\nabla \times (\nabla U) = \text{rotgrad}U = \mathbf{0}.$$

📎 **Esempio 2.4.5.** *Vedere se il campo*

$$F(x, y, z) = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

*è conservativo e in caso affermativo determinare una funzione potenziale.*

SOLUZIONE. Proviamo a vedere se sono soddisfatte le condizioni delle derivate in croce. Si ha

$$\partial_y F_1 = 0 = \partial_x F_2 \quad \partial_z F_1 = 0 = \partial_x F_3 \quad \partial_x F_2 = 0 = \partial_y F_3.$$

Quindi il campo potrebbe essere conservativo. Cerchiamo di determinare una funzione potenziale  $U(x, y, z)$ . Se esistesse una tale  $U$  si avrebbe:

$$U_x = x \Rightarrow U = \int x + c(y, z) = \frac{x^2}{2} + c(y, z)$$

$$U_y = -2y \Rightarrow U = \int (-2y) + c(x, z) = -y^2 + c(x, z)$$

$$U_z = 3z \Rightarrow U = \int 3z + c(x, y) = \frac{3}{2}z^2 + c(x, y)$$

quindi il campo è effettivamente conservativo e una funzione potenziale è data da

$$U(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{3}{2}z^2.$$

✎ **Esempio 2.4.6.** *Vedere se il campo*

$$F(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

*è conservativo e in caso affermativo determinare una funzione potenziale.*

SOLUZIONE. Si ha

$$\partial_x F_2 = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \neq -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_y F_1$$

e dunque, dalla condizione necessaria, si ha che il campo considerato non è conservativo.

✎ **Esempio 2.4.7.** (IL TEOREMA 2.4.3 È SOLO UNA CONDIZIONE NECESSARIA)

Per  $(x, y) \neq (0, 0)$  definiamo il campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y)$  e un campo vettoriale  $\theta(x, y)$  nel modo seguente:

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j}$$

$$\theta(x, y) = \text{angolo polare } \theta \text{ di } (x, y) \text{ tale che } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Quindi  $x = r \cos \theta(x, y)$  e  $y = r \sin \theta(x, y)$  dove  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Verificare le seguenti proposizioni:

- (a)  $\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)$  per  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
- (b)  $\nabla \theta(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$  per tutti i punti  $(x, y) \neq (0, 0)$  tali che  $0 < \theta < 2\pi$ .
- (c)  $\mathbf{F}$  non è conservativo nell'intero piano  $xy$  privato dell'origine.

SOLUZIONE. Abbiamo

$$F_1 = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad F_2 = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Quindi

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)$$

per tutti i punti  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(b) Deriviamo implicitamente le equazioni  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  rispetto a  $x$  per ottenere

$$1 = \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Eliminando  $\frac{\partial r}{\partial x}$  da questa coppia di equazioni e risolvendo rispetto a  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  si ricava

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{r \sin \theta}{r^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = F_1.$$

Analogamente derivando rispetto a  $y$  si ottiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = F_2.$$

Queste formule valgono solo se  $0 < \theta < 2\pi$ ; la funzione  $\theta(x, y)$  non è nemmeno continua sull'asse  $x$  positivo: infatti se  $x > 0$  allora

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \theta(x, y) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \theta(x, y) = 2\pi.$$

Quindi  $\nabla \theta = \mathbf{F}$  vale ovunque nel piano, tranne che nei punti  $(x, 0)$  con  $x \geq 0$ .

(c) Supponiamo che  $\mathbf{F}$  sia conservativo in tutto il piano privato dell'origine. Allora  $\mathbf{F} = \nabla U$  in esso, per qualche funzione scalare  $U(x, y)$ . Ne segue che  $\nabla(\theta - U) = 0$  per  $0 < \theta < 2\pi$  e  $\theta - U = C$  con  $C$  costante ossia  $\theta = U + C$ . Il membro di sinistra di tale equazione è discontinuo lungo l'asse  $x$  positivo mentre il membro di destra non lo è. Pertanto i due membri non possono essere uguali. Questa contraddizione mostra che  $\mathbf{F}$  non può essere conservativo in tutto il piano privato dell'origine.

Nell'esempio preso in esame l'origine è un *buco* del dominio di  $\mathbf{F}$ . Anche se  $\mathbf{F}$  soddisfa la condizione necessaria per essere conservativa ovunque tranne in questo buco, per poter avere una funzione potenziale di  $\mathbf{F}$  si deve eliminare dal dominio di  $\mathbf{F}$  una semiretta (raggio) o più in generale una curva uscente dall'origine e che vada all'infinito. Il campo  $\mathbf{F}$  non è conservativo in qualunque dominio contenente una curva che circonda l'origine.

## 2.5. Domini connessi o semplicemente connessi

L'esempio precedente mostra che la condizione di irrotazionalità non è sufficiente a garantire che  $\mathbf{F}$  sia conservativo. La ragione di questo fatto è legata alle proprietà topologiche dell'aperto in cui il campo è irrotazionale.

La nozione chiave è quella di APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO, di cui daremo solo una nozione intuitiva.

□ **Definizione 2.5.1.** Un insieme  $\Omega$  si dice CONNESSO se presi comunque due punti di  $\Omega$  esiste un arco di curva continuo che congiunge questi due punti ed è interamente contenuto in  $\Omega$ .

□ **Definizione 2.5.2.** Un aperto  $\Omega$  si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se è connesso e inoltre soddisfa la seguente condizione: ogni curva semplice, chiusa, interamente contenuta in  $\Omega$  può essere ridotta, mediante una trasformazione continua, a un unico punto senza uscire da  $\Omega$ .

**Nel piano** sono semplicemente connessi: cerchi, ellissi, poligoni, semipiani, il piano stesso o il piano privato di una retta; non sono semplicemente connessi il piano (o il cerchio ecc...) privati

di un punto; una corona circolare, più in generale ogni insieme che presenta un “buco”.

**Nello spazio** sono semplicemente connessi: sfere, ellissoidi, poliedri convessi, una corona sferica, un semispazio, tutto lo spazio privato di un numero finito di punti; non sono semplicemente connessi il toro, la sfera privata di un diametro, lo spazio privato di una retta.

Chiarita questa nozione possiamo enunciare il seguente importante risultato:

**Teorema 2.5.3.** *Sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(A)$  che soddisfa le condizioni necessarie (2.4.1) in  $A$ . Sia inoltre  $A$  un aperto semplicemente connesso. Allora  $\mathbf{F}$  è conservativo in  $A$ . In particolare, qualunque sia  $A$ , il campo  $\mathbf{F}$  è LOCALMENTE CONSERVATIVO.*

L'ultima affermazione sta a significare che, visto che  $A$  è aperto, ogni suo punto ammette un intorno sferico  $B$  (che perciò è semplicemente connesso) tutto contenuto in  $A$ ; è dunque possibile applicare la prima parte del teorema all'intorno  $B$  e dedurre che il campo  $\mathbf{F}$  è conservativo in questo intorno (e quindi localmente).

☞ **Osservazione 2.5.4.** Esistono campi che sono conservativi definiti su domini che non sono semplicemente connessi, come mostra il prossimo esempio.

📎 **Esempio 2.5.5.** *Vedere se il campo*

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

*è conservativo e in caso affermativo determinare una funzione potenziale.*

SOLUZIONE. Si ha

$$\partial_x F_2 = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_y F_1$$

e dunque la condizione necessaria è verificata; il campo dunque potrebbe essere conservativo. Tuttavia  $\mathbf{F}$  è definito su un dominio (il piano privato dell'origine) che non è semplicemente connesso, quindi non si può applicare il teorema precedente per concludere che il campo è conservativo. Tuttavia se si va alla ricerca di una funzione potenziale, con semplici calcoli si verifica che  $\mathbf{F} = \nabla U$  dove  $U(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$  quindi il campo assegnato è conservativo.

## 2.6. Lavoro o integrale di linea di un campo vettoriale

---

Il concetto di LAVORO è fortemente connesso ai campi vettoriali, soprattutto quando essi vengono interpretati come campi di forza.

---

□ **Definizione 2.6.1.** Il LAVORO ELEMENTARE di una forza  $\mathbf{F}$  che sposta un punto materiale di uno spostamento infinitesimo  $d\mathbf{s} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$  è per definizione

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Il LAVORO DEL CAMPO  $\mathbf{F}$  LUNGO UN ARCO DI CURVA  $\gamma$  parametrizzata da  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$  per  $t \in (a, b)$  è, per definizione, l'integrale di linea del lavoro elementare:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} dL = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

La quantità  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  si può anche riscrivere nella forma  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds$  dove  $\mathbf{t}$  è il versore tangente alla curva e  $ds$  è l'elemento di arco.

L'integrale  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  rappresenta pertanto il lavoro totale compiuto da  $\mathbf{F}$  per spostare il suo punto di applicazione da  $\mathbf{r}(a)$  a  $\mathbf{r}(b)$  lungo  $\gamma$ . Altre interpretazioni sono possibili, a seconda della natura del campo  $\mathbf{F}$ . Se la curva è semplice e chiusa, si usa il simbolo  $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  e si chiama CIRCUITAZIONE DEL CAMPO.

✎ **Esempio 2.6.2.** Calcoliamo il lavoro del seguente campo vettoriale

$$F(x, y) = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$$

lungo un percorso che parte dal punto  $(0, 0)$  e arriva al punto  $(1, 1)$

- a) lungo la retta  $y = x$ ;
- b) lungo la curva  $y = x^2$ ;
- c) lungo la curva continua costituita, nell'ordine, prima dal segmento che congiunge  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  e poi dal segmento che unisce i punti  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$ .

SOLUZIONE. a) Possiamo parametrizzare la retta nel seguente modo:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

da cui

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 1).$$

Allora

$$L = \int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 [F_1(x(t), y(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t))y'(t)] dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

b) Possiamo parametrizzare la curva nel seguente modo:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

da cui

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2t).$$

Allora

$$L = \int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 [(t^2)^2 + 2tt^2] dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1.$$

c) Possiamo parametrizzare il percorso nel seguente modo:

$$\mathbf{r}_1(t) = 0\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + 1\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$


da cui

$$\mathbf{r}'_1(t) = (0, 1) \quad \mathbf{r}'_2(t) = (1, 0).$$

Allora

$$L = \int_{\mathbf{r}_1(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{r}_2(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 [t^2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot t \cdot 1] dt + \int_0^1 [1 + 0] dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Quindi in questo caso il lavoro del campo vettoriale  $\mathbf{F}$  ha lo stesso valore su qualunque percorso da  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .

 **Esempio 2.6.3.** Sia  $\mathbf{F}$  il campo vettoriale dato da

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}.$$

Determinare il lavoro del campo vettoriale  $\mathbf{F}$  lungo i seguenti due percorsi che connettono i punti  $(1, 0)$  e  $(0, -1)$

a) segmento di retta;

b) parte di circonferenza centrata nell'origine percorsa in senso antiorario.

SOLUZIONE. a) Possiamo parametrizzare la retta nel seguente modo:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} - t\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

da cui

$$\mathbf{r}'(t) = (-1, -1).$$

Allora

$$L = \int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 [(-t)(-1) + (-1)(1 - t)(-1)] dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

b) Possiamo parametrizzare la curva nel seguente modo:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$$

da cui

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Allora

$$L = \int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{3/2\pi} [\sin t(-\sin t) + (-\cos t)\cos t] dt = \int_0^{3/2\pi} (-1) dt = -\frac{3}{2}\pi.$$

In questo caso l'integrale dipende dal percorso. Tra l'altro il campo non è conservativo, come si può facilmente mostrare (non vale la condizione necessaria  $\partial_y y = 1 \neq \partial_x(-x) = -1$ ). Ci si può domandare se c'è un legame tra questi due fatti. In seguito si vedrà che la risposta è affermativa.

Il lavoro di un campo vettoriale risulta essere un integrale di linea di tipo diverso rispetto a quelli visti fino a questo momento; per distinguerli gli integrali studiati fino a questo momento vengono detti INTEGRALI DI LINEA DI PRIMA SPECIE mentre gli altri vengono anche chiamati INTEGRALE DI LINEA DI SECONDA SPECIE. Nei due casi il vettore tangente alla curva è coinvolto in modo diverso all'interno dell'integrale e questo ha come conseguenza il fatto che gli integrali di linea considerati fino ad ora sono invarianti per cambiamenti di parametrizzazione della curva, in particolare se la nuova parametrizzazione cambia l'orientazione, cambiando il verso di percorrenza della curva il risultato rimane il medesimo. Negli integrali di linea di seconda specie, invece, se si cambia l'orientazione di una curva, il risultato cambia di segno, quindi il lavoro dipende dal verso di percorrenza della curva. L'integrale di linea di seconda specie continua ad essere invariante per cambiamenti di parametro che non alterino l'orientazione.

## 2.7. Lavoro di un campo conservativo

Per i campi conservativi vale il seguente risultato:

**Proposizione 2.7.1.** (INDIPENDENZA DAL PERCORSO)

*Sia  $D$  un dominio aperto connesso e sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale definito su  $D$ . Allora le tre proposizioni seguenti sono equivalenti:*

- a)  $\mathbf{F}$  è conservativo in  $D$ .
- b)

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

*per qualunque curva chiusa  $C$  liscia e continua a tratti contenuta in  $D$ .*

- c) *Dati due punti qualsiasi  $P_0$  e  $P_1$  in  $D$ , l'integrale  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  ha lo stesso valore per tutte le curve lisce continue a tratti in  $D$  che iniziano in  $P_0$  e terminano in  $P_1$ .*

Vale dunque il seguente

**Teorema 2.7.2.** *Se un campo è conservativo in un aperto  $A$  e  $U$  è un suo potenziale in  $A$ , il lavoro del campo lungo un qualunque cammino contenuto in  $A$  che congiunge i punti  $P_1$  e  $P_2$  è dato semplicemente da*

$$L = U(P_2) - U(P_1).$$

*Il lavoro dunque dipende solo dagli estremi del cammino e non dalla forma del medesimo. In particolare, il lavoro di un campo conservativo lungo un cammino chiuso (cioè tale che  $P_1 = P_2$ ) è nullo.*

✎ **Esempio 2.7.3.** *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x, y) = \left( \frac{y^2 g(x)}{x} + 2y^2, -y \sin x + 4xy \right),$$

*si stabilisca se  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$  può essere scelta in modo tale che  $F$  ammetta un potenziale in tutto il suo dominio di definizione, e nel caso calcolarlo.*

È chiaro che l'insieme di definizione del campo vettoriale  $F$  dipende dalla scelta della funzione  $g$ . Una condizione necessaria affinché il campo  $F$  ammetta potenziale è che valga la condizione delle derivate in croce. Imponiamo questa condizione e vediamo cosa implica su  $g$ . Si dovrebbe avere

$$D_x(-y \sin x + 4xy) = D_y \left( \frac{y^2 g(x)}{x} + 2y^2 \right)$$

da cui

$$-y \cos x + 4y = \frac{g(x)}{x} 2y + 4y$$

e questo implica allora che  $g(x) = -\frac{1}{2} x \cos x$ .

Con questa scelta di  $g$  vale la condizione delle derivate in croce e si ha

$$F(x, y) = \left( -\frac{1}{2} \cos x y^2 + 2y^2, -y \sin x + 4xy \right)$$

da cui si vede immediatamente che  $F$  è definito su tutto  $\mathbb{R}^2$  che è un dominio semplicemente connesso. Quindi la teoria ci assicura che il campo dato è conservativo. Calcolo un potenziale  $U$ . Si deve avere

$$U_x = -\frac{1}{2} \cos x y^2 + 2y^2 \quad U_y = -y \sin x + 4xy$$

da cui

$$U = \int \left( -\frac{1}{2} \cos x y^2 + 2y^2 \right) dx = \frac{1}{2} y^2 (-\sin x) + 2xy^2 + C_1(y)$$




ma anche

$$U = \int (-y \sin x + 4xy) dy = -\frac{y^2}{2} \sin x + 2xy^2 + C_2(x).$$

A questo punto posso senz'altro scegliere  $C_1(y) = C_2(x) = 0$  e

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 \sin x + 2xy^2.$$

 **Esempio 2.7.4.** Si calcoli l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma} G \cdot d\gamma$ , dove

$$G(x, y) = (-\cos y, x \sin y)e^{x(\cos y)}, \quad \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t\pi) + t^2, 1 + t^2).$$

Si tratta di calcolare un integrale curvilineo di seconda specie, cioè un integrale di un campo vettoriale. Vediamo se il campo  $G$  è conservativo. Il suo dominio di definizione è  $\mathbb{R}^2$  che è semplicemente connesso; vediamo se vale la condizione delle derivate in croce. Dovrebbe essere

$$D_x(x \sin y e^{x(\cos y)}) = D_y(-\cos y e^{x(\cos y)})$$

da cui

$$\sin y e^{x(\cos y)} + x \sin y e^{x(\cos y)} \cos y = \sin y e^{x(\cos y)} + \cos y e^{x(\cos y)} x \sin y.$$

Quindi la teoria ci assicura che il campo  $G$  è conservativo. Troviamo un potenziale  $U$ . Deve essere

$$U_x = -\cos y e^{x(\cos y)} \quad U_y = x \sin y e^{x(\cos y)}$$

da cui

$$U = \int (-\cos y e^{x(\cos y)}) dx = -e^{x(\cos y)} + C_1(y)$$

e anche

$$U = \int (x \sin y e^{x(\cos y)}) dy = -e^{x(\cos y)} + C_2(x)$$

quindi posso senz'altro scegliere  $C_1(y) = C_2(x) = 0$  e  $U(x, y) = -e^{x(\cos y)}$ .

A questo punto

$$\int_{\gamma} G \cdot d\gamma = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0))$$

da cui

$$\gamma(1) = (0, 2) \quad \gamma(0) = (1, 1)$$

e

$$\int_{\gamma} G \cdot d\gamma = -1 + e^{\cos 1}.$$

## 2.8. Il linguaggio delle forme differenziali

I concetti di LAVORO DI UN CAMPO VETTORIALE, CAMPO CONSERVATIVO, CAMPO IRROTAZIONALE possono essere espressi equivalentemente usando un linguaggio diverso che è quello delle FORME DIFFERENZIALI. La teoria delle forme differenziali è in realtà una teoria matematica profonda e complessa che permette di dimostrare risultati molto generali; qui ci interessa soltanto segnalare una terminologia alternativa per concetti che già conosce. Il motivo è che entrambi i linguaggi sono molto usati nella letteratura scientifica e vanno pertanto conosciuti.

|   |  |
|---|--|
| Linguaggio dei campi vettoriali   | Linguaggio delle forme differenziali   |
| Sia $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3$  | Sia $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3$   |
| Lavoro elementare di $\mathbf{F}$<br>$dL = F_1dx + F_2dy + F_3dz$   | Forma differenziale<br>$\omega = F_1dx + F_2dy + F_3dz$  |
| Lavoro del campo $\mathbf{F}$ sul cammino $\gamma$<br>$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$ | Integrale della forma $\omega$ sul cammino $\gamma$<br>$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$ |
| $\mathbf{F}$ è conservativo<br>$\exists U : \mathbf{F} = \nabla U$  | $\omega$ è esatta<br>$\exists \mathbf{f} : \omega = d\mathbf{f} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$  |
| $\mathbf{F}$ è irrotazionale<br>$\text{rot } \mathbf{F} = 0$  | $\omega$ è chiusa<br>$\text{rot } \mathbf{F} = 0$  |
| Un campo conservativo è irrotazionale   | una forma differenziale esatta è chiusa  |
| Un campo irrotazionale in un aperto semplicemente connesso è conservativo   | una forma differenziale chiusa in un dominio semplicemente connesso è esatta.  |

## 2.9. Formula di Gauss-Green nel piano

In questo paragrafo ci occupiamo della relazione tra integrali doppi e integrali di linea. I risultati che andremo a presentare sono casi particolari di teoremi della divergenza e del rotore che presenteremo in seguito.

Sia  $D$  un dominio semplice rispetto a entrambi gli assi, cioè  $x$ -semplice e  $y$ -semplice; sia

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(D)$ .

□ **Definizione 2.9.1.** Diciamo che il bordo di  $D$ ,  $\partial D$  è ORIENTATO POSITIVAMENTE quando su di esso è fissato il verso di percorrenza ANTIORARIO; in caso contrario diremo che è ORIENTATO NEGATIVAMENTE. Per sottolineare l'orientazione useremo i simboli  $\partial^+ D$  e  $\partial^- D$  rispettivamente.

Premettiamo il seguente risultato.

**Proposizione 2.9.2.** Sia  $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(D)$ .

(a) Se

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con  $g_1, g_2$  funzioni continue su  $[a, b]$  allora

$$\int \int_D P_y dx dy = - \int_{\partial^+ D} P dx$$

(b) Se

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

con  $h_1, h_2$  funzioni continue su  $[c, d]$  allora

$$\int \int_D Q_x dx dy = \int_{\partial^+ D} Q dy$$

Vale il seguente teorema.

**Teorema 2.9.3.** Sia  $D$  un dominio limitato di  $\mathbb{R}^2$  semplice rispetto a entrambi gli assi. Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$  è un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1(D)$  allora vale la formula

$$\int \int_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy$$

☞ **Osservazione 2.9.4.** La formula precedente vale anche per domini più generali, per esempio domini esprimibili come unione di un numero finito di domini semplici rispetto a entrambi gli assi, a due a due disgiunti.

🔗 **Esempio 2.9.5.** Si calcoli l'integrale curvilineo (il lavoro) del campo vettoriale

$$v(x, y) = (\cos(y + x), \sin(y - x))$$

lungo la curva data dai lati del triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(0, 1)$ , percorsi in senso antiorario.

Questo esercizio può essere risolto in due modi.

PRIMO MODO. Siano

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1 \wedge 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 0\}$$

$$\gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$$

Troviamo una parametrizzazione di questi tre segmenti. Si ha

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \gamma_1'(t) = (-1, -1).$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2 \quad \gamma_2'(t) = (1, 0).$$

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = t - 2 \end{cases} \quad 2 \leq t \leq 3 \quad \gamma_3'(t) = (0, 1).$$

A questo punto

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} v(x, y) \cdot dS = \int_{\gamma_1} v + \int_{\gamma_2} v + \int_{\gamma_3} v = \int_0^1 \{\cos[1 - t - t](-1) + \sin[1 - t + t](-1)\} dt \\ &+ \int_1^2 \{\cos[0 + (t - 2)]1 + \sin(t + 2 - 0)0\} dt \\ &+ \int_2^3 \{\cos[t - 2 + 0]0 + \sin(t - 2 - 0)1\} dt = \int_0^1 [-\cos(1 - 2t) - \sin 1] dt \\ &+ \int_1^2 \cos(t - 2) dt + \int_2^3 \sin(t - 2) dt \\ &= \frac{1}{2} \sin(1 - 2t) \Big|_0^1 - \sin 1 + \sin(t - 2) \Big|_1^2 - \cos(t - 2) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \sin(-1) - \frac{1}{2} \sin 1 - \sin 1 \\ &- \sin(-1) - \cos 1 + 1 = 1 - \cos 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

SECONDO MODO. Utilizzo la formula di Gauss-Green nel piano: sia  $D$  un dominio limitato in  $\mathbb{R}^2$  che sia semplice rispetto ad entrambi gli assi. Se  $v = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} \in \mathcal{C}^1(D)$ , allora vale la formula

$$\int \int_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy,$$

dove  $\partial^+D$  è il bordo di  $D$  orientato in senso antiorario. Nel nostro caso  $P = \cos(y + x)$ ,  $Q = \sin(y - x)$ ,  $D$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(0, 1)$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v \cdot dS &= \int \int_D [-\cos(y - x) + \sin(y + x)] dx dy = \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} -\cos(y - x) dx dy \\ &+ \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} \sin(y + x) dy dx = \int_{-1}^0 [-\sin(y - x)] \Big|_0^{x+1} dx + \int_{-1}^0 [-\cos(y + x)] \Big|_0^{x+1} dx \\ &= \int_{-1}^0 (-\sin 1 + \sin(-x)) dx + \int_{-1}^0 (-\cos(2x + 1) + \cos x) dx \\ &= -\sin 1 + 1 - \cos 1 - \frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{2} \sin(-1) - \sin(-1) = 1 - \cos 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

### 2.9.1. Calcolo di aree mediante integrali curvilinei

I risultati della sezione precedente possono essere usati per calcolare l'area di un dominio  $D$  ammissibile per il teorema di Gauss-Green nel piano mediante un integrale curvilineo esteso su tutto  $\partial D$ . Infatti scegliendo  $P(x, y) = y$  nella Proposizione 2.9.2 si ha

$$\text{area}(D) = \int \int_D 1 dx dy = - \int_{\partial^+D} y dx$$

mentre scegliendo  $Q(x, y) = x$  nella Proposizione 2.9.2 si ha

$$\text{area}(D) = \int \int_D 1 dx dy = \int_{\partial^+D} x dy$$

Quindi sommando e dividendo per 2 si ottiene

$$\text{area}(D) = \int \int_D 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial^+D} (x dy - y dx)$$

**Esempio 2.9.6.** Sia  $E \subset \{(x, y) : x > 1, y > 1\}$  insieme con frontiera regolare. Quale dei seguenti integrali è uguale all'area di  $E$ ?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_{\partial^+E} \frac{1-x}{x} y dx & \quad \text{(b)} \int_{\partial^+E} y^2 dx + x^2 dy \\ \text{(c)} \int_{\partial^+E} \frac{1-x}{x} y dx + \log(xy) dy & \quad \text{(d)} \int_{\partial^+E} \log(xy) dy \end{aligned}$$

Se  $F = (F_1, F_2)$ , allora la formula di Gauss-Green nel piano dice che (sotto opportune ipotesi sul dominio  $D$ )

$$\int \int_D (F_1)_y dx dy = - \int_{\partial^+D} F_1 dx$$

$$\int \int_D (F_2)_x dx dy = \int_{\partial^+ D} F_2 dy$$

da cui

$$\int \int_D ((F_1)_y + (F_2)_x) dx dy = \int_{\partial^+ D} (F_2 dy - F_1 dx).$$

L'area di  $D$  è  $\int \int_D dx dy$  quindi va bene un qualunque campo tale che

$$(F_1)_y + (F_2)_x = 1$$

Nel nostro caso dunque l'unica che funziona è quella del caso (c); infatti, ponendo  $F_1 = -\frac{1-x}{x}y = (1 - \frac{1}{x})y$  e  $F_2 = \log(xy)$ , si ha

$$(F_1)_y + (F_2)_x = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1.$$

## 2.9.2. Calcolo di integrali doppi espressi mediante integrali di linea

Tramite le formule di Gauss-Green, i risultati esposti in precedenza si possono estendere anche al caso di integrali doppi più generali, come mostra il seguente esempio.

### ✎ Esercizio 2.9.7.

Sia  $D$  la regione piana delimitata dall'asse  $x$  e dall'arco di parabola  $y = 4 - x^2$  con  $-2 \leq x \leq 2$ . Calcolare le coordinate del baricentro supponendo la densità costante e trasformando gli integrali doppi in integrali di linea.

Ricordiamo le coordinate del baricentro  $(\bar{x}, \bar{y})$  per un dominio piano come l'insieme  $D$

$$\bar{x} = \frac{1}{|D|} \int \int_D x dx dy \quad \bar{y} = \frac{1}{|D|} \int \int_D y dx dy.$$

Parametizziamo il bordo, dando un'orientazione positiva, ossia in senso antiorario. Per il segmento si ha

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [-2, 2]$$

da cui

$$\gamma'_1(t) = (1, 0).$$

D'altra parte, per la parte di curva il cui sostegno è la parabola, possiamo usare la seguente parametrizzazione e poi cambiare di segno all'integrale corrispondente:

$$\gamma_2(t) = (t, 4 - t^2) \quad t \in [-2, 2]$$

con

$$\gamma_2'(t) = (1, -2t).$$

A questo punto allora, usando per esempio la prima formula di Gauss-Green

$$\iint_D Q_x dx dy = \int_{\partial^+ D} Q dy \quad (2.9.1)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} |D| &= \iint_D dx dy = \int_{\partial^+ D} x dy = \int_{\gamma_1} x dy - \int_{\gamma_2} x dy \\ &= \int_{-2}^2 (0, t) \cdot (1, 0) dt - \int_{-2}^2 (0, t) \cdot (1, -2t) dt = 0 + \int_{-2}^2 2t^2 dt = \frac{2}{3} [t^3]_{-2}^2 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

D'altra parte, per la simmetria del problema, il valore dell'ascissa del baricentro dovrebbe essere zero. Ritroviamo questo risultato usando di nuovo la formula (2.9.1). Si ha

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{|D|} \iint_D x dx dy = \frac{3}{32} \int_{\partial^+ D} \frac{x^2}{2} dy = \int_{\gamma_1} \frac{x^2}{2} dy - \int_{\gamma_2} \frac{x^2}{2} dy \\ &= 0 + \frac{3}{32} \int_{-2}^2 t^3 dt = 0, \end{aligned}$$

perché integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico.

Infine, usando stavolta la seconda formula di Gauss-Green

$$\iint_D P_y dx dy = - \int_{\partial^+ D} P dx$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{|D|} \iint_D y dx dy = - \frac{3}{32} \int_{\partial^+ D} \frac{y^2}{2} dx = 0 + \frac{3}{32} \int_{\gamma_2} \frac{y^2}{2} dx = \frac{3}{32} \int_{-2}^2 \frac{(4-t^2)^2}{2} dt \\ &= \frac{3}{64} \int_{-2}^2 (16 - 8t^2 + t^4) dt = \frac{3}{32} \left[ 16t - \frac{8}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} \right]_0^2 = 3 \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

## 2.10. Esercizi proposti

### 2.10.1. Rotore e divergenza

#### ✎ Esercizio 2.10.1.

La funzione  $F(x, y, z)$  sia definita implicitamente dall'equazione  $\log[F(x, y, z)^3] = y + x$  per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ; inoltre sia  $G(u) = (u, -2u, 1)$  per ogni  $u \in \mathbb{R}$ . Le composizioni  $G \circ F$ ,  $F \circ G$  hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la divergenza (se ha senso).

Si può facilmente esplicitare  $F$ . Si ha

$$F(x, y, z) = e^{\frac{y+x}{3}}.$$

Inoltre  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mentre  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  quindi entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione coincide (e quindi in particolare ha la stessa dimensione) del dominio della seconda funzione. Esplicito  $G \circ F$  e  $F \circ G$ . Si ha

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad H(x, y, z) = \left( e^{\frac{y+x}{3}}, -2e^{\frac{y+x}{3}}, 1 \right) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$L := F \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad L(u) = e^{-u/3} \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

L'operatore divergenza si può applicare a campi vettoriali da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Quindi ha senso calcolare  $\operatorname{div} H$ . Posto

$$H_1(x, y, z) = e^{\frac{y+x}{3}} \quad H_2(x, y, z) = -2e^{\frac{y+x}{3}} \quad H_3(x, y, z) = 1$$

si ha

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = e^{\frac{y+x}{3}} \frac{1}{3} - 2e^{\frac{y+x}{3}} \frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3} e^{\frac{y+x}{3}}.$$

Nel caso di funzioni scalari, l'operatore divergenza si riduce alla derivata prima. Dunque si ha

$$L'(u) = -\frac{1}{3} e^{-u/3}.$$

### ✎ Esercizio 2.10.2.

Si calcolino il rotore e la divergenza del campo vettoriale

$$w(x, y, z) = (\cos(e^{y+x}), \sin(y+z), e^{x^2+z^2}).$$

Posto

$$v_1(x, y, z) = \cos(e^{y+x}) \quad v_2(x, y, z) = \sin(y+z) \quad v_3(x, y, z) = e^{x^2+z^2}$$



si ha

$$\operatorname{rot} w = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cos(e^{y+x}) & \sin(y+z) & e^{x^2+z^2} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} w &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2+z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \sin(y+z) \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial}{\partial z} \cos(e^{y+x}) - \frac{\partial}{\partial x} e^{x^2+z^2} \right) \\ &+ \mathbf{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} \sin(y+z) - \frac{\partial}{\partial y} \cos(e^{y+x}) \right) = \mathbf{i} (0 - \cos(y+z)) + \mathbf{j} (0 - e^{x^2+z^2} 2x) \\ &+ \mathbf{k} (0 + \sin(e^{y+x}) e^{y+x}) = (-\cos(y+z), -2x e^{x^2+z^2}, \sin(e^{y+x}) e^{y+x}). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\operatorname{div} w = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} = -\sin(e^{y+x}) e^{y+x} + \cos(y+x) + e^{x^2+z^2} 2z.$$

### ✎ Esercizio 2.10.3.

La funzione  $F(x, y, z)$  sia definita implicitamente dall'equazione  $e^{2F(x,y,z)} = 1 + y^2 + z^2$  per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ; inoltre sia  $G(u) = (2u, 1, u)$  per ogni  $u \in \mathbb{R}$ . Le composizioni  $G \circ F$ ,  $F \circ G$  hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la divergenza (se ha senso).

Si può facilmente esplicitare  $F$ . Si ha

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2} \log(1 + y^2 + z^2).$$

Inoltre  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mentre  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  quindi entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione coincide (e quindi in particolare ha la stessa dimensione) del dominio della seconda funzione. Esplicito  $G \circ F$  e  $F \circ G$ . Si ha

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad H(x, y, z) = \left( \log(1 + y^2 + z^2), 1, \frac{1}{2} \log(1 + y^2 + z^2) \right) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$L := F \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad L(u) = \frac{1}{2} \log(2 + u^2) \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

L'operatore divergenza si può applicare a campi vettoriali da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Quindi ha senso calcolare  $\operatorname{div} H$ . Posto

$$H_1(x, y, z) = \log(1 + y^2 + z^2) \quad H_2(x, y, z) = 1 \quad H_3(x, y, z) = \frac{1}{2} \log(1 + y^2 + z^2)$$

si ha

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0 + 0 + \frac{1}{2} \frac{2z}{1 + y^2 + z^2} = \frac{z}{1 + y^2 + z^2}.$$

Nel caso di funzioni scalari, l'operatore divergenza si riduce alla derivata prima. Dunque si ha

$$L'(u) = \frac{1}{2} \frac{2u}{2 + u^2} = \frac{u}{2 + u^2}.$$

✎ **Esercizio 2.10.4.**

Si calcolino il rotore e la divergenza del campo vettoriale

$$v(x, y, z) = (\sin(e^{z+x}), e^{y^2+z^2}, \cos(x+z)).$$

Posto

$$v_1(x, y, z) = \sin(e^{z+x}) \quad v_2(x, y, z) = e^{y^2+z^2} \quad v_3(x, y, z) = \cos(x+z)$$

si ha

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \sin(e^{z+x}) & e^{y^2+z^2} & \cos(x+z) \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial}{\partial y} \cos(x+z) - \frac{\partial}{\partial z} e^{y^2+z^2} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial}{\partial z} \sin(e^{z+x}) - \frac{\partial}{\partial x} \cos(x+z) \right) \\ &+ \mathbf{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} e^{y^2+z^2} - \frac{\partial}{\partial y} \sin(e^{z+x}) \right) = \mathbf{i} (0 - 2z e^{y^2+z^2}) + \mathbf{j} (\cos(e^{z+x}) e^{z+x} + \sin(x+z)) \\ &+ \mathbf{k} (0 - 0) = (-2z e^{y^2+z^2}, \cos(e^{z+x}) e^{z+x} + \sin(x+z), 0). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \cos(e^{z+x}) e^{z+x} + e^{y^2+z^2} 2y - \sin(x+z).$$

✎ **Esercizio 2.10.5.**

Siano  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  le funzioni

$$F(x, y, z) = (e^y, x) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$G(u, v) = (u, u \sin v, v) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Si calcoli il rotore della funzione  $G \circ F$ .

Si ha

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad H(x, y, z) = (e^y, e^y \sin x, x) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Posto

$$H_1(x, y, z) = e^y \quad H_2(x, y, z) = e^y \sin x \quad H_3(x, y, z) = x$$

si ha

$$\operatorname{rot} H = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^y & e^y \sin x & x \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial}{\partial y} x - \frac{\partial}{\partial z} e^y \sin x \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial}{\partial z} e^y - \frac{\partial}{\partial x} x \right) \\ &+ \mathbf{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} e^y \sin x - \frac{\partial}{\partial y} e^y \right) = (0, -1, e^y (\cos x - 1)). \end{aligned}$$

#### ✎ Esercizio 2.10.6.

La funzione  $F(x, y, z)$  sia definita implicitamente dall'equazione  $\tan[4F(x, y, z)] = 1 + y^2 + x^2$  per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ; inoltre sia  $G(u) = (2, -u, u)$  per ogni  $u \in \mathbb{R}$ . Le composizioni  $G \circ F$ ,  $F \circ G$  hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la divergenza (se ha senso).

Si può facilmente esplicitare  $F$ . Si ha

$$F(x, y, z) = \frac{1}{4} \arctan(1 + y^2 + x^2).$$

Inoltre  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mentre  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  quindi entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione coincide (e quindi in particolare ha la stessa dimensione) del dominio della seconda funzione. Esplicito  $G \circ F$  e  $F \circ G$ . Si ha, per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad H(x, y, z) = \left( 2, -\frac{1}{4} \arctan(1 + y^2 + x^2), \frac{1}{4} \arctan(1 + y^2 + x^2) \right)$$

e

$$L := F \circ G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad L(u) = \frac{1}{4} \arctan(u^2 + 5) \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

L'operatore divergenza si può applicare a campi vettoriali da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Quindi ha senso calcolare  $\operatorname{div} H$ . Posto

$$H_1(x, y, z) = 2 \quad H_2(x, y, z) = -\frac{1}{4} \arctan(1 + y^2 + x^2) \quad H_3(x, y, z) = \frac{1}{4} \arctan(1 + y^2 + x^2)$$

si ha

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0 - \frac{1}{4} \frac{2y}{1 + (y^2 + x^2)^2} + 0 = -\frac{1}{2} \frac{y}{1 + (y^2 + x^2)^2}.$$

Nel caso di funzioni scalari, l'operatore divergenza si riduce alla derivata prima. Dunque si ha

$$L'(u) = \frac{1}{4} \frac{2u}{1 + (u^2 + 5)^2} = \frac{u}{2(1 + (u^2 + 5)^2)}.$$

✎ **Esercizio 2.10.7.**

Si calcolino il rotore e la divergenza del campo vettoriale

$$u(x, y, z) = (e^{x^2+y^2}, \cos(y+z), \sin(e^{y+z})).$$

Posto

$$u_1(x, y, z) = e^{x^2+y^2} \quad u_2(x, y, z) = \cos(y+z) \quad u_3(x, y, z) = \sin(e^{y+z})$$

si ha

$$\operatorname{rot} u = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^{x^2+y^2} & \cos(y+z) & \sin(e^{y+z}) \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial}{\partial y} \sin(e^{y+z}) - \frac{\partial}{\partial z} \cos(y+z) \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial}{\partial z} e^{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \sin(e^{y+z}) \right) \\ &+ \mathbf{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos(y+z) - \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2+y^2} \right) = \mathbf{i} (\cos(e^{y+z}) e^{y+z} + \sin(y+z)) + \mathbf{j} (0-0) \\ &+ \mathbf{k} (0 - e^{x^2+y^2} 2y) = (\cos(e^{y+z}) e^{y+z} + \sin(y+z), 0, -2y e^{x^2+y^2}). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 2x e^{x^2+y^2} - \sin(y+z) + \cos(e^{y+z}) e^{y+z}.$$

✎ **Esercizio 2.10.8.**

Siano  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  le funzioni

$$f(x, y, z) = (e^{x-y}, 2y) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$g(u, v) = (v, u \cos v, v) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Si calcoli il rotore della funzione  $g \circ f$ .

Si ha

$$h := g \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad h(x, y, z) = (2y, e^{x-y} \cos(2y), 2y) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Posto

$$h_1(x, y, z) = 2y \quad h_2(x, y, z) = e^{x-y} \cos(2y) \quad h_3(x, y, z) = 2y$$

si ha

$$\operatorname{rot} h = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2y & e^{x-y} \cos(2y) & 2y \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} h &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial}{\partial y}(2y) - \frac{\partial}{\partial z} e^{x-y} \cos(2y) \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial}{\partial z}(2y) - \frac{\partial}{\partial x}(2y) \right) \\ &+ \mathbf{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} e^{x-y} \cos(2y) - \frac{\partial}{\partial y}(2y) \right) = \mathbf{i}(2 - 0) + \mathbf{j}(0 - 0) + \mathbf{k}(e^{x-y} \cos(2y) - 2) \\ &= (2, 0, e^{x-y} \cos(2y) - 2). \end{aligned}$$

#### ✎ Esercizio 2.10.9.

Siano  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  le funzioni

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^y, x) \quad , \quad \mathbf{G}(u, v) = (u, u \sin v, v).$$

Si calcolino rotore e divergenza della funzione  $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ .

Si ha

$$\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(x, y, z) = (e^y, e^y \sin x, x).$$

Poniamo  $\mathbf{H} := \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$  e  $\mathbf{H}_1(x, y, z) = e^y$ ,  $\mathbf{H}_2(x, y, z) = e^y \sin x$ ,  $\mathbf{H}_3(x, y, z) = x$ . Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= (0, -1, e^y (\cos x - 1)). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial z} = e^y \sin x.$$

✎ **Esercizio 2.10.10.**

Sia  $\mathbf{v}(x, y) = y\mathbf{j}$  il campo di velocità di un fluido in moto stazionario nel piano  $x, y$ .

- a) Determinare le linee di campo e dedurne che il fluido sembra *non* ruotare.  
 b) Calcolare il rotore di  $\mathbf{v}$ . Interpretare il risultato tenendo conto del punto a).

◆ **Hint:** a) Si ha  $x = 0$  e  $y' = \lambda y$  da cui  $y = e^{\lambda t}$ .

b)

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

✎ **Esercizio 2.10.11.**

Il potenziale gravitazionale generato da una sfera omogenea di raggio  $R$  è:

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\delta}{r} & \text{se } r \geq R \\ 2\pi\delta\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) & \text{se } r < R \end{cases}$$

dove  $\delta$  è una costante (la densità della sfera) e  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Dopo aver calcolato il campo gravitazionale  $\mathbf{F} = \nabla U$ , si calcoli la divergenza del campo, verificando che essa è nulla nei punti dello spazio privi di materia e costante nella regione dello spazio in cui vi è una densità costante e positiva di materia.

◆ **Hint:** Poniamo

$$C_1 := \frac{4}{3}\pi R^3 \delta \quad C_2 := 2\pi\delta R^2 \quad C_3 := -\frac{2}{3}\pi\delta.$$

Allora

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq R \\ C_2 + C_3(x^2 + y^2 + z^2) & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R \end{cases}$$

e

$$\mathbf{F} = \nabla U(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{C_1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z) & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq R \\ -2C_3(x, y, z) & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R. \end{cases}$$

A questo punto, se  $r \geq R$  cioè se  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq R$  si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \frac{-C_1(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(-Cx)(2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &\quad + \frac{-C_1(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(-Cy)(2y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &\quad + \frac{-C_1(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(-Cz)(2z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= \frac{2C_1x^2 - C_1(y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{2C_1y^2 - C_1(x^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{2C_1z^2 - C_1(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0. \end{aligned}$$

Se invece  $r < R$  (cioè se  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R$ ) si ha semplicemente

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = -2C_3 - 2C_3 - 2C_3 = -6C_3 = 4\pi\delta.$$

✎ **Esercizio 2.10.12.**

Come l'esercizio precedente, nel caso del potenziale gravitazionale generato da uno strato sferico di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ :

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\delta(R_2^3 - R_1^3)\frac{1}{r} & \text{se } r > R_2 \\ 2\pi\delta(R_2^2 - \frac{r^2}{3}) - \frac{4}{3}\pi\delta\frac{R_1^3}{r} & \text{se } R_1 < r \leq R_2 \\ 2\pi\delta(R_2^2 - R_1^2) & \text{se } r \leq R_1. \end{cases}$$

◆ **Hint:** Poniamo

$$K_1 := \frac{4}{3}\pi\delta(R_2^3 - R_1^3) \quad K_2 := 2\pi\delta R_2^2 \quad K_3 := -\frac{2}{3}\pi\delta \quad K_4 := -\frac{4}{3}\pi\delta R_1^3 \quad K_5 := 2\pi\delta(R_2^2 - R_1^2).$$

In tal caso si ha

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{K_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R_2 \\ K_2 + K_3(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{K_4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{se } R_1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R_2 \\ K_5 & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R_1 \end{cases}$$

e

$$\mathbf{F} = \nabla U(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{K_1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z) & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R_2 \\ -2K_3(x, y, z) - \frac{K_4}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z) & \text{se } R_1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R_2 \\ 0 & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R_1. \end{cases}$$

Pertanto in maniera analoga a prima si dimostra che

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \begin{cases} 0 & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R_2 \\ 4\pi\delta & \text{se } R_1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R_2 \\ 0 & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R_1. \end{cases}$$

## 2.10.2. Campi vettoriali

### ✎ Esercizio 2.10.13.

Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (z e^{xz}, 1 + z^2 \cos y, x e^{xz} + 2z \sin y),$$

- (i) si verifichi, sulla base di risultati teorici, che esso ammette un potenziale scalare;
- (ii) si determini un potenziale scalare di  $\mathbf{v}$ ;
- (iii) si determini il potenziale scalare  $U$  tale che  $U(0, 0, 0) = 0$ .

(i) Condizione sufficiente affinché un campo vettoriale ammetta potenziale scalare è che valga la condizione delle derivate in croce (in questo caso, ciò è equivalente a chiedere che  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sia irrotazionale) e che il dominio di  $\mathbf{v}$  sia semplicemente connesso. È facile vedere che il dominio di  $\mathbf{v}$  è  $\mathbb{R}^3$  che è semplicemente connesso. Vediamo se vale anche la condizione delle derivate in croce, che è sempre necessaria all'esistenza del potenziale.

Poniamo

$$v_1(x, y, z) = z e^{xz} \quad v_2(x, y, z) = 1 + z^2 \cos y \quad v_3(x, y, z) = x e^{xz} + 2z \sin y.$$

Si ha

$$\partial_y v_3 = 2z \cos y = \partial_z v_2 \quad \partial_z v_1 = e^{xz} + xz e^{xz} = \partial_x v_3 \quad \partial_x v_2 = 0 = \partial_y v_1.$$

Quindi il campo considerato è conservativo.

(ii) Per determinare un potenziale scalare  $U$  di  $\mathbf{v}$  è sufficiente osservare che si deve avere

$$U_x(x, y, z) = z e^{xz}$$

$$U_y(x, y, z) = 1 + z^2 \cos y$$

$$U_z(x, y, z) = x e^{xz} + 2z \sin y$$



da cui

$$U(x, y, z) = \int z e^{xz} dx = e^{xz} + c_1(y, z)$$

$$U(x, y, z) = \int (1 + z^2 \cos y) dy = y + z^2 \sin y + c_2(x, z)$$

$$U(x, y, z) = \int (x e^{xz} + 2z \sin y) dz = e^{xz} + z^2 \sin y + c_3(x, y).$$

Possiamo scegliere  $c_1(y, z) = y + z^2 \sin y$ ,  $c_2(x, z) = e^{xz}$  e  $c_3(x, y) = y$ .

Quindi un potenziale scalare per  $\mathbf{v}$  è  $U(x, y, z) = e^{xz} + y + z^2 \sin y$ ; tutti gli altri potenziali per  $\mathbf{v}$  differiscono da  $U$  per una costante arbitraria, quindi la generica famiglia di potenziali è

$$U(x, y, z) = e^{xz} + y + z^2 \sin y + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

(iii) Dall'espressione generica del potenziale ricavata al punto precedente si ottiene  $U(0, 0, 0) = 1 + 0 + 0 + C = 0$  se e solo se  $C = -1$ . Pertanto il potenziale richiesto è

$$U(x, y, z) = e^{xz} + y + z^2 \sin y - 1.$$

#### ✎ Esercizio 2.10.14.

Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) := \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 5y^2, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 10xy \right),$$

(i) dire se ammette un potenziale in tutto il dominio di definizione ed eventualmente calcolarlo;

(ii) calcolare l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma} F \cdot d\gamma$ , dove  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\cos(t\pi) + t^2, 1 + t^2)$ .

(i) Condizione sufficiente affinché un campo vettoriale ammetta potenziale scalare è che valga la condizione delle derivate in croce e che il dominio di  $F$  sia semplicemente connesso. È facile vedere che il dominio di  $F$  è  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  che non è semplicemente connesso. Vediamo se vale la condizione delle derivate in croce, che è sempre necessaria all'esistenza del potenziale.

Poniamo

$$F_1(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 5y^2 \quad F_2(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 10xy.$$

Si ha

$$\partial_x F_2 = -\frac{1}{2} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + 10y = \partial_y F_1.$$

Quindi il campo considerato potrebbe essere conservativo ma per stabilirlo devo provare a calcolare un potenziale con la definizione.

Per determinare un potenziale scalare  $U$  di  $F$  è sufficiente osservare che si dovrebbe avere

$$\begin{aligned}U_x(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 5y^2 \\U_y(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 10xy\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \int \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 5y^2 \right) dx = \sqrt{x^2 + y^2} + 5xy^2 + c_1(y) \\U(x, y) &= \int \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 10xy \right) dy = \sqrt{x^2 + y^2} + 5xy^2 + c_2(x)\end{aligned}$$

Possiamo scegliere  $c_1(y) = c_2(x) = 0$ .

Quindi il campo dato è conservativo e un potenziale scalare per  $F$  è  $U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 5xy^2$ ; tutti gli altri potenziali per  $F$  differiscono da  $U$  per una costante arbitraria, quindi la generica famiglia di potenziali è

$$U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 5xy^2 + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

(ii) Visto che il campo  $F$  è conservativo, si ha

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)).$$

Allora

$$\gamma(1) = (0, 2) \quad \gamma(0) = (1, 1)$$

e

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = -3 - \sqrt{2}.$$

✎ **Esercizio 2.10.15.**

Sia  $\gamma$  la curva chiusa in  $\mathbb{R}^3$  formata dai tre segmenti che uniscono, nell'ordine, i punti

$$P_1 = (1, 0, 0), \quad P_2 = (0, 3, 0), \quad P_3 = (0, 0, 4).$$

(i) Calcolare

$$\int_{\gamma} z^2 ds.$$

(ii) Sia  $V$  il campo vettoriale definito da  $V(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ . Calcolare

$$\oint_{\gamma} V \cdot d\gamma$$

e commentare il risultato. **N.B.** Questo esercizio ha lo scopo di mostrare con un esempio la differenza tra integrali di linea di prima e seconda specie.

(i) Sia  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ , dove  $\gamma_1$  è il segmento che unisce nell'ordine  $P_1$  e  $P_2$ ,  $\gamma_2$  è il segmento che unisce nell'ordine  $P_2$  e  $P_3$  e  $\gamma_3$  è il segmento che unisce nell'ordine  $P_3$  e  $P_1$ . Bisogna trovare una parametrizzazione di  $\gamma$ . Dopo di che si avrà

$$\int_{\gamma} z^2 ds = \int_{\gamma_1} z^2 ds + \int_{\gamma_2} z^2 ds + \int_{\gamma_3} z^2 ds$$

ma  $\gamma_1$  è tale che  $z = 0$  quindi

$$\int_{\gamma_1} z^2 ds = 0.$$

D'altra parte, troviamo ora una parametrizzazione di  $\gamma_2$ . Si ha

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{12 - 3t}{4} \\ z = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 4 \quad \gamma_2'(t) = \left(0, -\frac{3}{4}, 1\right) \quad |\gamma_2'(t)| = \frac{5}{4}$$

quindi

$$\int_{\gamma_2} z^2 ds = \int_0^4 t^2 \frac{5}{4} dt = \frac{5}{4} \frac{t^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{80}{3}$$

Infine

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -4t + 4 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \gamma_3'(t) = (1, 0, -4) \quad |\gamma_3'(t)| = \sqrt{17}$$

quindi

$$\int_{\gamma_3} z^2 ds = \int_0^1 (4-4t)^2 \sqrt{17} dt = \int_0^1 \sqrt{17} 16 (1-t)^2 dt = \sqrt{17} 16 \left[ t - t^2 + \frac{t^3}{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{16}{3} \sqrt{17}.$$

Quindi riassumendo

$$\int_{\gamma} z^2 ds = \frac{16}{3} [5 + \sqrt{17}].$$

(ii) Si vede immediatamente che il campo vettoriale  $V$  è conservativo perché irrotazionale su  $\mathbb{R}^3$  e il suo dominio (che è  $\mathbb{R}^3$ ) è semplicemente connesso. Allora

$$\oint_{\gamma} V \cdot d\gamma = 0.$$

Verifichiamo questo risultato utilizzando la definizione. Utilizziamo la seguente parametrizzazione per  $\gamma_1$

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = 1 - t/3 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3 \quad \gamma_1'(t) = \left( -\frac{1}{3}, 1, 0 \right).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} V \cdot d\gamma &= \int_{\gamma_1} V \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} V \cdot d\gamma + \int_{\gamma_3} V \cdot d\gamma = \int_0^3 \left(1 - \frac{t}{3}\right)^2 \left(-\frac{1}{3}\right) dt + \int_0^3 t dt \\ &+ \int_0^4 \left(\frac{12-3t}{4}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) dt + \int_0^4 t dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (-4)(-4t+4) dt \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^3 \left[1 - \frac{2}{3}t + \frac{t^2}{9}\right] dt + \frac{t^2}{2} \Big|_0^3 - \frac{3}{4} \int_0^4 \left(3 - \frac{3}{4}t\right) dt + \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 + \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 + 16 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 - 16 = -1 \\ &+ \frac{2}{9} \frac{t^2}{2} \Big|_0^3 - \frac{1}{27} \frac{t^3}{3} \Big|_0^3 + \frac{9}{2} - 9 + \frac{9}{16} \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 + 8 + \frac{1}{3} + 8 - 16 = -1 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{9}{2} - 9 + \frac{9}{2} + \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$

✎ **Esercizio 2.10.16.**

Sia  $\gamma$  la curva piana definita da  $\gamma(t) = (t \sin t, 2t)$  e sia  $W(x, y) = (-y, x)$  un campo vettoriale piano.

- Calcolate il lavoro  $L := \int_{P_0 P_1} W \cdot d\gamma$  del campo  $W$  lungo il tratto della curva  $\gamma$  congiungente  $P_0 = (0, 0)$  e  $P_1 = (0, 2\pi)$ .
- Calcolate il lavoro di  $W$  lungo il segmento congiungente  $P_0$  e  $P_1$ .

Ci chiediamo innanzitutto se il campo  $W$  è conservativo. Posto

$$W_1(x, y) = -y \quad W_2(x, y) = x,$$

si ha che

$$\partial_y W_1 = -1 \neq 1 = \partial_x W_2.$$

Il campo  $W$  non soddisfa la condizione delle derivate in croce dunque non è conservativo. Allora il lavoro  $l$  deve essere calcolato con la definizione.

• Nel caso della curva congiungente  $P_0$  e  $P_1$ , si ha che  $P_0 = (0, 0)$  è raggiunto per  $t = 0$  mentre  $P_1 = (0, 2\pi)$  è raggiunto per  $t = \pi$ . Dunque il tratto di curva  $\gamma$  considerata è quella per cui  $0 \leq t \leq \pi$ . Si ha inoltre

$$\gamma'(t) = (\sin t + t \cos t, 2).$$

Allora (integrando due volte per parti)

$$\begin{aligned} l &= \int_0^\pi ([-2t] [\sin t + t \cos t] + 2t \sin t) dt = \int_0^\pi -2t^2 \cos t dt = [-2t^2 \sin t]_0^\pi + \int_0^\pi 4t \sin t dt \\ &= 4 \int_0^\pi t \sin t dt = 4[-t \cos t]_0^\pi + 4 \int_0^\pi \cos t dt = 4(-\pi \cos \pi) + 4 \sin t \Big|_0^\pi = 4\pi. \end{aligned}$$

• Parametizziamo il segmento. Si ha

$$\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) = (0, 2\pi t) \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Si ha  $\tilde{\gamma}'(t) = (0, 2\pi)$  da cui

$$l = \int_0^1 (-2\pi t)0 + 0(2\pi) dt = 0.$$

### ✎ Esercizio 2.10.17.

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( \frac{f(x)y^2}{\sqrt{x}} + 5y^2, -y \cos x + 10xy \right),$$

si stabilisca se  $f$  può essere scelta in modo tale che  $F$  ammetta un potenziale in tutto il suo dominio di definizione, e nel caso calcolarlo.

Il campo  $F$  è definito sull'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  che è semplicemente connesso. Una condizione necessaria affinché il campo  $F$  ammetta potenziale è che valga la condizione delle derivate in croce. Imponiamo questa condizione e vediamo cosa implica su  $f$ . Si dovrebbe avere

$$D_x(-y \cos x + 10xy) = D_y \left( \frac{f(x)y^2}{\sqrt{x}} + 5y^2 \right)$$

da cui

$$y \sin x + 10y = \frac{f(x)}{\sqrt{x}} 2y + 10y$$

e questo implica allora che  $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin x$ .

Con questa scelta di  $f$  vale la condizione delle derivate in croce e si ha

$$F(x, y) = \left( \frac{1}{2} \sin x y^2 + 5 y^2, -y \cos x + 10 x y \right).$$

Pertanto  $F$  è definito su un dominio semplicemente connesso; abbiamo appena verificato che vale la condizione delle derivate in croce, quindi la teoria ci assicura che il campo dato è conservativo. Calcoliamo un potenziale  $U$ . Si deve avere

$$U_x = \frac{1}{2} \sin x y^2 + 5 y^2 \quad U_y = -y \cos x + 10 x y$$

da cui

$$U = \int \left( \frac{1}{2} \sin x y^2 + 5 y^2 \right) dx = \frac{1}{2} y^2 (-\cos x) + 5 x y^2 + C_1(y)$$

ma anche

$$U = \int (-y \cos x + 10 x y) dy = -\frac{y^2}{2} \cos x + 5 x y^2 + C_2(x).$$

A questo punto possiamo senz'altro scegliere  $C_1(y) = C_2(x) = 0$  e

$$U(x, y) = -\frac{1}{2} y^2 \cos x + 5 x y^2.$$

Gli altri potenziali per  $F$  differiscono da  $U$  per una costante arbitraria, cioè la famiglia di potenziali è data da

$$U(x, y) = -\frac{1}{2} y^2 \cos x + 5 x y^2 + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

✎ **Esercizio 2.10.18.**

Si calcoli l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma} G \cdot d\gamma$ , dove

$$G(x, y) = (y \sin x, -\cos x) e^{y(\cos x)}, \quad \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t\pi) + t^3, 1 + t^4).$$

Si tratta di calcolare un integrale curvilineo di seconda specie, cioè un integrale di un campo vettoriale. Vediamo se il campo  $G$  è conservativo. Il suo dominio di definizione è  $\mathbb{R}^2$  che è semplicemente connesso; vediamo se vale la condizione delle derivate in croce. Dovrebbe essere

$$D_x(-\cos x e^{y(\cos x)}) = D_y(e^{y(\cos x)} y \sin x)$$

da cui

$$\sin x e^{y(\cos x)} + \cos x e^{y(\cos x)} \sin x y = e^{y(\cos x)} \cos x y \sin x + e^{y(\cos x)} \sin x.$$

Quindi la teoria ci assicura che il campo  $G$  è conservativo. Troviamo un potenziale  $U$ . Deve essere

$$U_x = y \sin x e^{y(\cos x)} \quad U_y = -\cos x e^{y(\cos x)}$$

da cui

$$U = \int (y \sin x e^{y(\cos x)}) dx = -e^{y(\cos x)} + C_1(y)$$

e anche

$$U = \int (-\cos x e^{y(\cos x)}) dy = -e^{y(\cos x)} + C_2(x)$$

quindi possiamo senz'altro scegliere  $C_1(y) = C_2(x) = 0$ ; un potenziale è dunque  $U(x, y) = -e^{y(\cos x)}$  e gli altri potenziali differiscono da  $U$  per una costante arbitraria, cioè la famiglia di potenziali è data da

$$U(x, y) = -e^{y(\cos x)} + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

A questo punto

$$\int_{\gamma} G \cdot d\gamma = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0))$$

da cui

$$\gamma(1) = (0, 2) \quad \gamma(0) = (1, 1)$$

e

$$\int_{\gamma} G \cdot d\gamma = -e^2 + e^{\cos 1}.$$

### ✎ Esercizio 2.10.19.

Calcolare il lavoro del campo  $F(x, y) = (3y, 1 + x)$  sulla curva  $\gamma$  parametrizzata da  $\Phi(t) = (t^2, t + \arctan t)$  con  $0 \leq t \leq 2$ .

Si tratta di un integrale curvilineo di seconda specie. Sia  $F_1(x, y) = 3y$  e  $F_2(x, y) = 1 + x$ . Allora

$$\int_{\gamma} F = \int_0^2 F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) dt$$

dove

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) = \left( 2t, 1 + \frac{1}{1+t^2} \right).$$

Allora

$$\int_{\gamma} F = \int_0^2 \left( 6t + \frac{6t}{1+t^2} + 1 + 2t + \frac{1}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right) dt = \int_0^2 \left( 1 + 8t + \frac{8t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

da cui

$$\int_{\gamma} F = [t + 4t^2 + 4 \log(1 + t^2) + \arctan t]_0^2 = 18 + 4 \log 5 + \arctan 2.$$

◄ **Esercizio 2.10.20.**

Considerate il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left[ \left( 3x^2 + \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} \right), \left( 3 + \frac{2x^2y}{1 + x^2y^2} \right) \right]$$

- a) dite se vale la condizione delle derivate in croce;  
 b) dite se  $F$  è conservativo, e in caso affermativo calcolate un potenziale;  
 c) calcolate l'integrale di  $F$  sulla metà superiore dell'ellisse di equazione  $x^2 + 4y^2 = 4$  percorsa in verso antiorario.

(a) Verifichiamo che vale la condizione delle derivate in croce. Si deve avere

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 3 + \frac{2x^2y}{1 + x^2y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( 3x^2 + \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} \right).$$

D'altra parte si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 3 + \frac{2x^2y}{1 + x^2y^2} \right) = \frac{4xy}{(1 + x^2y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( 3x^2 + \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} \right)$$

e quindi vale la condizione delle derivate in croce.

(b) Si ha che  $F$  è conservativo perché vale la condizione delle derivate in croce e perché il suo dominio di definizione (che è  $\mathbb{R}^2$ ) è semplicemente connesso. Troviamo un potenziale di  $F$ . Se  $U$  è un potenziale, deve senz'altro essere

$$U_x = 3x^2 + \frac{2xy^2}{1 + x^2y^2}$$

da cui

$$U(x, y) = x^3 + \log(1 + x^2y^2) + c_1(y).$$

D'altra parte deve anche essere

$$U_y = 3 + \frac{2x^2y}{1 + x^2y^2}$$

da cui

$$U(x, y) = 3y + \log(1 + x^2y^2) + c_2(x).$$

Allora un potenziale si ottiene scegliendo  $c_1(y) = 3y$  e  $c_2(x) = x^3$ .



(c) Parametizziamo la parte superiore dell'ellisse. Si ha

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = 2 \cos \theta \\ y(\theta) = \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi].$$

Da cui

$$\gamma'(\theta) = (-2 \sin \theta, \cos \theta).$$

Quindi, dette rispettivamente  $F_1(x, y)$  e  $F_2(x, y)$  le due componenti del campo, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F ds &= \int_0^{\pi} [F_1(x(\theta), y(\theta)) \cdot \gamma'_1(\theta) + F_2(x(\theta), y(\theta)) \cdot \gamma'_2(\theta)] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[ -24 \cos^2 \theta \sin \theta - \frac{8 \cos \theta \sin^3 \theta}{1 + 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta} + 3 \cos \theta + \frac{8 \cos^3 \theta \sin \theta}{1 + 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \right] d\theta \\ &= 8 [\cos^3 \theta]_0^{\pi} + 3 [\sin \theta]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{4 \sin(2\theta) \cos(2\theta)}{1 + [\sin(2\theta)]^2} d\theta = -16 + [\log(1 + [\sin(2\theta)]^2)]_0^{\pi} = -16 \end{aligned}$$

✎ **Esercizio 2.10.21.**

Considerate i campi  $F_1(x, y) = (2xy, x^2)$  e  $F_2(x, y) = (-y, x)$ ; a) dite per quali campi vale la condizione delle derivate in croce;  
 b) dite se i campi sono conservativi (o se almeno uno lo è) e in caso affermativo calcolate un potenziale;  
 c) calcolate l'integrale di  $F_1 + F_2$  sul bordo del rettangolo  $[0, 3] \times [0, 1]$  percorso in verso antiorario.

Per  $F_1$  si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}x^2,$$

quindi per  $F_1$  vale la condizione delle derivate in croce su tutto  $\mathbb{R}^2$ , pertanto è conservativo. Un potenziale si trova subito ed è  $x^2y$ .

Invece per  $F_2$  si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x}x,$$

quindi per  $F_2$  non vale la condizione delle derivate in croce quindi non è conservativo.

Dato che il bordo del rettangolo è una curva chiusa, l'integrale di  $F_1$  è nullo. Resta solo da calcolare quello di  $F_2$ . Parametizziamo i quattro lati:

$$l_1 := \phi_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 3 \quad \int_{l_1} F_2 = \int_0^3 0 dt = 0;$$

$$l_2 := \phi_2(t) = (3, t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \int_{l_2} F_2 = \int_0^1 3 dt = 3;$$

$$l_3 := \phi_3(t) = (3 - t, 1), \quad 0 \leq t \leq 3 \quad \int_{l_3} F_2 = \int_0^3 1 dt = 3;$$

$$l_4 := \phi_4(t) = (0, 1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \int_{l_4} F_2 = \int_0^1 0 dt = 0.$$

da cui

$$\int F_2 = 6.$$

✎ **Esercizio 2.10.22.**

Considerate il campo vettoriale  $F(x, y) = (-y, 3x)$

- a) dite se per  $F$  vale la condizione delle derivate in croce;
- b) dite se esiste un numero  $c$  tale che  $F(x, y) - c(x, -y)$  sia conservativo;
- c) calcolate l'integrale di  $F$  sulla curva che si ottiene percorrendo nell'ordine il segmento verticale da  $(4, 0)$  a  $(4, 2)$ , poi tre quarti della circonferenza centrata in  $(2, 2)$  fino a  $(2, 0)$ , infine la metà superiore della circonferenza centrata in  $(3, 0)$  fino a tornare al punto di partenza.

Si ha  $F = -y dx + 3x dy$  e

$$\frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1 \neq 3 = \frac{\partial(3x)}{\partial x},$$

quindi  $F$  non è conservativo. Dato che il dominio di  $F - c(x dy - y dx)$  è  $\mathbb{R}^2$ , per dire che è conservativo basta vedere se vale la condizione delle derivate in croce, ma

$$\begin{aligned} F - c(x dy - y dx) &= (c - 1)y dx + (3 - c)x dy \\ \frac{\partial}{\partial y}[(c - 1)y] &= c - 1; \quad \frac{\partial}{\partial x}[(3 - c)x] = 3 - c, \end{aligned}$$

quindi vale

$$\Leftrightarrow c - 1 = 3 - c \Leftrightarrow 2c = 4 \Leftrightarrow c = 2.$$

Chiamiamo ora  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  rispettivamente il segmento, i 3/4 di circonferenza e la semicirconferenza orientati come prescritto e parametrizzati in questo modo:

$$\gamma_1 : (4, t) \quad 0 \leq t \leq 2;$$

$$\gamma_2 : (2 + 2 \cos t, 2 + 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma_3 : (3 - \cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$\int_{\gamma_1} F = \int_0^2 12 dt = 24$$

$$\int_{\gamma_2} F = \int_0^{3\pi/2} 12 \cos t + 12 \cos^2 t + 4 \sin t + 4 \sin^2 t dt = [12 \sin t - 4 \cos t + 8t + 4 \sin t \cos t]_0^{3\pi/2} = 12\pi - 8$$

$$\int_{\gamma_3} = \int_0^\pi -9 \cos t - 3 \cos^2 t - \sin^2 t dt = [-9 \sin t - 2 - \sin t \cos t]_0^\pi = -2\pi$$

e la somma vale  $10\pi + 16$ .

✎ **Esercizio 2.10.23.**

Considerate il campo vettoriale  $F(x, y, z) = (z, x, y)$ ;

a) dite se per il campo  $F$  vale la condizione delle derivate in croce;

b) calcolate l'integrale di  $F$  sulla curva che si ottiene percorrendo (nell'ordine) prima la curva  $\gamma$  parametrizzata da  $(\cos t, \sin t, t)$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$  e poi il segmento che parte dal secondo estremo di  $\gamma$  e arriva al primo estremo di  $\gamma$ .

Per  $F$  non vale la condizione delle derivate in croce; infatti la derivata in  $x$  del coefficiente di  $dy$  è 1, quella in  $y$  del coefficiente di  $dx$  è 0. Calcoliamo l'integrale sull'elica:

$$\int_0^{2\pi} (z dx + x dy + y dz) dt = \int_0^{2\pi} (t(-\sin t) + \cos t(\cos t) + \sin t \cdot 1) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-t \sin t + \cos^2 t + \sin t) dt = \left[ (t \cos t - \sin t) + \frac{t + \sin t + \cos t}{2} - \cos t \right]_0^{2\pi} = 3\pi.$$

Invece sul segmento che parte da  $(1, 0, 2\pi)$  e arriva a  $(1, 0, 0)$  ed è quindi parametrizzato da  $(1, 0, 2\pi - t)$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$  si ha

$$\int_0^{2\pi} (z dx + x dy + y dz) dt = \int_0^{2\pi} (1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (2\pi - t) \cdot 0) dt = 0,$$

quindi il valore finale è  $3\pi$ .

✎ **Esercizio 2.10.24.**

Sia  $F$  il campo vettoriale  $F(x, y) = (2x \sin y - 3y, x^2 \cos y)$  e sia  $\gamma$  la curva costituita dalla metà inferiore della circonferenza di centro  $(\pi, 0)$  e raggio  $\pi$ , percorsa da  $(0, 0)$  a  $(2\pi, 0)$ , seguita dalla parte del grafico della funzione  $\sin x$  con  $x \in [0, 2\pi]$ , percorsa da  $(2\pi, 0)$  a  $(0, 0)$ ;

a) dite se per il campo  $F$  valgono le condizioni delle derivate in croce;

b) dite se  $F$  è conservativo;

c) scrivete  $F$  come somma  $F_0 + F_1$  di due campi vettoriali con  $F_0$  conservativo;

d) Calcolate  $\int_\gamma F \cdot d\gamma$ .

- a)  $\frac{\partial A}{\partial y} = 2x \cos y - 3 \neq \frac{\partial B}{\partial x} = 2x \cos y$  quindi per  $F$  non vale la condizione delle derivate in croce.
- b)  $F$  non è conservativo perché non vale la condizione delle derivate in croce (che è condizione necessaria).
- c)  $F = 2x \sin y dx + x^2 \cos y dy - 3y dx$  dove  $F_0 := 2x \sin y dx + x^2 \cos y dy$  e  $F_1 := -3y dx$ . Si ha che  $F_0$  è conservativo perché vale la condizione delle derivate in croce su  $\mathbb{R}^2$  semplicemente connesso.
- d)  $\int_{\gamma} F = \int_{\gamma} F_1$  perché  $F_0$  è conservativo e  $\gamma$  chiusa.

$$\gamma_1 \begin{cases} x = \pi(1 + \cos t) \\ y = \pi \sin t \end{cases} \quad -\pi \leq t \leq 0,$$

$$\gamma_2 \begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dunque si ha

$$\int_{\gamma} F = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F = 3\pi^2 \int_{-\pi}^0 \sin^2 t dt + \int_0^{2\pi} 3 \sin t dt = \frac{3}{2}\pi^3 + 0 = \frac{3}{2}\pi^3.$$

✎ **Esercizio 2.10.25.**

Calcolare

$$\int_{\gamma} ye^x dx + \left( e^x + \frac{2}{y} \log y \right) dy$$

ove  $\gamma$  è la curva piana di equazione cartesiana  $y = (1 - e)x^2 + e$  per  $0 \leq x \leq 1$  percorsa nel verso delle  $x$  crescenti.

Il campo

$$F = ye^x dx + \left( e^x + \frac{2}{y} \log y \right) dy$$

è tale che vale la condizione delle derivate in croce:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Inoltre è definito sull'insieme  $\{(x, y) : y > 0\}$  che è un semipiano aperto e quindi semplicemente connesso. Allora  $F$  è conservativo nel suo dominio.

Potenziale:

$$f(x, y) = ye^x + (\log y)^2 + c.$$

La curva è una parabola di vertice  $(0, e)$ .

$$\int_{\gamma} w = f(1, 1) - f(0, e) = e - [e + 1] = -1.$$

✎ **Esercizio 2.10.26.**

Dato il campo vettoriale piano  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ :

verificare che è solenoidale in tutto il piano;

cercare un potenziale vettore di  $\mathbf{F}$ .

(*Suggerimento*: cercare un potenziale  $\psi$  indipendente dalla variabile  $z$ ).

Ponendo  $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$  si ha

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1 - 1 = 0.$$

Per cercare un potenziale vettore  $\psi$  cioè un campo vettoriale tale che  $\operatorname{rot}\psi = \mathbf{F}$ , usiamo il suggerimento e cerchiamolo nella forma  $\psi = (\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \psi_3(x, y))$  e dunque, calcolandone il rotore si ottiene

$$\operatorname{rot}\psi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = (\partial_y\psi_3)\mathbf{i} - (\partial_x\psi_3)\mathbf{j} + (\partial_x\psi_2 - \partial_y\psi_1)\mathbf{k}.$$

A questo punto deve essere

$$\partial_y\psi_3 = x \quad -\partial_x\psi_3 = -y \quad \partial_x\psi_2 - \partial_y\psi_1 = 0$$

quindi il generico potenziale vettore è

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, xy)$$

con  $\partial_x\psi_2 = \partial_y\psi_1$ . Per esempio  $(0, 0, xy)$ .

✎ **Esercizio 2.10.27.**

Sia  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ . Determinare le linee integrali del campo e disegnarne alcune. Verificare che il campo è conservativo in  $\mathbb{R}^2$  e calcolarne il potenziale. Determinare le linee equipotenziiali e disegnarne alcune.

Le linee integrali del campo risolvono le equazioni differenziali

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

cioè, separando le variabili

$$ydy = xdx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y^2 = x^2 + 2C \Leftrightarrow x^2 - y^2 = K \quad K \in \mathbb{R}.$$

Si tratta di iperboli intersecanti gli assi, unite alla coppia delle bisettrici.

Il campo dato è definito su tutto  $\mathbb{R}^2$  che è un dominio semplicemente connesso; inoltre vale la condizione delle derivate in croce, cioè

$$1 = \partial_y(y) = \partial_x(x) = 1$$

quindi dalla teoria sappiamo che il campo è conservativo. Per determinarne un potenziale, integriamo la prima componente del campo in  $x$ , cioè

$$U(x, y) = \int y dx = xy + C(y).$$

A questo punto deriviamo la quantità ottenuta in  $y$ ; se  $U$  è un potenziale per il campo dato, deve essere che tale derivata uguaglia la seconda componente del campo cioè

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + C(y)) = x + C'(y) = x \Leftrightarrow C'(y) = 0 \Leftrightarrow C(y) = C \in \mathbb{R}.$$

Quindi il potenziale cercato è

$$U(x, y) = xy + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare le linee equipotenziali basta considerare l'equazione  $U(x, y) = K$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Si tratta di iperboli equilateri.

#### ✎ Esercizio 2.10.28.

Stabilire se il campo

$$\mathbf{F} = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{x}{z}\mathbf{j} - \frac{xy}{z^2}\mathbf{k}$$

è conservativo nel semispazio  $z > 0$ , determinando in caso affermativo un potenziale. Il campo è solenoidale nel semispazio  $z > 0$ ?

Il dominio  $z > 0$  è semplicemente connesso; vediamo dunque se vale la condizione delle derivate in croce. Si ha

$$-\frac{x}{z^2} = \partial_y F_3 = \partial_z F_2 = -\frac{x}{z^2}$$

$$\frac{1}{z} = \partial_x F_2 = \partial_y F_1 = \frac{1}{z}$$

$$-\frac{y}{z^2} = \partial_z F_1 = \partial_x F_3 = -\frac{y}{z^2}$$

Quindi dalla teoria sappiamo che il campo è conservativo; pertanto esiste  $U(x, y, z)$  potenziale tale che  $\nabla U(x, y, z) = \mathbf{F}$ . Per ricavarlo osserviamo che innanzitutto  $U$  deve essere uguale all'integrale rispetto alla prima variabile della prima componente del campo, dunque

$$U(x, y, z) = \int \frac{y}{z} dx = \frac{yx}{z} + C(y, z).$$

A questo punto, andando a derivare questa quantità nelle altre variabili, si devono ottenere le altre due componenti del campo, cioè

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{yx}{z} + C(y, z) \right) = \frac{x}{z} + C_y(y, z) = \frac{x}{z}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{yx}{z} + C(y, z) \right) = -\frac{xy}{z^2} + C_z(y, z) = -\frac{xy}{z^2}$$

Quindi possiamo prendere  $C_y = C_z = 0$  e pertanto il potenziale cercato risulta

$$U(x, y, z) = \frac{xy}{z} + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vediamo se il campo dato è solenoidale nel dominio  $z > 0$ . Si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 + 0 + \frac{2xy}{z^3}$$

che in generale è diverso da zero, quindi il campo dato non è solenoidale in  $z > 0$ .

#### ✎ Esercizio 2.10.29.

Se il potenziale elettrostatico  $U(x, y, z)$  di una carica puntiforme posta nell'origine anziché essere  $U = k/r$  fosse  $U = k/r^\alpha$  per qualche esponente  $\alpha > 0$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , il campo  $\nabla U$  sarebbe ancora conservativo (per definizione!). Sarebbe ancora solenoidale, fuori dall'origine? (*Questo argomento può essere utilizzato per dimostrare sperimentalmente che l'esponente "vero" è esattamente, e non solo approssimativamente, 1*).

•♦ **Hint:** Sia

$$U(x, y, z) = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}}.$$

Allora, detto

$$\mathbf{F} = \nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = (F_1, F_2, F_3)$$

si avrebbe

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\alpha k x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{\alpha k y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\alpha k z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \right] \\
 &= \frac{-\alpha k (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha+2}{2}} + \alpha k x \left( \frac{\alpha+2}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2} (2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha+2}} \\
 &\quad + \frac{-\alpha k (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha+2}{2}} + \alpha k y \left( \frac{\alpha+2}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2} (2y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha+2}} \\
 &\quad + \frac{-\alpha k (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha+2}{2}} + \alpha k z \left( \frac{\alpha+2}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2} (2z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha+2}} \\
 &= \frac{-3\alpha k (x^2 + y^2 + z^2) + \alpha k (x^2 + y^2 + z^2) (\alpha + 2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \\
 &= \frac{[-3\alpha k + \alpha(\alpha + 2)k](x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}}
 \end{aligned}$$

Pertanto il campo è solenoidale se accade che

$$-3\alpha k + \alpha(\alpha + 2)k = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = 1.$$

Quindi per un  $\alpha$  diverso da tali valori, il campo non sarebbe più solenoidale.

### ✎ Esercizio 2.10.30.

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = 3x^2y^2z\mathbf{i} + (2x^3yz + z)\mathbf{j} + (x^3y^2 + y)\mathbf{k}$$

- b) Si verifichi che il campo  $\mathbf{F}$  è irrotazionale in tutto lo spazio  $\mathbb{R}^3$  e se ne deduca che è conservativo.
- c) Si determini un potenziale  $U(x, y, z)$  di  $\mathbf{F}$  in  $\mathbb{R}^3$ .
- e) Si calcoli la divergenza di  $\mathbf{F}$  e si dica se esiste un insieme aperto di  $\mathbb{R}^3$  in cui il campo è solenoidale.

b) Vediamo se sono soddisfatte le condizioni delle derivate in croce. Si ha

$$\begin{aligned}
 2x^3y + 1 &= \partial_z F_2 = \partial_y F_3 = 2x^3y + 1 \\
 6x^2yz &= \partial_x F_2 = \partial_y F_1 = 6x^2yz \\
 3x^2y^2 &= \partial_x F_3 = \partial_z F_1 = 3x^2y^2
 \end{aligned}$$



Quindi sono verificare le condizioni delle derivate in croce; il campo vettoriale dunque è irrotazionale su un dominio semplicemente connesso ( $\mathbb{R}^3$ ) pertanto è conservativo.

c) Per calcolare un potenziale, prima di tutto osserviamo che deve essere  $\nabla U(x, y, z) = \mathbf{F}$  pertanto integrando la prima componente del campo nella prima variabile si ottiene

$$U(x, y, z) = \int 3x^2y^2z \, dx = x^3y^2z + C(y, z).$$

A questo punto, derivando questa espressione rispetto alle altre due variabili, si dovrebbero cercare condizioni su  $C$  in modo da ottenere le altre due componenti del campo, cioè

$$\frac{\partial}{\partial y} [x^3y^2z + C(y, z)] = 2x^3yz + C_y(y, z) = 2x^3yz + z$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} [x^3y^2z + C(y, z)] = x^3y^2 + C_z(y, z) = x^3y^2 + y.$$

Quindi affinché  $U$  sia veramente un potenziale per  $\mathbf{F}$  si dovrebbe avere

$$C_y(y, z) = z \quad C_z(y, z) = y$$

e pertanto, integrando nelle rispettive variabili, si ha  $C(y, z) = yz + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Alla fine dunque un potenziale per  $\mathbf{F}$  è dato dalla funzione

$$U(x, y, z) = x^3y^2z + yz + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

e) Si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 6xy^2z + 2x^3z = 2xz[3y^2 + x^2] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee z = 0 \vee x = y = 0.$$

Nello spazio  $\mathbb{R}^3$  l'equazione  $x = 0$  rappresenta il piano  $yz$  che è un chiuso in  $\mathbb{R}^3$ ; l'equazione  $z = 0$  rappresenta il piano  $xy$  che di nuovo è un chiuso; l'equazione  $x = y = 0$  rappresenta l'asse  $z$  che è pure un chiuso. Quindi la divergenza del campo si annulla sull'unione di chiusi che è un chiuso. Pertanto non esiste un aperto in cui il campo è solenoidale.

✎ **Esercizio 2.10.31.**

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = e^y \mathbf{i} + (xe^y + z \cos(yz)) \mathbf{j} + (y \cos(yz)) \mathbf{k}.$$

a) Si dica se il campo è irrotazionale nel suo insieme di definizione.

b) Si dica se il campo è conservativo nel suo insieme di definizione, determinando in caso affermativo un potenziale.

a) Vediamo se sono soddisfatte le condizioni delle derivate in croce. Si ha

$$\begin{aligned}\cos(yz) - yz \sin(yz) &= \partial_z F_2 = \partial_y F_3 = \cos(yz) - yz \sin(yz) \\ e^y &= \partial_x F_2 = \partial_y F_1 = e^y \\ 0 &= \partial_x F_3 = \partial_z F_1 = 0\end{aligned}$$

Quindi sono verificare le condizioni delle derivate in croce; il campo vettoriale dunque è irrotazionale.

b) Il campo è irrotazionale su un dominio semplicemente connesso ( $\mathbb{R}^3$ ) pertanto è conservativo. Per calcolare un potenziale, prima di tutto osserviamo che deve essere  $\nabla U(x, y, z) = \mathbf{F}$  pertanto integrando la prima componente del campo nella prima variabile si ottiene

$$U(x, y, z) = \int e^y dx = xe^y + C(y, z).$$

A questo punto, derivando questa espressione rispetto alle altre due variabili, si dovrebbero cercare condizioni su  $C$  in modo da ottenere le altre due componenti del campo, cioè

$$\frac{\partial}{\partial y} [xe^y + C(y, z)] = xe^y + C_y(y, z) = xe^y + z \cos(yz)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} [xe^y + C(y, z)] = 0 + C_z(y, z) = y \cos(yz).$$

Quindi affinché  $U$  sia veramente un potenziale per  $\mathbf{F}$  si dovrebbe avere

$$C_y(y, z) = z \cos(yz) \quad C_z(y, z) = y \cos(yz)$$

e pertanto, integrando nelle rispettive variabili, si ha  $C(y, z) = \cos(yz) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Alla fine dunque un potenziale per  $\mathbf{F}$  è dato dalla funzione

$$U(x, y, z) = xe^y + \cos(yz) + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

### ✎ Esercizio 2.10.32.

Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (xy - \sin z)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x \cos z\right)\mathbf{k}$$

si verifichi che  $\mathbf{F}$  è conservativo nel semispazio  $z > 0$  e si determini un potenziale.

Vediamo se sono soddisfatte le condizioni delle derivate in croce. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{e^y}{z^2} &= \partial_z F_2 = \partial_y F_3 = \frac{e^y}{z^2} \\ x &= \partial_x F_2 = \partial_y F_1 = x \\ -\cos z &= \partial_x F_3 = \partial_z F_1 = -\cos z\end{aligned}$$

Quindi sono verificare le condizioni delle derivate in croce; il campo vettoriale dunque è irrotazionale. Il semispazio  $z > 0$  è un dominio semplicemente connesso pertanto il campo è conservativo. Per calcolare un potenziale, prima di tutto osserviamo che deve essere  $\nabla U(x, y, z) = \mathbf{F}$  pertanto integrando la prima componente del campo nella prima variabile si ottiene

$$U(x, y, z) = \int (xy - \sin z) dx = \frac{x^2 y}{2} - x \sin z + C(y, z).$$

A questo punto, derivando questa espressione rispetto alle altre due variabili, si dovrebbero cercare condizioni su  $C$  in modo da ottenere le altre due componenti del campo, cioè

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{x^2 y}{2} - x \sin z + C(y, z) \right] = \frac{x^2}{2} + C_y(y, z) = \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{x^2 y}{2} - x \sin z + C(y, z) \right] = -x \cos z + C_z(y, z) = -x \cos z + \frac{e^y}{z^2}.$$

Quindi affinché  $U$  sia veramente un potenziale per  $\mathbf{F}$  si dovrebbe avere

$$C_y(y, z) = -\frac{e^y}{z} \quad C_z(y, z) = \frac{e^y}{z^2}$$

e pertanto, integrando nelle rispettive variabili, si ha  $C(y, z) = -\frac{e^y}{z} + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Alla fine dunque un potenziale per  $\mathbf{F}$  è dato dalla funzione

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 y}{2} - x \sin z - \frac{e^y}{z} + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

### ✎ Esercizio 2.10.33.

Sia  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ . Verificare che il campo è conservativo in  $\mathbb{R}^2$  e calcolarne il potenziale. Calcolare il lavoro lungo il segmento  $y = 2x$ ,  $x \in (-1, 3)$ .

Il campo dato è definito su tutto  $\mathbb{R}^2$  che è un dominio semplicemente connesso; inoltre vale la condizione delle derivate in croce, cioè

$$1 = \partial_y(y) = \partial_x(x) = 1$$

quindi dalla teoria sappiamo che il campo è conservativo. Per determinarne un potenziale:  
PRIMO MODO: integriamo la prima componente del campo in  $x$ , cioè

$$U(x, y) = \int y dx = xy + C(y).$$

A questo punto deriviamo la quantità ottenuta in  $y$ ; se  $U$  è un potenziale per il campo dato, deve essere che tale derivata uguaglia la seconda componente del campo cioè

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + C(y)) = x + C'(y) = x \Leftrightarrow C'(y) = 0 \Leftrightarrow C(y) = C \in \mathbb{R}.$$

Quindi il potenziale cercato è

$$U(x, y) = xy + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

SECONDO MODO: sappiamo che se il campo dato è conservativo, come in questo caso, il lavoro compiuto lungo una qualsiasi curva è uguale alla differenza di potenziale. Scegliamo un punto “comodo” (per esempio  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ) e andiamo a calcolarci il potenziale che si annulla in tale punto scegliendo una curva “comoda”, per esempio la spezzata che congiunge il punto scelto  $(0, 0)$  e il generico punto  $(x, y)$ , per esempio costituita dalla curva  $\gamma_1$  che connette i punti  $(0, 0)$  e  $(x, 0)$  e la curva  $\gamma_2$  che connette i punti  $(x, 0)$  e  $(x, y)$ . Si ha

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad 0 \leq t \leq x \quad \gamma_1'(t) = (1, 0) \quad \mathbf{F}(\gamma_1(t)) = (0, t)$$

quindi

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} d\gamma_1 = 0.$$

D'altra parte

$$\gamma_2(t) = (x, t) \quad 0 \leq t \leq y \quad \gamma_2'(t) = (0, 1) \quad \mathbf{F}(\gamma_2(t)) = (t, x)$$

quindi

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 = \int_0^y (t, x) \cdot (0, 1) dt = \int_0^y x dt = xy.$$

Quindi

$$U(x, y) = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 = xy$$

e questo rappresenta quel particolare potenziale che si annulla in  $(0, 0)$ .

Infine per calcolare il lavoro di  $\mathbf{F}$  lungo il segmento dato, essendo il campo conservativo, detto  $P = (3, 6)$  e  $Q = (-1, -2)$  si ha che

$$L = U(3, 6) - U(-1, -2) = 18 - 2 = 16.$$

Si verifichi che questo calcolo è corretto applicando la definizione di lavoro.

✎ **Esercizio 2.10.34.**

Stabilire se il campo

$$\mathbf{F} = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{x}{z}\mathbf{j} - \frac{xy}{z^2}\mathbf{k}$$

è conservativo nel semispazio  $z > 0$ , determinando in caso affermativo un potenziale.

Il dominio  $z > 0$  è semplicemente connesso; vediamo dunque se vale la condizione delle derivate in croce. Si ha

$$\begin{aligned} -\frac{x}{z^2} &= \partial_y F_3 = \partial_z F_2 = -\frac{x}{z^2} \\ \frac{1}{z} &= \partial_x F_2 = \partial_y F_1 = \frac{1}{z} \\ -\frac{y}{z^2} &= \partial_z F_1 = \partial_x F_3 = -\frac{y}{z^2} \end{aligned}$$

Quindi dalla teoria sappiamo che il campo è conservativo; pertanto esiste  $U(x, y, z)$  potenziale tale che  $\nabla U(x, y, z) = \mathbf{F}$ . Per ricavarlo osserviamo che innanzitutto  $U$  deve essere uguale all'integrale rispetto alla prima variabile della prima componente del campo, dunque

$$U(x, y, z) = \int \frac{y}{z} dx = \frac{yx}{z} + C(y, z).$$

A questo punto, andando a derivare questa quantità nelle altre variabili, si devono ottenere le altre due componenti del campo, cioè

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{yx}{z} + C(y, z) \right) = \frac{x}{z} + C_y(y, z) = \frac{x}{z}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{yx}{z} + C(y, z) \right) = -\frac{xy}{z^2} + C_z(y, z) = -\frac{xy}{z^2}$$

Quindi possiamo prendere  $C_y = C_z = 0$  e pertanto il potenziale cercato risulta

$$U(x, y, z) = \frac{xy}{z} + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

✎ **Esercizio 2.10.35.**

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = 3x^2y^2z\mathbf{i} + (2x^3yz + z)\mathbf{j} + (x^3y^2 + y)\mathbf{k}$$

e l'arco di curva

$$\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

a) Si calcoli il lavoro di  $\mathbf{F}$  lungo  $\Gamma$ , applicando la definizione (cioè calcolando un opportuno integrale).

b) Si verifichi che il campo  $\mathbf{F}$  è irrotazionale in tutto lo spazio  $\mathbb{R}^3$  e se ne deduca che è conservativo.

c) Si determini un potenziale  $U(x, y, z)$  di  $\mathbf{F}$  in  $\mathbb{R}^3$ .

d) Si calcoli il lavoro di  $\mathbf{F}$  lungo l'arco di curva  $\tilde{\Gamma}$  di equazioni parametriche

$$\tilde{\Gamma} : \begin{cases} x = t(2 - t^2) \\ y = \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ z = t(3 - 2t) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

utilizzando il potenziale calcolato al punto c).

a) Si ha

$$\Gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

dunque il lavoro lungo  $\Gamma$  richiesto si calcola nel modo seguente

$$\begin{aligned} L &= \int_{\Gamma} \mathbf{F} d\Gamma = \int_0^1 (3t^9, 2t^8 + t^3, t^7 + t^2) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt \\ &= \int_0^1 [3t^9 + 4t^9 + 2t^4 + 3t^9 + 3t^4] dt = \int_0^1 [10t^9 + 5t^4] dt = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

b) Vediamo se sono soddisfatte le condizioni delle derivate in croce. Si ha

$$\begin{aligned} 2x^3y + 1 &= \partial_z F_2 = \partial_y F_3 = 2x^3y + 1 \\ 6x^2yz &= \partial_x F_2 = \partial_y F_1 = 6x^2yz \\ 3x^2y^2 &= \partial_x F_3 = \partial_z F_1 = 3x^2y^2 \end{aligned}$$

Quindi sono verificate le condizioni delle derivate in croce; il campo vettoriale dunque è irrotazionale su un dominio semplicemente connesso ( $\mathbb{R}^3$ ) pertanto è conservativo.

c) PRIMO MODO: per calcolare un potenziale, prima di tutto osserviamo che deve essere  $\nabla U(x, y, z) = \mathbf{F}$  pertanto integrando la prima componente del campo nella prima variabile si ottiene

$$U(x, y, z) = \int 3x^2y^2z \, dx = x^3y^2z + C(y, z).$$

A questo punto, derivando questa espressione rispetto alle altre due variabili, si dovrebbero cercare condizioni su  $C$  in modo da ottenere le altre due componenti del campo, cioè

$$\frac{\partial}{\partial y} [x^3y^2z + C(y, z)] = 2x^3yz + C_y(y, z) = 2x^3yz + z$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} [x^3y^2z + C(y, z)] = x^3y^2 + C_z(y, z) = x^3y^2 + y.$$

Quindi affinché  $U$  sia veramente un potenziale per  $\mathbf{F}$  si dovrebbe avere

$$C_y(y, z) = z \quad C_z(y, z) = y$$

e pertanto, integrando nelle rispettive variabili, si ha  $C(y, z) = yz + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Alla fine dunque un potenziale per  $\mathbf{F}$  è dato dalla funzione

$$U(x, y, z) = x^3y^2z + yz + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

SECONDO MODO: sappiamo che se il campo dato è conservativo, come in questo caso, il lavoro compiuto lungo una qualsiasi curva è uguale alla differenza di potenziale. Scegliamo un punto “comodo” (per esempio  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ ) e andiamo a calcolarci il potenziale che si annulla in tale punto scegliendo una curva “comoda”, per esempio la spezzata che congiunge il punto scelto  $(0, 0, 0)$  e il generico punto  $(x, y, z)$ , per esempio costituita dalla curva  $\gamma_1$  che connette i punti  $(0, 0, 0)$  e  $(x, 0, 0)$ , la curva  $\gamma_2$  che connette i punti  $(x, 0, 0)$  e  $(x, y, 0)$ , la curva  $\gamma_3$  che connette i punti  $(x, y, 0)$  e  $(x, y, z)$ . Si ha

$$\gamma_1(t) = (t, 0, 0) \quad 0 \leq t \leq x \quad \gamma_1'(t) = (1, 0, 0) \quad \mathbf{F}(\gamma_1(t)) = (0, 0, 0)$$

quindi

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}d\gamma_1 = 0.$$

D'altra parte

$$\gamma_2(t) = (x, t, 0) \quad 0 \leq t \leq y \quad \gamma_2'(t) = (0, 1, 0) \quad \mathbf{F}(\gamma_2(t)) = (0, 0, x^3t^2 + t)$$

quindi

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F}d\gamma_2 = \int_0^y (0, 0, x^3t^2 + t) \cdot (0, 1, 0) \, dt = 0.$$

Infine

$$\gamma_3(t) = (x, y, t) \quad 0 \leq t \leq z \quad \gamma_3'(t) = (0, 0, 1) \quad \mathbf{F}(\gamma_3(t)) = (3x^2y^2t, 2x^3yt + t, x^3y + y)$$

quindi

$$\int_{\gamma_3} \mathbf{F}d\gamma_3 = \int_0^z (3x^2y^2t, 2x^3yt + t, x^3y + y) \cdot (0, 0, 1) dt = \int_0^z (x^3y^2 + y) dz = x^3y^2z + yz.$$

Quindi

$$U(x, y, z) = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}d\gamma_2 + \int_{\gamma_3} \mathbf{F}d\gamma_3 = x^3y^2z + yz$$

e questo rappresenta quel particolare potenziale che si annulla in  $(0, 0, 0)$ .

d) Si ha  $\tilde{\Gamma}(0) = (0, 0, 0)$  punto iniziale e  $\tilde{\Gamma}(1) = (1, 1, 1)$  punto finale, dunque visto che il campo vettoriale dato è conservativo, il lavoro è uguale alla differenza di potenziale dunque

$$L = U(1, 1, 1) - U(0, 0, 0) = 2 - 0 = 2.$$

Si noti che anche il lavoro calcolato al punto a) poteva più velocemente calcolarsi in questo modo (per altro le curve  $\Gamma$  e  $\tilde{\Gamma}$  connettono gli stessi punti, per cui il lavoro calcolato lungo  $\Gamma$  è uguale al lavoro calcolato lungo  $\tilde{\Gamma}$ ).

### ✎ Esercizio 2.10.36.

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = e^y \mathbf{i} + (xe^y + z \cos(yz)) \mathbf{j} + (y \cos(yz)) \mathbf{k}.$$

- Si dica se il campo è irrotazionale nel suo insieme di definizione.
- Si dica se il campo è conservativo nel suo insieme di definizione, determinando in caso affermativo un potenziale.
- Si calcoli il lavoro del campo lungo la semicirconferenza che giace sul semipiano  $z = 0$ ,  $y > 0$  e ha per estremi i punti  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, \log 2, 0)$ .

a) Vediamo se sono soddisfatte le condizioni delle derivate in croce. Si ha

$$\begin{aligned} \cos(yz) - yz \sin(yz) &= \partial_z F_2 = \partial_y F_3 = \cos(yz) - yz \sin(yz) \\ e^y &= \partial_x F_2 = \partial_y F_1 = e^y \\ 0 &= \partial_x F_3 = \partial_z F_1 = 0 \end{aligned}$$



Quindi sono verificare le condizioni delle derivate in croce; il campo vettoriale dunque è irrotazionale.

b) Il campo è irrotazionale su un dominio semplicemente connesso ( $\mathbb{R}^3$ ) pertanto è conservativo. Per calcolare un potenziale, prima di tutto osserviamo che deve essere  $\nabla U(x, y, z) = \mathbf{F}$  pertanto integrando la prima componente del campo nella prima variabile si ottiene

$$U(x, y, z) = \int e^y dx = xe^y + C(y, z).$$

A questo punto, derivando questa espressione rispetto alle altre due variabili, si dovrebbero cercare condizioni su  $C$  in modo da ottenere le altre due componenti del campo, cioè

$$\frac{\partial}{\partial y} [xe^y + C(y, z)] = xe^y + C_y(y, z) = xe^y + z \cos(yz)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} [xe^y + C(y, z)] = 0 + C_z(y, z) = y \cos(yz).$$

Quindi affinché  $U$  sia veramente un potenziale per  $\mathbf{F}$  si dovrebbe avere

$$C_y(y, z) = z \cos(yz) \quad C_z(y, z) = y \cos(yz)$$

e pertanto, integrando nelle rispettive variabili, si ha  $C(y, z) = \cos(yz) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Alla fine dunque un potenziale per  $\mathbf{F}$  è dato dalla funzione

$$U(x, y, z) = xe^y + \cos(yz) + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

c) Siccome il campo è conservativo, il lavoro del campo è uguale alla differenza di potenziale. Quindi si ha

$$L = U(1, \log 2, 0) - U(0, 0, 0) = 2 + 1 - 1 = 2.$$

### ✎ Esercizio 2.10.37.

Dato il campo vettoriale  $\underline{F}(x, y) = (2xy \cos(x^2y), x^2 \cos(x^2y))$ , e la curva  $\gamma(t) = (1, t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ , dire se il campo è conservativo, e se lo è, determinarne un potenziale. Disegnare il sostegno della curva  $\gamma$  e calcolare il lavoro del campo lungo  $\gamma$ .

Il campo è definito su tutto  $\mathbb{R}^2$  che è un dominio semplicemente connesso; vediamo se vale la condizione delle derivate in croce. Si ha

$$\partial_y F_1 = 2x \cos(x^2y) - 2x^3y \sin(x^2y) = \partial_x F_2$$

quindi la condizione delle derivate in croce è verificata. La teoria ci assicura che il campo è conservativo.

Per determinarne un potenziale:

PRIMO MODO: integriamo la prima componente del campo nella prima variabile, ottenendo

$$U(x, y) = \int 2x \cos(x^2 y) dx = \sin(x^2 y) + C(y)$$

e a questo punto, derivando rispetto alla seconda variabile si ottiene

$$\frac{d}{dy}[\sin(x^2 y) + C(y)] = x^2 \cos(x^2 y) + C'(y) = x^2 \cos(x^2 y)$$

dunque si può prendere  $C'(y) = 0$  e cioè  $C(y) = C \in \mathbb{R}$ .

Quindi il potenziale cercato è

$$U(x, y) = \sin(x^2 y) + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

SECONDO MODO: sappiamo che se il campo dato è conservativo, come in questo caso, il lavoro compiuto lungo una qualsiasi curva è uguale alla differenza di potenziale. Scegliamo un punto “comodo” (per esempio  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ) e andiamo a calcolarci il potenziale che si annulla in tale punto scegliendo una curva “comoda”, per esempio la spezzata che congiunge il punto scelto  $(0, 0)$  e il generico punto  $(x, y)$ , per esempio costituita dalla curva  $\gamma_1$  che connette i punti  $(0, 0)$  e  $(x, 0)$  e la curva  $\gamma_2$  che connette i punti  $(x, 0)$  e  $(x, y)$ . Si ha

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad 0 \leq t \leq x \quad \gamma_1'(t) = (1, 0) \quad \mathbf{F}(\gamma_1(t)) = (0, t^2)$$

quindi

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} d\gamma_1 = 0.$$

D'altra parte

$$\gamma_2(t) = (x, t) \quad 0 \leq t \leq y \quad \gamma_2'(t) = (0, 1) \quad \mathbf{F}(\gamma_2(t)) = (2xt \cos(x^2 t), x^2 \cos(x^2 t))$$

quindi

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 = \int_0^y (2xt \cos(x^2 t), x^2 \cos(x^2 t)) \cdot (0, 1) dt = \int_0^y x^2 \cos(x^2 t) dt = \sin(x^2 y).$$

Quindi

$$U(x, y) = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 = \sin(x^2 y)$$

e questo rappresenta quel particolare potenziale che si annulla in  $(0, 0)$ .

La curva  $\gamma$  rappresenta il segmento parallelo all'asse delle  $y$  per  $x = 1$  e  $0 \leq y \leq \pi$ . Per calcolare il lavoro lungo tale segmento basta osservare che dai conti precedenti il campo dato risulta conservativo, per cui il punto finale è quello che corrisponde a  $t = \pi$  cioè  $(1, \pi)$  mentre il punto iniziale è quello che corrisponde a  $t = 0$  cioè  $(1, 0)$ . Pertanto il lavoro si può calcolare come differenza di potenziale nel modo seguente

$$L = U(1, \pi) - U(1, 0) = 0$$

dove  $U(x, y) = \sin(x^2 y)$  trovato al punto precedente.

✎ **Esercizio 2.10.38.**

Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy - \sin z)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x \cos z\right)\mathbf{k}$$

si verifichi che  $\mathbf{F}$  è conservativo nel semispazio  $z > 0$  e si determini un potenziale.

Vediamo se sono soddisfatte le condizioni delle derivate in croce. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{e^y}{z^2} &= \partial_z F_2 = \partial_y F_3 = \frac{e^y}{z^2} \\ x &= \partial_x F_2 = \partial_y F_1 = x \\ -\cos z &= \partial_x F_3 = \partial_z F_1 = -\cos z \end{aligned}$$

Quindi sono verificate le condizioni delle derivate in croce; il campo vettoriale dunque è irrotazionale. Il semispazio  $z > 0$  è un dominio semplicemente connesso pertanto il campo è conservativo. Per calcolare un potenziale:

PRIMO MODO: in primo luogo, osserviamo che deve essere  $\nabla U(x, y, z) = \mathbf{F}$  pertanto integrando la prima componente del campo nella prima variabile si ottiene

$$U(x, y, z) = \int (xy - \sin z) dx = \frac{x^2 y}{2} - x \sin z + C(y, z).$$

A questo punto, derivando questa espressione rispetto alle altre due variabili, si dovrebbero cercare condizioni su  $C$  in modo da ottenere le altre due componenti del campo, cioè

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{x^2 y}{2} - x \sin z + C(y, z) \right] = \frac{x^2}{2} + C_y(y, z) = \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{x^2 y}{2} - x \sin z + C(y, z) \right] = -x \cos z + C_z(y, z) = -x \cos z + \frac{e^y}{z^2}.$$

Quindi affinché  $U$  sia veramente un potenziale per  $\mathbf{F}$  si dovrebbe avere

$$C_y(y, z) = -\frac{e^y}{z} \quad C_z(y, z) = \frac{e^y}{z^2}$$

e pertanto, integrando nelle rispettive variabili, si ha  $C(y, z) = -\frac{e^y}{z} + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Alla fine dunque un potenziale per  $\mathbf{F}$  è dato dalla funzione

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 y}{2} - x \sin z - \frac{e^y}{z} + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

SECONDO MODO: sappiamo che se il campo dato è conservativo, come in questo caso, il lavoro compiuto lungo una qualsiasi curva è uguale alla differenza di potenziale. Scegliamo un punto “comodo”; il problema è che essendo il nostro campo definito per  $z > 0$  come punto comodo non potremo, come negli esempi precedenti, scegliere l’origine, ma occorrerà scegliere un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  con  $z_0 \neq 0$ . Per esempio, per comodità possiamo prendere  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \pi)$ . A questo punto andiamo a calcolarci il potenziale che si annulla in tale punto scegliendo una curva “comoda”, per esempio la spezzata che congiunge il punto scelto  $(0, 0, 0)$  e il generico punto  $(x, y, z)$ , per esempio costituita dalla curva  $\gamma_1$  che connette i punti  $(0, 0, \pi)$  e  $(x, 0, \pi)$ , la curva  $\gamma_2$  che connette i punti  $(x, 0, \pi)$  e  $(x, y, \pi)$ , la curva  $\gamma_3$  che connette i punti  $(x, y, \pi)$  e  $(x, y, z)$ . Si ha

$$\gamma_1(t) = (t, 0, \pi) \quad 0 \leq t \leq x \quad \gamma_1'(t) = (1, 0, 0) \quad \mathbf{F}(\gamma_1(t)) = \left(0, \frac{t^2}{2} - \frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi^2} + t\right)$$

quindi

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} d\gamma_1 = 0.$$

D’altra parte

$$\gamma_2(t) = (x, t, \pi) \quad 0 \leq t \leq y \quad \gamma_2'(t) = (0, 1, 0) \quad \mathbf{F}(\gamma_2(t)) = \left(xt, \frac{x^2}{2} - \frac{e^t}{\pi}, \frac{e^t}{\pi^2} + x\right)$$

quindi

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 = \int_0^y \left(xt, \frac{x^2}{2} - \frac{e^t}{\pi}, \frac{e^t}{\pi^2} + x\right) \cdot (0, 1, 0) dt = \int_0^y \left(\frac{x^2}{2} - \frac{e^t}{\pi}\right) dt = \frac{x^2 y}{2} - \frac{1}{\pi}(e^y - 1).$$

Infine

$$\gamma_3(t) = (x, y, \pi + t) \quad 0 \leq t \leq z - \pi \quad \gamma_3'(t) = (0, 0, 1)$$

da cui

$$\mathbf{F}(\gamma_3(t)) = \left(xy - \sin(\pi + t), \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{\pi + t}, \frac{e^y}{(\pi + t)^2} - x \cos(\pi + t)\right)$$

pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} \mathbf{F} d\gamma_3 &= \int_0^{z-\pi} \left( xy - \sin(\pi + t), \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{\pi + t}, \frac{e^y}{(\pi + t)^2} - x \cos(\pi + t) \right) \cdot (0, 0, 1) dt \\ &= \int_0^{z-\pi} \left( \frac{e^y}{(\pi + t)^2} - x \cos(\pi + t) \right) dt = \int_{\pi}^z \frac{e^y}{s^2} ds - x \int_{\pi}^z \cos s ds \\ &= e^y \left[ -\frac{1}{s} \right]_{\pi}^z - x [\sin s]_{\pi}^z = -\frac{e^y}{z} + \frac{e^y}{\pi} - x \sin z. \end{aligned}$$

Quindi

$$U(x, y, z) = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 + \int_{\gamma_3} \mathbf{F} d\gamma_3 = \frac{x^2 y}{2} - \frac{e^y}{z} - x \sin z + \frac{1}{\pi}$$

e questo rappresenta quel particolare potenziale che si annulla in  $(0, 0, \pi)$ .

✎ **Esercizio 2.10.39.**

Calcolare il lavoro del campo  $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$  lungo il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  percorso in senso antiorario.

Vediamo prima di tutto se il campo dato è conservativo. Verifichiamo se vale la condizione delle derivate in croce. Si ha

$$\partial_y F_1 = -1 \neq 2x = \partial_x F_2$$

quindi siccome non vale la condizione delle derivate in croce, il campo non può essere conservativo. Pertanto il lavoro del campo si deve calcolare necessariamente con la definizione. Andiamo a parametrizzare il perimetro del triangolo associando ad ogni segmento una curva parametrica, stando attenti a scrivere le parametrizzazioni in senso antiorario. I tre segmenti che formano il perimetro del triangolo sono

$$T_1 = \{(x, y) : y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$T_2 = \{(x, y) : x = 1 - y, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$T_3 = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$$

a cui corrispondono rispettivamente le curve parametriche

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} & 0 \leq t \leq 1 & \quad \gamma_1'(t) = (1, 0) \\ \gamma_2(t) &= \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases} & 0 \leq t \leq 1 & \quad \gamma_2'(t) = (-1, 1) \\ \gamma_3(t) &= \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \end{cases} & 0 \leq t \leq 1 & \quad \gamma_3'(t) = (0, -1) \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 + \int_{\gamma_3} \mathbf{F} d\gamma_3 \\ &= \int_0^1 (0, t^2) \cdot (1, 0) dt + \int_0^1 (-t, (1-t)^2) \cdot (-1, 1) dt + \int_0^1 (t-1, 0) \cdot (0, 1) dt \\ &= \int_0^1 (t+1-2t+t^2) dt = \int_0^1 (t^2-t+1) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

✎ **Esercizio 2.10.40.**

Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

lungo l'ellisse

$$3x^2 - xy + 10y^2 = 1$$

percorso in verso antiorario.

Osserviamo che per il campo dato vale la condizione delle derivate in croce, infatti

$$\partial_y F_1 = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_x F_2$$

tuttavia il campo è definito su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  che NON è un dominio semplicemente connesso. Quindi NON possiamo concludere che il campo è conservativo. Per vedere se in effetti il campo è conservativo oppure no, non c'è altra via che tentare di determinare se esiste una funzione potenziale con la definizione. Per definizione infatti si sa che se il campo è conservativo, allora esiste una funzione  $U$  potenziale tale che  $\nabla U = \mathbf{F}$ . Pertanto integrando nella variabile  $x$  la prima componente del campo si ottiene

$$U(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + C(y)$$

e a questo punto, andando a derivare questa quantità nella variabile  $y$  si deduce

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + C(y) \right] = \frac{y}{x^2 + y^2} + C'(y)$$

e andando a uguagliare questa quantità alla seconda componente del campo, per avere compatibilità si deve necessariamente avere  $C'(y) = 0$  cioè  $C(y) = C$  con  $C \in \mathbb{R}$ .

Allora effettivamente possiamo ora dire che il campo è conservativo ed esibire la famiglia di funzioni potenziali

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

A questo punto, per calcolare il lavoro del campo vettoriale dato lungo l'ellisse, osserviamo che tale lavoro si può calcolare come differenza di potenziale e in particolare dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale della curva; ma l'ellisse è una curva chiusa e pertanto il lavoro calcolato è nullo.

✎ **Esercizio 2.10.41.**

Si calcoli il lavoro:

$$\int_{\gamma} (y^2, x) d\underline{s}$$

dove  $\gamma$  è l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

percorso in verso antiorario.

Andiamo a vedere se per tale campo vettoriale sono soddisfatte le condizioni delle derivate in croce. Si ha

$$\partial_y F_1 = 2y \neq 1 = \partial_x F_2$$

allora il campo dato NON è conservativo e il lavoro si calcola necessariamente con la definizione. Si veda l'esercizio successivo per calcolare il lavoro in un modo alternativo, utilizzando la formula di Gauss-Green.

Parametizziamo l'ellisse attraverso la curva parametrica

$$x = a \cos \theta \quad y = b \sin \theta \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Si noti che questa parametrizzazione descrive effettivamente l'ellisse in senso antiorario come richiesto dall'esercizio.

A questo punto

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} (b^2 \sin^2 \theta, a \cos \theta) \cdot (-a \sin \theta, b \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-ab^2 \sin^3 \theta + ab \cos^2 \theta) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} ab^2 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta + ab \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} ab^2 \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} ab^2 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta + \frac{ab}{2} [\theta + \sin \theta \cos \theta]_0^{2\pi} \\ &= ab^2 [\cos \theta]_0^{2\pi} + ab^2 \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{2\pi} + \frac{ab}{2} 2\pi = ab\pi. \end{aligned}$$

✎ **Esercizio 2.10.42.**

Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( y + \frac{2x}{x^2 + y^2}, g(x) + \frac{2y}{x^2 + y^2} \right),$$

dove  $g(x)$  è una funzione di classe  $C^1$ .

a) Determinare  $g$  in modo che  $\mathbf{F}$  sia irrotazionale.

b) Posto  $g(x) = x$ , si calcoli il lavoro di  $\mathbf{F}$  lungo la poligonale di vertici  $A = (1, 1)$ ,  $B = (-1, 1)$ ,  $C = (-1, -1)$  percorsa da  $A$  verso  $C$ .

**Hint:** a) imponendo che valga la condizione delle derivate in croce, si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) = g'(x) - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1 - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y)$$

da cui  $g'(x) = 1$  e  $g(x) = x + C$ .

b) Si vede facilmente che il campo vettoriale dato è conservativo e si riesce facilmente a ricavare un potenziale, che vale

$$U(x, y) = \log(x^2 + y^2) + xy.$$

A questo punto, il lavoro è dato da  $U(C) - U(A) = U(-1, -1) - U(1, 1) = 0$ .

### 2.10.3. Formula di Gauss-Green

✎ **Esercizio 2.10.43.**

Usare il teorema di Gauss-Green per valutare l'integrale:

$$\oint_{\gamma^+} (y^2 dx + x dy)$$

dove:

- (i)  $\gamma$  è il bordo del quadrato di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ ;
- (ii)  $\gamma$  è l'ellisse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

(i) Il teorema di Gauss-Green assicura che dato un campo vettoriale di classe  $C^1$  del tipo



$\mathbf{F} = (P, Q)$  e  $D$  un dominio semplice rispetto a entrambi gli assi, allora

$$\oint_{\gamma^+} \mathbf{F} d\gamma = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy,$$

dove  $\gamma$  è il bordo di  $D$  orientato positivamente.

Nel nostro caso il dominio  $D$  è dato dal quadrato e  $\gamma$  è il perimetro del quadrato. Inoltre  $P = y^2$  e  $Q = x$  da cui  $Q_x = 1$  e  $P_y = 2y$ .

Pertanto si ha

$$\oint_{\gamma^+} (y^2 dx + x dy) = \iint_D (1 - 2y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (1 - 2y) dx dy = 1 - \int_0^1 [y^2]_0^1 dx = 0.$$

(ii) Le premesse sono le stesse che nel punto precedente, solo che in questo caso  $D$  è l'ellisse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  in forma canonica che possiamo parametrizzare nel seguente modo:

$$x = a\rho \cos \theta \quad y = b\rho \sin \theta \quad |J| = a b \rho$$

pertanto

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma^+} (y^2 dx + x dy) &= \iint_D (1 - 2y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 a b \rho (1 - 2b\rho \sin \theta) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 a b \rho - \int_0^{2\pi} \int_0^1 2a b^2 \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta \\ &= \pi a b - 2 a b^2 \left( \int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \left( \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right) \\ &= \pi a b + 0 = \pi a b. \end{aligned}$$

Alternativamente si poteva osservare prima di passare in coordinate polari che la seconda parte della funzione integranda  $-2y$  è ovviamente una funzione dispari nella variabile  $y$  mentre il dominio (l'ellisse) è ad esempio simmetrico rispetto all'asse  $y$ , pertanto il contributo dovuto a quella parte di integrale risulta nullo; rimane pertanto l'integrale di 1 sull'ellisse cioè l'area dell'ellisse che abbiamo già visto valere  $\pi a b$ .

✎ **Esercizio 2.10.44.**

Usare il teorema di Gauss-Green per valutare l'area dell'ellisse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

Il teorema di Gauss-Green assicura che dato un campo vettoriale di classe  $\mathcal{C}^1$  del tipo  $\mathbf{F} = (P, Q)$  e  $D$  un dominio semplice rispetto a entrambi gli assi, allora

$$\oint_{\gamma^+} \mathbf{F} d\gamma = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy,$$

dove  $\gamma$  è il bordo di  $D$  orientato positivamente. Nel nostro caso  $D$  è l'ellisse e  $(Q_x - P_y) = 1$ . Proviamo prima a porre  $Q_x = 1$  e  $P_y = -1$  da cui  $Q = x$  e  $P = -y$ . Allora la precedente formula diventa

$$\text{area}(D) \iint_D 1 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \oint_{\gamma^+} \mathbf{F} \, d\gamma \quad (2.10.1)$$

dove  $\mathbf{F} = (-y, x)$  (si noti che è un campo NON conservativo, altrimenti tutti gli integrali fatti lungo curve chiuse sarebbero stati nulli). Pertanto, usando la curva parametrica

$$x = a \cos \theta \quad y = b \sin \theta \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

per descrivere il bordo dell'ellisse, si ottiene

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \sin \theta, a \cos \theta) \cdot (-a \sin \theta, b \cos \theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2 \theta + ab \cos^2 \theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, d\theta = \pi ab. \end{aligned}$$

✎ **Esercizio 2.10.45.**

Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana (astroide) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos^3 \theta \\ y = \sin^3 \theta \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Usiamo la formula (2.10.1). Indicata con  $A$  l'astroide si ha

$$\begin{aligned} \text{area}(A) &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma^+} (-y, x) \, d\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-\sin^3 \theta, \cos^3 \theta) \cdot (-3 \cos^2 \theta \sin \theta, 3 \sin^2 \theta \cos \theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta \sin^4 \theta + 3 \sin^2 \theta \cos^4 \theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]^2 \, d\theta = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) \, d\theta \\ &= \frac{3}{16} \int_0^{4\pi} \sin^2 z \, dz = \frac{3}{16} \left[ \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \sin z \cos z \right]_0^{4\pi} = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$

✎ **Esercizio 2.10.46.**

Sia  $\gamma$  una curva chiusa semplice e regolare di equazione polare  $\rho = f(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ . Se  $\gamma$  è la frontiera di  $D$ , dimostrare che:

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 \, d\theta.$$

Se la curva data è espressa in forma polare allora una curva parametrica è data da

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = f(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\gamma'(\theta) = \begin{cases} x'(\theta) = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta \\ y'(\theta) = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta. \end{cases}$$

A questo punto, usando la formula (2.10.1) si deduce

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-f(\theta) \sin \theta, f(\theta) \cos \theta) \cdot (f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [-f(\theta)f'(\theta) \sin \theta \cos \theta + f(\theta)^2 \sin^2 \theta + f(\theta)f'(\theta) \cos \theta \sin \theta + f(\theta)^2 \cos^2 \theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)^2] d\theta. \end{aligned}$$

✎ **Esercizio 2.10.47.**

Calcolare l'area del dominio piano compreso tra la curva di equazioni parametriche  $x = \frac{1}{2}t - t^2$ ,  $y = t^2$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ , e l'asse  $y$ .

Parametizziamo  $\partial^+ D$ . Si ha  $\partial^+ D = \gamma_1 \cup \gamma_2$  dove

$$\gamma_1(t) = \left( \frac{1}{2}t - t^2, t^2 \right) \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad \gamma_1'(t) = \left( \frac{1}{2} - 2t, 2t \right)$$

$$\gamma_2(t) = (0, t) \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \quad \gamma_2'(t) = (0, 1)$$

da cui, usando il Teorema di Gauss-Green si ottiene

$$\begin{aligned} A(D) &= \int \int_D dx dy = \int_{\partial^+ D} x dy = \int_0^{1/2} \left( \frac{1}{2}t - t^2 \right) 2t dt - \int_0^{1/4} 0 dt = \int_0^{1/2} (t^2 - 2t^3) dt \\ &= \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{24} - \frac{1}{32} = \frac{1}{96}. \end{aligned}$$

✎ **Esercizio 2.10.48.**

Integrare il campo vettoriale  $F(x, y) = (x+y)/(x+1)\mathbf{i} + (x-y)/(y+1)\mathbf{j}$  tra i punti  $O = (0, 0)$  e  $P = (1, 1)$ , lungo il segmento  $\gamma$  della parabola  $y = x^2$  e lungo il segmento  $\chi$  della retta  $OP$ . Usando il teorema di Gauss-Green, impostare l'opportuno integrale doppio il cui valore è uguale alla differenza fra i due integrali curvilinei

Si ha

$$I_1 = \int_{\gamma} F \cdot ds = \int_0^1 \left( \frac{t+t^2}{t+1}, \frac{t-t^2}{t^2+1} \right) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 t dt + 2 \int_0^1 \left( -t+1 + \frac{t-1}{t^2+1} \right) dt = \frac{3}{2} + \log 2 - \frac{\pi}{2}.$$

D'altra parte

$$I_2 = \int_{\chi} F \cdot ds = \int_0^1 \frac{2t}{t+1} dt = 2 \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2 - 2 \log 2.$$

A questo punto, utilizzando le formule di Gauss-Green (sono verificate le ipotesi per poterle applicare) si ottiene

$$I_1 - I_2 = \iint_D \left( \frac{1}{y+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx dy.$$

(L'esercizio chiede solo di impostare l'integrale, non di risolverlo).

✎ **Esercizio 2.10.49.**

Dati i punti  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$ , sia  $\gamma$  la curva chiusa data dall'unione del segmento  $OA$ , dall'arco di circonferenza di centro  $O$  e raggio 1 che congiunge  $A$  con  $B$  e dal segmento  $BO$ .

a) Calcolare l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma} \omega$  dove  $\gamma$  è orientata in senso antiorario e  $\omega$  è la forma differenziale

$$\omega = \frac{3x}{x^2 + y^2 + 1} dx - \frac{3y}{x^2 + y^2 + 1} dy.$$

Verificare l'identità di Gauss-Green calcolando un opportuno integrale doppio.

b) Stabilire se la forma differenziale  $\omega$  è esatta; stabilire se esiste un opportuno sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  su cui  $\omega$  è esatta.

La curva  $\gamma$  è unione disgiunta dei segmenti  $OA$  e  $BO$  e dell'arco di circonferenza  $AB$ . Si ha

$$\int_O^A \omega = \int_0^1 \frac{3x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} [\log(x^2+1)]_0^1 = \frac{3}{2} \log 2$$

$$\int_B^O \omega = \int_1^0 \frac{-3y}{y^2+1} dy = -\frac{3}{2} [\log(y^2+1)]_1^0 = \frac{3}{2} \log 2$$

$$\int_A^B \omega = \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} \cos \theta (-\sin \theta) d\theta + \int_0^{\pi/2} \left( -\frac{3}{2} \sin \theta \cos \theta \right) d\theta = -3 [\sin^2 \theta]_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2}$$

Dunque  $\int_{\gamma} \omega$  è la somma di questi tre addendi e vale dunque  $-\frac{3}{2} + 3 \log 2$ .

Essendo questo integrale diverso da zero, la forma  $\omega$  non può essere esatta (se infatti esistesse una funzione potenziale  $F(x, y)$  della quale  $\omega$  fosse il differenziale, si dovrebbe avere

$$\int_{\gamma} \omega = F(0, 0) - F(0, 0) = 0.$$

Ora  $\omega$  è definita su tutto  $\mathbb{R}^2$ , semplicemente connesso, però non può essere esatta perché non è chiusa, dal momento che

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1} \right) = \frac{6xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \neq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{3x}{x^2 + y^2 + 1} \right) = -\frac{6xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Diviene perciò non banale l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{3y}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{3x}{x^2 + y^2 + 1} \right) dx dy$$

esteso al quarto di cerchio  $D$  contornato da  $\gamma$  e tale integrale, per il teorema di Gauss-Green, deve essere uguale all'integrale curvilineo appena trovato. Infatti si ha

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{12xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{12xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dy dx = \int_0^1 6x dx \left[ -\frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 \left( -3x + \frac{6x}{x^2 + 1} \right) dx = \left[ -\frac{3}{2}x^2 + 3 \log(x^2 + 1) \right]_0^1 = -\frac{3}{2} + 3 \log 2. \end{aligned}$$

✎ **Esercizio 2.10.50.**

Si consideri la curva  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2$  chiusa, regolare, semplice, parametrizzata da

$$\gamma(t) = (t - t^2, t - t^3) \quad t \in [0, 1].$$

Calcolare l'area della regione limitata da  $\gamma$ .

Utilizzando una conseguenza della formula di Gauss-Green nel piano, si ha che, detta  $E$  la regione limitata da  $\gamma$

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ E} x dy - y dx.$$

A questo punto

$$\gamma'(t) = (1 - 2t, 1 - 3t^2)$$

per cui

$$\begin{aligned}\text{Area}(E) &= \frac{1}{2} \int_{\partial^+ E} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [(t^3 - t)(1 - 2t) + (t - t^2)(1 - 3t^2)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{60}.\end{aligned}$$

✎ **Esercizio 2.10.51.**

Sia

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, (x - 1)^2 + y^2 > 1, (x + 1)^2 + y^2 > 1\}.$$

Quanto vale

$$\frac{3}{4} \int_{\partial^+ E} -y dx + x dy?$$

Utilizzando una conseguenza della formula di Gauss-Green nel piano, si ha che

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ E} x dy - y dx$$

quindi applicandola al nostro caso

$$\frac{3}{4} \int_{\partial^+ E} x dy - y dx = \frac{3}{2} \text{Area}(E).$$

Quindi essendo  $E$  la parte esterna ai due cerchi di raggio 1 e rispettivamente di centro  $-1$  e  $1$  e interna al cerchio di centro l'origine e raggio 4, avrà area  $\text{Area}(E) = 16\pi - 2\pi = 14\pi$ , quindi quello che si richiede è  $3/2 \text{Area}(E) = 21\pi$ .

---

---

## CAPITOLO 3

---

# Superfici in forma parametrica. Integrali superficiali. Teoremi della divergenza e del rotore

### 3.1. Superfici in forma parametrica

---

Abbiamo visto che un modo per rappresentare una curva nel piano o nello spazio è darla in forma parametrica, ovvero dare una funzione  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  oppure  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che il sostegno della curva sia rappresentato dai punti  $(x(t), y(t))$  o  $(x(t), y(t), z(t))$ , dipendenti da un parametro. Quindi in generale possiamo distinguere (esemplificando nel caso  $n = 2$ ):

- 1) rappresentazione in forma *implicita*  $f(x, y) = 0$ ;
- 2) rappresentazione in forma *esplicita* o in forma di *grafico*  $y = g(x)$ ;
- 3) rappresentazione *parametrica*  $t \mapsto (x(t), y(t))$ .


Cosa accade per le superfici? Per le superfici abbiamo le seguenti modalità di rappresentazione:

- 1) rappresentazione in forma *implicita*  $f(x, y, z) = 0$ ;
- 2) rappresentazione in forma *esplicita* o in forma di *grafico*  $z = g(x, y)$ ;
- 3) rappresentazione *parametrica*  $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Quindi riguardo alla rappresentazione parametrica di superfici, le tre coordinate di un punto mobile sulla superficie dipenderanno stavolta da due parametri, coerentemente col fatto che un punto vincolato a muoversi su una superficie ha due gradi di libertà. Quindi

**□ Definizione 3.1.1.** Una SUPERFICIE IN FORMA PARAMETRICA è una funzione  $\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

 **Esempio 3.1.2.** La sfera di raggio  $R$  e centro l'origine ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi].$$

$R$  è fissato;  $\varphi$  (colatitudine) e  $\theta$  (longitudine) variano.

È naturalmente essenziale precisare l'insieme dove variano i parametri.

## 3.2. Superfici regolari in forma parametrica

Abbiamo in precedenza introdotto la definizione di superficie in forma parametrica. In questo paragrafo vogliamo capire come si legge dalla parametrizzazione della superficie il fatto che essa sia regolare (per esempio dotata in ogni punto del piano tangente).

Ragioniamo in modo analogo a quando euristicamente abbiamo individuato l'equazione del piano tangente per funzioni di due variabili.

Se fissiamo uno dei due parametri, per esempio  $v = v_0$ , e facciamo variare  $u$ , otteniamo una curva sulla superficie; se fissiamo l'altro parametro, per esempio  $u = u_0$  e lasciamo variare  $v$  otteniamo un'altra curva sulla superficie. Più precisamente, al variare del valore fissato  $v = v_0$  otteniamo una famiglia di curve; al variare di  $u = u_0$  otteniamo un'altra famiglia di curve sulla superficie. Queste due famiglie di linee si chiamano LINEE COORDINATE. È facile vedere che per ogni punto sulla superficie passa esattamente una curva di ciascuna delle due famiglie.

Quindi esplicitamente le linee coordinate hanno equazioni

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v).$$

Il vettore tangente a una linea coordinata è dato rispettivamente da

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0)) \quad \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0)).$$

Visto che  $\mathbf{r}$  è differenziabile, questi due vettori sono ben definiti.

Il piano tangente alla superficie è l'unico piano che contiene questi due vettori e risulta ben definito se i due vettori sono non nulli e non sono paralleli. Queste due ultime richieste sono equivalenti a richiedere che il prodotto vettoriale dei due vettori non si annulli, ossia

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Questa condizione è algebricamente equivalente al fatto che la matrice Jacobiana di  $\mathbf{r}$  abbia rango (o caratteristica) 2, cioè rango massimo.



□ **Definizione 3.2.1.** Una superficie parametrizzata da  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  con  $\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice **REGOLARE** se  $\mathbf{r}$  è differenziabile in  $A$  e inoltre la matrice Jacobiana di  $\mathbf{r}$  ha rango 2 in ogni punto di  $A$ .

Se in qualche punto di  $A$  le condizioni vengono violate chiameremo **PUNTI SINGOLARI** della superficie i punti corrispondenti.

Il vettore  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  la cui esistenza e non annullamento definisce il concetto di regolarità della superficie, per le proprietà del prodotto vettoriale, è anche ortogonale al piano che contiene i vettori  $\mathbf{r}_u$  e  $\mathbf{r}_v$ , cioè ortogonale al piano tangente. Tale vettore può dirsi **NORMALE** alla superficie. Il suo versore prende il nome di **VERSORE NORMALE**. Si indica con

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

Si noti che il verso di  $\mathbf{n}$  dipende dall'ordine in cui consideriamo i parametri  $(u, v)$  e quindi dall'ordine in cui effettuiamo il prodotto vettoriale.

Scriviamo ora l'equazione del piano tangente alla superficie. Se  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  è il punto mobile sul piano tangente e  $\mathbf{x}_0$  è il punto in cui vogliamo calcolare il piano tangente, il vettore  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  dovrà essere ortogonale a  $\mathbf{n}$  e quindi anche a  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ . L'equazione del piano tangente è dunque

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = 0$$

ossia

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix}$$

### 3.2.1. Superfici cartesiane (grafico di una funzione di due variabili)

Come già accennato, il grafico  $z = f(x, y)$  con  $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$  è una superficie che si può scrivere in forma parametrica nel modo seguente

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in A$$

Quindi il vettore normale si calcola come segue

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u(u_0, v_0) \\ 0 & 1 & f_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} = -\mathbf{i}f_u - \mathbf{j}f_v + \mathbf{k}$$

quindi

$$\mathbf{n} = \frac{-\mathbf{i}f_u - \mathbf{j}f_v + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

Quindi l'orientazione indotta sulla superficie è con la normale verso l'alto. Si noti che se  $f$  è differenziabile in  $A$ , il suo grafico è sempre una superficie regolare (la matrice Jacobiana ha sempre un minore  $2 \times 2$  con determinante uguale a 1).

### 3.2.2. Superfici di rotazione

Molte superfici comuni si possono ottenere facendo ruotare una curva  $\gamma$  detta GENERATRICE attorno a un asse. In questo modo è anche facile scriverne le equazioni parametriche. Infatti se considero in un riferimento cartesiano l'asse  $z$  come l'asse attorno al quale vogliamo far ruotare la curva, assegnata in forma parametrica dalla formula

$$\begin{cases} x = x(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I.$$

In tal caso la superficie che si ottiene con una rotazione completa della curva  $\gamma$  attorno all'asse  $z$  è

$$\begin{cases} x = x(t) \cos \theta \\ y = x(t) \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I, \theta \in [0, 2\pi).$$

Diamo ora alcuni esempi delle principali superfici di rotazione.

✎ **Esempio 3.2.2.** (LA SFERA) È generata dalla rotazione attorno all'asse  $z$  della semicirconferenza posta nel piano  $x, z$

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Quindi le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi).$$

✎ **Esempio 3.2.3.** (IL TORO) È generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  della circonferenza posta nel piano  $x, z$  di centro  $(R, 0)$  e raggio  $r < R$

$$\begin{cases} x = R + r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Quindi le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = (R + r \sin \varphi) \cos \theta \\ y = (R + r \sin \varphi) \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, 2\pi).$$

✎ **Esempio 3.2.4.** (IL CONO A DUE FALDE) È generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  di una retta nel piano  $x, z$  passante per l'origine di equazione  $z = mx$ , con  $x \in \mathbb{R}$ . In forma parametrica la retta si scrive come

$$\begin{cases} x = t \\ z = mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \\ z = mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi).$$

✎ **Esempio 3.2.5.** (IL CILINDRO) Il cilindro di raggio  $r$  è generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  di una retta assegnata nel piano  $x, z$  di equazioni

$$\begin{cases} x = r \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi).$$

✎ **Esempio 3.2.6.** (L'ELLISSOIDE DI ROTAZIONE) È generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  di una semiellisse nel piano  $x, z$  di equazioni

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \\ z = b \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Quindi le sue equazioni sono

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta \\ y = a \sin \varphi \sin \theta \\ z = b \cos \varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi).$$

### 3.3. Retta normale e piano tangente a superfici, retta tangente e piano normale (o retta normale) a curve

---

Riassumiamo qui di seguito le equazioni parametriche o cartesiane (implicite o esplicite) di piano tangente e retta normale a superfici, a loro volta date in forma cartesiana (implicita o esplicita) o parametrica e per completezza riportiamo anche le equazioni parametriche o cartesiane della retta tangente e del piano normale a curve in  $\mathbb{R}^3$  (e della retta normale a curve in  $\mathbb{R}^2$ ), a loro volta date in forma parametrica.

#### 3.3.1. Caso della superficie in $\mathbb{R}^3$

Sia data una superficie in forma implicita tramite l'equazione  $g(x, y, z) = 0$ . Allora ha senso dare la nozione di piano tangente e di retta normale in un punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . L'equazione cartesiana (o implicita) del piano tangente è:

$$(x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (3.3.1)$$

mentre l'equazione parametrica della retta normale è

$$\begin{cases} x = x_0 + t \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + t \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ z = z_0 + t \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

È facile dalla (3.3.1) ricavare l'equazione del piano in forma esplicita (basta isolare una delle tre variabili) oppure in forma parametrica (basta porre  $x = s$ ,  $y = t$  da cui segue  $z$  come funzione di  $s$  e  $t$ ). Invece dalla (3.3.2) si può eliminare il parametro ottenendo l'equazione della retta in forma cartesiana o implicita

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Ovviamente si tratta di due equazioni perché una retta nello spazio è descritta da due equazioni. Se la superficie è data in forma esplicita, ad esempio  $z = f(x, y)$  allora ponendo  $g(x, y, z) := f(x, y) - z$  si possono applicare le formule precedenti per ricavare in questo specifico caso l'equazione del piano tangente e della retta normale.

Infine sia la superficie data in forma parametrica, cioè sia

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(t, s) = (r_1(t, s), r_2(t, s), r_3(t, s))$$

una parametrizzazione della superficie. Allora l'equazione parametrica del piano tangente in un punto  $(t_0, s_0)$  è

$$\begin{cases} x = x_0 + t \frac{\partial r_1}{\partial t}(t_0, s_0) + s \frac{\partial r_1}{\partial s}(t_0, s_0) \\ y = y_0 + t \frac{\partial r_2}{\partial t}(t_0, s_0) + s \frac{\partial r_2}{\partial s}(t_0, s_0) \\ z = z_0 + t \frac{\partial r_3}{\partial t}(t_0, s_0) + s \frac{\partial r_3}{\partial s}(t_0, s_0) \end{cases} \quad \text{dove } (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Un'equazione cartesiana del piano tangente si ottiene poi eliminando i parametri  $t$  e  $s$ .

Invece l'equazione cartesiana della retta normale è data da

$$\begin{cases} (x - x_0) \frac{\partial r_1}{\partial t}(t_0, s_0) + (y - y_0) \frac{\partial r_2}{\partial t}(t_0, s_0) + (z - z_0) \frac{\partial r_3}{\partial t}(t_0, s_0) = 0 \\ (x - x_0) \frac{\partial r_1}{\partial s}(t_0, s_0) + (y - y_0) \frac{\partial r_2}{\partial s}(t_0, s_0) + (z - z_0) \frac{\partial r_3}{\partial s}(t_0, s_0) = 0. \end{cases}$$

### 3.3.2. Caso della curva in $\mathbb{R}^2$

Sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  una parametrizzazione della curva piana e sia  $g(x, y) = 0$  la sua equazione cartesiana (o implicita). Allora le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta tangente sono rispettivamente

$$\begin{cases} x = x_0 + t \gamma'_1(t_0) \\ y = y_0 + t \gamma'_2(t_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$(x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Invece le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta normale sono

$$\begin{cases} x = x_0 + t \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ y = y_0 + t \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$(x - x_0) \gamma'_1(t_0) + (y - y_0) \gamma'_2(t_0) = 0.$$

3.3.3. Caso della curva in  $\mathbb{R}^3$ 

Sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  una parametrizzazione di una curva nello spazio e siano  $g_1(x, y, z) = 0$  e  $g_2(x, y, z) = 0$  le equazioni cartesiane locali. Allora le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane della retta tangente sono rispettivamente le seguenti

$$\begin{cases} x = x_0 + t \gamma'_1(t_0) \\ y = y_0 + t \gamma'_2(t_0) \\ z = z_0 + t \gamma'_3(t_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$\begin{cases} (x - x_0) \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial g_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ (x - x_0) \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial g_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

mentre le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana del piano normale sono

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + t_2 \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + t_1 \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + t_2 \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ z = z_0 + t_1 \frac{\partial g_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + t_2 \frac{\partial g_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

e

$$(x - x_0) \gamma'_1(t_0) + (y - y_0) \gamma'_2(t_0) + (z - z_0) \gamma'_3(t_0) = 0.$$

✎ **Esercizio 3.3.1.** Data la superficie  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^3$  di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(u, v) = (uv + 1, u^2 - v^2, 3uv), \quad u^2 + v^2 \leq 1,$$

scrivere le equazioni cartesiane e parametriche della retta perpendicolare e del piano tangente a  $\Sigma$  in  $(2, 0, 3)$ .

Sia la superficie data in forma parametrica, cioè sia

$$\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{r}(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$$

una parametrizzazione della superficie. Allora l'equazione parametrica del piano tangente in un punto  $(u_0, v_0)$  è

$$\begin{cases} x = x_0 + u \frac{\partial r_1}{\partial u}(u_0, v_0) + v \frac{\partial r_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y = y_0 + u \frac{\partial r_2}{\partial u}(u_0, v_0) + v \frac{\partial r_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z = z_0 + u \frac{\partial r_3}{\partial u}(u_0, v_0) + v \frac{\partial r_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{cases} \quad \text{dove } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Invece l'equazione cartesiana della retta normale è data da

$$\begin{cases} (x - x_0) \frac{\partial r_1}{\partial u}(u_0, v_0) + (y - y_0) \frac{\partial r_2}{\partial u}(u_0, v_0) + (z - z_0) \frac{\partial r_3}{\partial u}(u_0, v_0) = 0 \\ (x - x_0) \frac{\partial r_1}{\partial v}(u_0, v_0) + (y - y_0) \frac{\partial r_2}{\partial v}(u_0, v_0) + (z - z_0) \frac{\partial r_3}{\partial v}(u_0, v_0) = 0. \end{cases}$$

Nel nostro caso si vede che  $(u_0, v_0) = (1, 1)$  corrisponde a  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 3)$ . In tal caso si ha

$$\begin{array}{lll} r_1(u, v) = uv + 1 & \frac{\partial r_1}{\partial u} = v & \frac{\partial r_1}{\partial v} = u \\ r_2(u, v) = u^2 - v^2 & \frac{\partial r_2}{\partial u} = 2u & \frac{\partial r_2}{\partial v} = -2v \\ r_3(u, v) = 3uv & \frac{\partial r_3}{\partial u} = 3v & \frac{\partial r_3}{\partial v} = 3u \end{array}$$

Allora l'equazione parametrica del piano tangente nel punto  $(1, 1)$  è

$$\begin{cases} x = 2 + u + v \\ y = 2u - 2v \\ z = 3 + 3u + 3v \end{cases} \quad \text{dove } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Invece l'equazione cartesiana della retta normale è data da

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 11. \end{cases}$$

✎ **Esercizio 3.3.2.** Si scrivano, sia in forma parametrica che in forma implicita, l'equazione della retta normale e l'equazione del piano tangente alla superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \sin(x + y) + 2z^2 = 2\}$$

nel punto  $P = (0, 0, 1)$ .

Questo esercizio si può risolvere in tre modi.

Primo modo. Si possono usare le formule del piano tangente e della retta normale (nel punto generico  $(x_0, y_0, z_0)$ ) a una superficie data nella forma  $f(x, y, z) = 0$  che sono rispettivamente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

e

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} = 0.$$

Quindi si ha

$$f(x, y, z) = x^2 + \sin(x + y) + 2z^2 - 2 \quad (x_0, y_0, z_0) = P = (0, 0, 1)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x + \cos(x + y) & \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \cos(x + y) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 1) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 4z & \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) &= 4 \end{aligned}$$

quindi l'equazione del piano tangente (in forma implicita) alla superficie  $S$  nel punto  $P$  è

$$1(x - 0) + 1(y - 0) + 4(z - 1) = 0$$

cioè

$$x + y + 4z = 4.$$

L'equazione del piano tangente (in forma parametrica) alla superficie  $S$  nel punto  $P$  è ad esempio

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 1 - \frac{t + s}{4}. \end{cases}$$

L'equazione della retta normale (in forma implicita) alla superficie  $S$  nel punto  $P$  è

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 1}{4}$$

e dunque

$$\begin{cases} x = y \\ 4y = z - 1. \end{cases}$$

L'equazione della retta normale (in forma parametrica) alla superficie  $S$  nel punto  $P$  è, ad esempio

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 4t + 1. \end{cases}$$

Secondo modo. Scriviamo la superficie  $S$  in forma esplicita  $z = g(x, y)$  (esplicitando la variabile  $z$ ). Si ha

$$z^2 = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + \sin(x + y))$$



da cui

$$z = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}(x^2 + \sin(x + y))}.$$

Siccome vado ad analizzare le cose nell'intorno del punto  $P$ , scelgo

$$z = \sqrt{1 - \frac{1}{2}(x^2 + \sin(x + y))}.$$

In tal caso, le equazioni (in forma implicita) del piano tangente e della retta normale alla superficie  $S$  (data nella forma  $z = g(x, y)$ ) nel punto  $Q = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$  sono rispettivamente

$$z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

e

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - g(x_0, y_0)}{-1}.$$

Dunque, essendo  $Q = (0, 0, 1)$ , si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{-x - \frac{1}{2} \cos(x + y)}{2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}(x^2 + \sin(x + y))}} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = -\frac{1}{4}$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{1}{2} \cos(x + y)}{2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}(x^2 + \sin(x + y))}} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = -\frac{1}{4}$$

quindi l'equazione del piano tangente in forma esplicita alla superficie  $S$  nel punto  $Q$  viene ad essere

$$z = 1 - \frac{1}{4}(x + y)$$

mentre quella della retta normale è

$$\frac{x - 0}{-\frac{1}{4}} = \frac{y - 0}{-\frac{1}{4}} = \frac{z - 1}{-1};$$

lavorando come al punto precedente possiamo di nuovo ricavare le equazioni in forma parametrica.

Terzo modo. Visto che l'equazione della superficie è data in forma implicita, se non vogliamo esplicitarla rispetto ad una variabile, possiamo ad esempio servirci del teorema del Dini. Verifichiamo che questo teorema è applicabile nell'intorno del punto  $P = (0, 0, 1)$ . Si ha  $f(x, y, z) := x^2 + \sin(x + y) + 2z^2 - 2$ . Abbiamo  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $f(0, 0, 1) = 0$  e dal primo punto

dell'esercizio  $f_z(0, 0, 1) = 4 \neq 0$ . Allora può applicare il teorema del Dini; indicando con  $g$  la funzione implicita, si può dedurre che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1)} = -\frac{1}{4}$$

mentre

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1)} = -\frac{1}{4}.$$

Tenendo conto che  $g(0, 0) = 1$ , l'equazione del piano tangente e della retta normale in forma implicita si leggono rispettivamente

$$z = g(0, 0) + \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)(y - 0)$$

e

$$\frac{x - 0}{\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)} = \frac{y - 0}{\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)} = \frac{z - g(0, 0)}{-1}.$$

Inserendo i nostri dati si ottengono le stesse equazioni dedotte nei punti precedenti.

## 3.4. Area e integrali di superficie

---

### 3.4.1. Area di una superficie

L'idea di questo paragrafo è quella di estendere il concetto di integrale doppio andando a integrare non più solo su un dominio bidimensionale piano ma anche su oggetti più generali, per esempio su superfici. Questo permette anche di poter calcolare, ad esempio, l'area di una superficie. Le applicazioni sono evidenti, soprattutto in fisica (calcolo di massa o carica elettrica dislocata su superfici).

Sia dunque  $\Sigma$  una superficie *regolare* descritta da equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$$

che si può sintetizzare nell'equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in A \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Sappiamo che il vettore  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  è un vettore normale al piano tangente alla superficie; d'altra parte, dalle proprietà del prodotto vettoriale, si può affermare che il modulo del vettore  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  rappresenta l'area del parallelogramma individuato dai due vettori, che in prima approssimazione uguaglia l'area del "parallelogramma curvilineo" disegnato sulla superficie e compreso tra le linee coordinate. È ragionevole allora dare le seguenti definizioni.

□ **Definizione 3.4.1.** Si dice ELEMENTO D'AREA SULLA SUPERFICIE la quantità

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

L'AREA DELLA SUPERFICIE è data dalla formula

$$a(\Sigma) = \int \int_{\Sigma} dS = \int \int_A |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

☞ **Osservazione 3.4.2.** Il valore di  $a(\Sigma)$  non dipende dalla parametrizzazione scelta. Inoltre per definizione di superficie regolare parametrizzata l'elemento d'area non si annulla mai.

📎 **Esempio 3.4.3.** (AREA DI UNA SUPERFICIE CARTESIANA) Sia  $\Sigma$  una superficie cartesiana, che si può esprimere come grafico di una funzione  $z = f(x, y)$ , con  $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ . Si ha dunque

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

da cui

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Allora

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$$

da cui la formula dell'area diventa

$$a(\Sigma) = \int \int_A \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy$$

📎 **Esempio 3.4.4.** (AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE) Sia  $\Sigma$  una superficie di rotazione espressa attraverso le seguenti equazioni parametriche (per esempio ottenute mediante rotazione attorno all'asse  $x$ )

$$\begin{cases} x = x(t) \cos \theta \\ y = y(t) \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)$$

da cui

$$\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'(t) \cos \theta & x'(t) \sin \theta & z'(t) \\ -x(t) \sin \theta & x(t) \cos \theta & \theta \end{vmatrix} = -x(t) z'(t) \cos \theta \mathbf{i} - x(t) z'(t) \sin \theta \mathbf{j} + x(t) x'(t) \mathbf{k}$$

Quindi l'elemento d'area diventa

$$dS = |x(t)| \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt d\theta$$

da cui la formula dell'area diventa

$$a(\Sigma) = \int \int_{I \times [0, 2\pi)} |x(t)| \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt d\theta$$

🔗 **Esempio 3.4.5.** Calcolare l'area della superficie  $\mathcal{S}$  intersezione della “sella  $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = xy\}$  con il solido cilindrico  $C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

Si tratta di un calcolare l'area di una superficie. Prima di tutto occorre determinare una parametrizzazione della superficie  $\Sigma$ . Scegliamo ad esempio

$$r : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad r(\rho, \theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta))$$

dove

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \rho^2 \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

Il fatto che la sella  $\Sigma$  si interseca con il solido cilindrico ci dà la variabilità dei parametri  $\rho$  e  $\theta$ : si ha infatti  $0 \leq \rho \leq 2$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Allora si ha

$$r(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$r_\rho(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 2\rho \sin \theta \cos \theta)$$

$$r_\theta(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))$$

e

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 2\rho \sin \theta \cos \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{vmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned} r_\rho \wedge r_\theta &= \mathbf{i} \rho^2 (\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta - 2 \sin \theta \cos^2 \theta) + \mathbf{j} (-\rho^2) (2 \sin^2 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta) \\ &\quad + \mathbf{k} (\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) = (-\rho^2 \sin \theta) \mathbf{i} + (-\rho^2 \cos \theta) \mathbf{j} + \rho \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Da questo si deduce che

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{\rho^4 + \rho^2} = \rho \sqrt{\rho^2 + 1}.$$

Quindi

$$\int \int_{\Sigma} 1 dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{\rho^2 + 1} d\theta d\rho = \pi \left. \frac{(\rho^2 + 1)^{3/2}}{3/2} \right|_0^2 = \frac{2\pi}{3} [8 - 1] = \frac{14}{3} \pi.$$

### 3.4.2. Integrale di superficie di una funzione continua

Sia  $F$  una funzione continua, definita in una regione dello spazio contenente la superficie  $\Sigma$ . La sua restrizione sulla superficie è

$$\tilde{F}(u, v) = F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

ed è naturale definire l'integrale di  $F$  su  $\Sigma$  tramite la formula

$$\int \int_{\Sigma} F dS = \int \int_A \tilde{F}(u, v) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

Quindi l'integrale di superficie di  $F$  si esprime per mezzo di un integrale doppio in un dominio piano.

☞ **Esempio 3.4.6.** Calcolare l'integrale superficiale  $\int_{\Sigma} 3z dS$ , dove  $\Sigma$  è la porzione di ellissoide di equazione  $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$  racchiusa nel cilindro  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$  e situata nel semispazio  $\{z \geq 0\}$ .

Dobbiamo innanzitutto determinare una parametrizzazione della superficie considerata. Risolveremo l'esercizio in due modi, lavorando con due diverse parametrizzazioni della superficie.

PRIMO MODO. Poniamo

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \pm \sqrt{2(1 - \rho^2)}. \end{cases}$$

Siccome la superficie sta nel semispazio  $\{z \geq 0\}$  si prenderà la seguente parametrizzazione per  $\Sigma$

$$r : (\rho, \theta) \mapsto (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta)) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{2(1 - \rho^2)}) \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi].$$

Imponendo che la superficie sia racchiusa dal cilindro, si ottiene la seguente restrizione su  $\rho$

$$\rho^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}.$$

Sia allora

$$A := \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] : 0 \leq \rho \leq 1/2, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Si ha

$$r_\rho = \left( \cos \theta, \sin \theta, \sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}} (-2\rho) \right) = \left( \cos \theta, \sin \theta, -\frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)$$

e

$$r_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

quindi

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & \frac{-\sqrt{2}\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{\sqrt{2}\rho^2 \cos \theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{\sqrt{2}\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \rho \right).$$

Allora

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{\frac{2\rho^4}{1-\rho^2} + \rho^2} = \sqrt{\frac{2\rho^4 + \rho^2 - \rho^4}{1-\rho^2}} = \sqrt{\frac{\rho^4 + \rho^2}{1-\rho^2}} = \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1-\rho^2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_\Sigma 3z \, dS &= \int \int_A 3\sqrt{2} \sqrt{1-\rho^2} \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1-\rho^2}} \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} 3\sqrt{2} \rho \sqrt{\rho^2 + 1} \, d\theta \, d\rho. \end{aligned}$$

Osserviamo che si ha

$$\int 2\rho \sqrt{\rho^2 + 1} \, d\rho = \frac{2}{3} (\rho^2 + 1)^{3/2} + C,$$

quindi

$$\int_\Sigma 3z \, dS = \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} 3\sqrt{2} \rho \sqrt{\rho^2 + 1} \, d\theta \, d\rho = 2\sqrt{2} \pi (\rho^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^{1/2} = 2\pi \sqrt{2} \left( \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} - 1 \right)$$

Si può anche procedere con parametrizzazioni diverse per la superficie; il risultato non cambia.

### 3.5. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie

---

Consideriamo un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  e una superficie  $\Sigma$  trasversale alle linee di campo. L'integrale su  $\Sigma$  della componente di  $\mathbf{F}$  normale a  $\Sigma$  rappresenta il FLUSSO DI  $\mathbf{F}$  ATTRAVERSO  $\Sigma$  e gioca un ruolo fondamentale nella formulazione di molte leggi fisiche e in svariate applicazioni. Obiettivo di questo paragrafo sarà quello di definire correttamente questo concetto.

## 3.5.1. Superfici orientate. Bordo di una superficie.

Sia  $\Sigma$  una superficie regolare parametrizzata da

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$$

dove  $T$  è un dominio decomponibile in un numero finito di insiemi semplici. Allora i versori

$$\mathbf{n} = \text{vers}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \quad -\mathbf{n} = -\text{vers}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$$

sono entrambi normali alla superficie  $\Sigma$  e la scelta di uno dei due corrisponde a privilegiare uno dei due “lati” della superficie (per esempio il “lato interno” o il “lato esterno” di un guscio sferico); quindi la scelta di uno dei due versori può essere legata al concetto di *orientazione* della superficie stessa.

□ **Definizione 3.5.1.** Una superficie regolare  $\Sigma$  si dice **ORIENTABILE** se, per ogni curva continua chiusa che giace sulla superficie, parametrizzata da  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \Sigma$  si ha che  $\mathbf{n}(\mathbf{r}(b)) = \mathbf{n}(\mathbf{r}(a))$ . Detto altrimenti, se si segue il versore normale alla superficie lungo una curva chiusa che giace sulla superficie stessa, dopo un giro completo il versore normale deve avere di nuovo lo stesso verso.

□ **Definizione 3.5.2.** L'**ORIENTAZIONE** su una superficie è dunque determinata da una scelta del versore,  $\mathbf{n}$  o  $-\mathbf{n}$ . Una superficie si dice **ORIENTATA** se su di essa è stata scelta una delle due possibili orientazioni.

✎ **Esempio 3.5.3.** *Esempi di superfici orientabili sono le superfici cartesiane. Per una superficie di equazione  $z = f(x, y)$  si ha infatti*

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$$

e questo versore normale risulta essere sempre rivolto verso l'alto. Invece per una sfera o un toro, il versore  $\mathbf{n}$  risulta sempre interno o esterno a seconda della scelta dei parametri  $u$  e  $v$ .

☞ **Osservazione 3.5.4.** Non tutte le superfici sono orientabili. La più famosa è il cosiddetto **NASTRO DI MOEBIUS**: esso consiste in una striscia di carta con gli estremi uniti in modo da formare un anello ma avendo fatto compiere un mezzo giro a uno dei due estremi prima di unirli. In questo caso infatti la superficie ha un solo lato e non può essere orientata.

Per quanto riguarda la nozione di **BORDO DI UNA SUPERFICIE**, essendo una questione piuttosto delicata, ci limitiamo a considerare solamente il caso in cui  $T$  sia un dominio decomponibile in un numero finito di domini semplici (quindi  $T$  chiuso) e tale che la parametrizzazione della superficie realizza una corrispondenza biunivoca tra  $T$  e  $\Sigma$ . In tal caso non ci sono autointersezioni, e visto che  $T$  si può decomporre in un numero finito di domini semplici, il bordo di  $T$

è un'unione finita di curve che vengono trasportate tramite la parametrizzazione in un numero finito di immagini  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  di tali curve. Allora l'orientazione di  $\Sigma$ , ottenuta scegliendo uno dei due lati della superficie, induce un'orientazione *positiva* di ciascuna delle curve che compongono il bordo: allora si sceglie il verso di percorrenza di ogni curva in modo tale che percorrendole rimanendo sul lato di  $\Sigma$  che si è scelto come positivo, si lasciano i punti di  $\Sigma$  alla sinistra. Quando il bordo della superficie è orientato positivamente si usa il simbolo  $\partial^+\Sigma$ .

### 3.5.2. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata

Siamo pronti per dare la seguente definizione.

**Definizione 3.5.5.** Dati una superficie regolare orientata  $\Sigma$  con un versore normale  $\mathbf{n}$  e un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  di classe  $\mathcal{C}^1$  in un intorno di  $\Sigma$ , si definisce **FLUSSO DEL VETTORE  $\mathbf{F}$  ATTRAVERSO  $\Sigma$**  nella direzione e verso di  $\mathbf{n}$  l'integrale

$$\Phi(\mathbf{F}; \Sigma) = \int \int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.5.1)$$

Cerchiamo di calcolare operativamente l'integrale (3.5.1). Se

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$$

è la parametrizzazione usata per  $\Sigma$  allora visto che

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

si ha

$$\Phi(\mathbf{F}; \Sigma) = \int \int_T \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv$$

dove

$$\tilde{\mathbf{F}}(u, v) = \mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

**Osservazione 3.5.6.** Il segno del flusso dipende dall'orientazione scelta sulla superficie. Se si cambia orientazione (quindi se si cambia segno al vettore  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ ) allora anche il flusso cambia segno.

**Esempio 3.5.7.** Sia  $V(x, y, z) = (zx, zy, x^2 + y^2)$  un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ . Calcolate, usando la definizione, il flusso uscente di  $V$  attraverso la superficie laterale  $S$  del cono  $C$  di vertice  $P = (0, 0, 4)$  e base il cerchio sul piano  $\{z = 0\}$  di equazione  $x^2 + y^2 = 16$  (si calcoli cioè  $\int \int_S V \cdot \mathbf{n} dS$ ,  $\mathbf{n}$  versore normale uscente). Si noti che in questo caso la superficie laterale  $S$  del cono è il grafico della funzione  $c(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .



Sia

$$r : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u))$$

una parametrizzazione della nostra superficie. Allora il flusso  $\Phi_S$  di  $V$  uscente dalla superficie  $S$  è dato dalla formula

$$\Phi_S = \int \int_A V(x(t, u), y(t, u), z(t, u)) (r_t \wedge r_u)(t, u) dt du.$$

Risolviamo l'esercizio in due modi diversi, utilizzando due diverse parametrizzazioni della superficie  $S$ .

PRIMO MODO. Sia

$$r : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(\rho, \theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta))$$

dove

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 4 - \rho. \end{cases}$$

L'equazione di  $z$  è stata ricavata tramite  $x$  e  $y$  da  $c(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ . Essendo  $C$  un cono di vertice  $P$  e base il cerchio sul piano  $\{z = 0\}$  di equazione  $x^2 + y^2 = 16$ , si deduce che deve essere  $0 \leq \rho \leq 4$  mentre  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

A questo punto

$$r_\rho(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, -1) \quad r_\theta(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

e

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & -1 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho)$$

che è un vettore uscente.

Ora

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} ((4 - \rho) \rho \cos \theta \rho \cos \theta + (4 - \rho) \rho \sin \theta \rho \sin \theta + \rho^2 \rho) d\theta d\rho \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} ((4 - \rho) \rho^2 + \rho^3) d\rho d\theta = 8\pi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^4 = \frac{512}{3} \pi. \end{aligned}$$

SECONDO MODO. Sia

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

dove

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 4 - \sqrt{s^2 + t^2} \end{cases}$$

con la limitazione  $\sqrt{s^2 + t^2} \leq 4$ .

A questo punto

$$r_s(s, t) = \left(1, 0, -\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}\right) \quad r_t(s, t) = \left(0, 1, -\frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}\right)$$

e

$$r_s \wedge r_t = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}, \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}, 1\right)$$

che è un vettore uscente.

Ora

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \int_{s^2+t^2 \leq 16} \left( (4 - \sqrt{s^2 + t^2}) \frac{ss}{\sqrt{s^2 + t^2}} + (4 - \sqrt{s^2 + t^2}) \frac{tt}{\sqrt{s^2 + t^2}} + (s^2 + t^2) 1 \right) ds dt \\ &= \int \int_{s^2+t^2 \leq 16} (4 - \sqrt{s^2 + t^2}) \sqrt{s^2 + t^2} + s^2 + t^2 ds dt \end{aligned}$$

che per mezzo di un cambio di coordinate (da cartesiane a polari) dà lo stesso risultato del passo precedente.

## 3.6. Teorema della divergenza

---

Siamo dunque pronti per enunciare uno dei risultati più importanti del nostro percorso, sia perché riassume (dal punto di vista matematico) molti dei concetti su cui abbiamo lavorato fino ad ora, sia perché dal punto di vista applicativo si ritrova in moltissime branche della fisica matematica ed è impiegato in uno svariato numero di applicazioni.


**Teorema 3.6.1.** (TEOREMA DELLA DIVERGENZA O DI GAUSS) *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  un dominio limitato, semplice rispetto a tutti e tre gli assi cartesiani, la cui frontiera è una superficie regolare e orientabile; indichiamo con  $\mathbf{n}_e$  il versore normale esterno a  $\partial D$  e sia  $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$  un campo vettoriale di classe  $C^1(D)$ . Allora vale la formula*

$$\int \int \int_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \int \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS$$

dove ricordiamo che

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Il teorema della divergenza si può dunque riassumere come: *il flusso di un campo vettoriale uscente da una superficie chiusa uguaglia l'integrale della divergenza del campo nella regione racchiusa dalla superficie stessa.* Il teorema rappresenta un'equazione di bilancio tra le due quantità.

 **Esempio 3.6.2.** *Con riferimento all'Esempio 3.5.7, provare a risolverlo usando il teorema della divergenza e commentare i risultati ottenuti.*

Proviamo dunque a risolvere il precedente esercizio utilizzando il teorema della divergenza. Dovremmo calcolare l'integrale triplo sul cono  $C$  della divergenza del campo vettoriale  $V$ . Sia  $\Phi_C$  il risultato di tale integrale. Ci si aspetterebbe  $\Phi_C = \Phi_S$ . Si ha

$$\operatorname{div} V(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(zx) + \frac{\partial}{\partial y}(zy) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2) = z + z + 0 = 2z.$$

Parametrizzo il cono con coordinate cilindriche, quindi si ha

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z. \end{cases}$$

con le limitazioni

$$0 \leq \rho \leq 4 \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad 0 \leq z \leq \rho.$$

Da cui

$$\begin{aligned} \Phi_C &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-\rho} 2z \rho \, dz \, d\theta \, d\rho = 2\pi \int_0^4 \rho [4-\rho]^2 \, d\rho = 2\pi \int_0^4 [16\rho - 8\rho^2 + \rho^3] \, d\rho \\ &= 2\pi \left[ 16 \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^4 - 8 \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^4 + \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^4 \right] = 2\pi \left[ 16 \cdot 8 - \frac{8}{3} \cdot 64 + 64 \right] = 2\pi \left[ 192 - \frac{512}{3} \right] = \frac{128}{3} \pi \end{aligned}$$

e quindi chiaramente  $\Phi_C \neq \Phi_S$ .

Il problema è che se vogliamo applicare il teorema della divergenza, il bordo del cono non è solo dato dalla sua superficie laterale  $S$  ma anche dalla superficie di base, quindi l'integrale triplo di  $\text{div } V$  è uguale al flusso attraverso la superficie  $S$  e il cerchio di base del cono. Il flusso attraverso la superficie  $S$  è stato calcolato nella prima parte dell'esercizio, ora calcoliamo il flusso attraverso la superficie di base. Parametizziamo il cerchio di base

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

con la condizione  $s^2 + t^2 \leq 16$ . Stavolta però il versore normale è rivolto verso l'interno (entrante). Facciamo un cambiamento di variabili (che non cambia l'orientazione del versore normale)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi il cerchio di base del cono può essere parametrizzata nel seguente modo

$$r(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0).$$

A questo punto

$$r_\rho(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad r_\theta(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

e

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \rho)$$

che è un vettore entrante. Quindi

$$\Phi = - \int_0^4 \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho d\rho = -2\pi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^4 = -128\pi.$$

Sommando i due contributi, ciascuno col proprio segno si ha

$$\frac{512}{3}\pi - 128\pi = \frac{128}{3}\pi$$

e in questo modo il teorema della divergenza è stato applicato correttamente.

**Esempio 3.6.3.** (EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA MASSA) Sia  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  il campo di velocità di un fluido, sia  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  la sua densità e  $D$  l'elemento di volume occupato dal fluido. Sia  $dS$  un elemento infinitesimo di superficie e  $\mathbf{n}$  il suo versore normale. La massa di fluido che attraversa tale superficie nell'unità di tempo è  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ ; integrando su  $\partial D$  si ottiene il flusso uscente di  $\rho \mathbf{v}$  attraverso  $\partial D$ . Per il teorema della divergenza si ha

$$\int \int \int_D \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dx dy dz = \int \int_{\partial D} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e dS$$

D'altra parte la quantità di fluido uscita da  $D$  nell'unità di tempo è anche uguale alla variazione della massa rispetto al tempo (con segno cambiato! perché la massa si conserva) e visto che

$$m = \int \int \int_D \rho dx dy dz$$

assumendo di poter derivare sotto il segno di integrale si ha

$$-\frac{dm}{dt} = - \int \int \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

Riassumendo abbiamo dunque

$$\int \int \int_D \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dx dy dz = 0$$

e per l'arbitrarietà di  $D$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Questa equazione prende il nome di EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DELLA MASSA ed esprime il principio di conservazione della massa. Si noti che se un fluido è incomprimibile allora la sua densità  $\rho$  è una costante per cui l'equazione di continuità della massa si riduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

## 3.7. Il teorema di Stokes o del rotore

Concludiamo con questo altrettanto importante risultato.

**Teorema 3.7.1.** (TEOREMA DEL ROTORE O DI STOKES) *Sia  $\Sigma$  una superficie regolare orientata con versore normale  $\mathbf{n}$ , dotata di bordo  $\partial^+\Sigma$  orientato positivamente. Supponiamo inoltre che  $\partial^+\Sigma$  sia una curva regolare (o l'unione di più curve regolari); sia  $\mathbf{T}$  il versore tangente a  $\partial^+\Sigma$ . Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  è un campo vettoriale regolare definito in un intorno di  $\Sigma$  allora vale la formula*

$$\int \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \quad (3.7.1)$$

Il precedente teorema si può riassumere dicendo: *il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie  $\Sigma$  uguaglia la circuitazione del campo lungo il bordo della superficie stessa, se orientato positivamente.*

☞ **Osservazione 3.7.2.** Il teorema di Stokes vale anche nel caso particolare di una superficie orientabile chiusa, quindi priva di bordo; in questo caso il secondo membro dell'integrale (3.7.1) sarà nullo.

☞ **Osservazione 3.7.3.** Se scriviamo

$$\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})\mathbf{i} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})\mathbf{j} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})\mathbf{k}$$

e osservando che

$$\mathbf{T} ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

la (3.7.1) diventa in forma esplicita

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Sigma} [(R_y - Q_z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + (P_z - R_x) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + (Q_x - P_y) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})] dS \\ &= \oint_{\partial^+\Sigma} P dx + Q dy + R dz \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui la superficie  $\Sigma$  coincide con un dominio  $D$  del piano  $xy$  (con frontiera regolare) e  $\mathbf{F}$  sia un campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

allora si ha  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  e  $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (Q_x - P_y)$  quindi la precedente formula si riduce a

$$\int \int_D (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{\partial^+D} P dx + Q dy$$

che altro non è che il TEOREMA DI GAUSS-GREEN nel piano. In questo senso il teorema di Stokes risulta essere una generalizzazione del teorema di Gauss-Green.

## 3.8. Esercizi proposti

### 3.8.1. Integrali di superficie

#### ✎ Esercizio 3.8.1.

Calcolare l'area della superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  situata nella regione individuata da  $\{z \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ .

PRIMO MODO: dobbiamo innanzitutto determinare una parametrizzazione della superficie considerata. Poniamo:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \sin \varphi \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \sin \varphi \\ z = \sqrt{2} \cos \varphi, \end{cases}$$

dove  $\varphi$  è l'angolo tra il segmento che congiunge il punto  $P$  generico con l'origine e la direzione positiva dell'asse  $z$  e  $\theta$  è l'angolo che si forma tra  $OH$  con  $H$  la proiezione di  $P$  sul piano  $xy$  e la direzione positiva dell'asse  $x$ .

Le limitazioni sugli angoli sono dunque

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

dove la limitazione su  $\varphi$  è stata trovata imponendo la condizione sulla  $z$ .

L'elemento d'area si può calcolare facilmente come  $2 \sin \varphi$  dunque

$$\int \int_{\Sigma} 1 \, dS = \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} 2 \sin \varphi \, d\varphi d\theta = 4\pi [-\cos \varphi]_0^{\pi/3} = 4\pi(-1/2 + 1) = 2\pi.$$

SECONDO MODO: una parametrizzazione alternativa per la superficie considerata è la seguente:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \pm \sqrt{2 - \rho^2}. \end{cases}$$

Siccome la nostra superficie sta nella regione  $\{z \geq \sqrt{2}/2\}$ , si prenderà il segno positivo per la  $z$  e dunque una parametrizzazione per  $\Sigma$  risulta

$$r : (\rho, \theta) \mapsto (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta)) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{2 - \rho^2}) \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi].$$

Dalla condizione di esistenza della radice, si ottiene la seguente restrizione su  $\rho$

$$\rho^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}.$$

Sia allora

$$A := \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Si ha

$$r_\rho = \left( \cos \theta, \sin \theta, -\frac{\rho}{\sqrt{2 - \rho^2}} \right)$$

e

$$r_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

quindi

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & \frac{-\rho}{\sqrt{2 - \rho^2}} \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{\rho^2 \cos \theta}{\sqrt{2 - \rho^2}}, \frac{\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{2 - \rho^2}}, \rho \right).$$

Allora

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{\frac{\rho^4}{2 - \rho^2} + \rho^2} = \sqrt{\frac{\rho^4 + 2\rho^2 - \rho^4}{2 - \rho^2}} = \sqrt{2} \rho \frac{1}{\sqrt{2 - \rho^2}}.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} 1 \, dS = \int \int_A \sqrt{2} \rho \frac{1}{\sqrt{2 - \rho^2}} \, d\theta \, d\rho = \sqrt{2} \pi \left( -\sqrt{2 - \rho^2} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

### ✎ Esercizio 3.8.2.

Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} z \, d\sigma$$

dove  $\Sigma$  è la porzione di ellissoide di equazione

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1,$$

racchiusa dentro al cilindro

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

e situata nel semispazio  $\{z \geq 0\}$ . Si calcoli poi il piano tangente alla superficie nel punto  $P = \left(0, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ .



Dobbiamo innanzitutto determinare una parametrizzazione della superficie considerata. Poniamo

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \pm \sqrt{2(1 - \rho^2)}. \end{cases}$$

Siccome la nostra superficie sta nel semispazio  $\{z \geq 0\}$  si prenderà il segno positivo per  $z$ , dunque una parametrizzazione per  $\Sigma$  risulta

$$r : (\rho, \theta) \mapsto (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta)) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{2(1 - \rho^2)}) \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi].$$

Imponendo che la superficie sia racchiusa dal cilindro, si ottiene la seguente restrizione su  $\rho$

$$\rho^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sia allora

$$A := \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] : 0 \leq \rho \leq 1/\sqrt{2}, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Si ha

$$r_\rho = \left( \cos \theta, \sin \theta, \sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{1 - \rho^2}} (-2\rho) \right) = \left( \cos \theta, \sin \theta, -\frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right)$$

e

$$r_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

quindi

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & \frac{-\sqrt{2}\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{\sqrt{2}\rho^2 \cos \theta}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \frac{\sqrt{2}\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \rho \right).$$

Allora

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{\frac{2\rho^4}{1 - \rho^2} + \rho^2} = \sqrt{\frac{2\rho^4 + \rho^2 - \rho^4}{1 - \rho^2}} = \sqrt{\frac{\rho^4 + \rho^2}{1 - \rho^2}} = \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1 - \rho^2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_\Sigma z \, dS &= \int \int_A \sqrt{2} \sqrt{1 - \rho^2} \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + 1}{1 - \rho^2}} \, d\rho \, d\theta = \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \rho \sqrt{\rho^2 + 1} \, d\theta \, d\rho \\ &= \sqrt{2} \pi \frac{2}{3} (\rho^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = 2\pi \frac{\sqrt{2}}{3} \left( \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il calcolo del piano tangente: prima di tutto occorre determinare per quali valori di  $\rho$  e  $\theta$  si ottiene dalla parametrizzazione scelta il punto  $P$ . Considerando prima la  $z$  si ha  $\sqrt{2}\sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$  da cui si deduce  $\rho = \rho_0 = \frac{1}{2}$ . Inserendo ora queste informazioni nelle prime due coordinate si ha  $\cos \theta = 0$  e  $\sin \theta = 1$  dunque  $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$ .

A questo punto si ottiene facilmente che  $r_\rho(\rho_0, \theta_0) = \left(0, 1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$  e  $r_\theta(\rho_0, \theta_0) = (-1/2, 0, 0)$ . Per cui la formula del piano tangente è

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \\ r_\rho(\rho_0, \theta_0) \\ r_\theta(\rho_0, \theta_0) \end{pmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{vmatrix} x & y - 1/2 & z - \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & 1 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \left(y - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} + z - \sqrt{\frac{3}{2}} \right] = 0$$

che porta a

$$z = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(y - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}(2 - y).$$

Alternativamente: usiamo la formula che descrive l'equazione del piano tangente in forma parametrica. Si ha

$$t(\rho, \theta) = r(\rho_0, \theta_0) + r_\rho(\rho_0, \theta_0)(\rho - \rho_0) + r_\theta(\rho_0, \theta_0)(\theta - \theta_0).$$

Dunque nel dettaglio si ha

$$\begin{cases} x(\rho, \theta) = -\frac{1}{2}(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ y(\rho, \theta) = \frac{1}{2} + \rho - \frac{1}{2} = \rho \\ z(\rho, \theta) = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}(\rho - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

dalla quale, ricavando il parametro  $\rho$  dalla seconda equazione e sostituendolo nella terza, si ottiene l'equazione cartesiana del piano tangente trovata sopra.

### ✎ Esercizio 3.8.3.

Calcolare l'area della superficie  $\mathcal{S}$  intersezione della “sella  $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2xy\}$  con il solido cilindrico  $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$ .

Si tratta di un integrale superficiale. Prima di tutto occorre determinare una parametrizzazione della superficie  $\Sigma$ . Scegliamo ad esempio

$$r : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(\rho, \theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta))$$

dove

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 2 \rho^2 \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

Il fatto che la sella  $\Sigma$  si interseca con il solido cilindrico ci dà la variabilità dei parametri  $\rho$  e  $\theta$ : si ha infatti  $0 \leq \rho \leq 3$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Allora si ha

$$r(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 2 \rho^2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$r_\rho(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 4 \rho \sin \theta \cos \theta)$$

$$r_\theta(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 2 \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))$$

e

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 4 \rho \sin \theta \cos \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 2 \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{vmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned} r_\rho \wedge r_\theta &= \mathbf{i} 2 \rho^2 (\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta - 2 \sin \theta \cos^2 \theta) + \mathbf{j} (-2 \rho^2) (2 \sin^2 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta) \\ &\quad + \mathbf{k} (\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) = (-2 \rho^2 \sin \theta) \mathbf{i} + (-2 \rho^2 \cos \theta) \mathbf{j} + \rho \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Da questo si deduce che

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{4 \rho^4 + \rho^2} = \rho \sqrt{4 \rho^2 + 1}.$$

Quindi

$$\int \int_{\Sigma} 1 dS = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{4 \rho^2 + 1} d\theta d\rho = \frac{\pi}{4} \frac{(4 \rho^2 + 1)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{6} [(16)^{3/2} - 1] = \frac{21}{2} \pi.$$

3.8.2. Flusso di un campo attraverso una superficie. Teorema della divergenza

✎ **Esercizio 3.8.4.**

Sia

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

e sia  $S$  la superficie totale del cubo. Sia  $\mathbf{n}(x, y, z)$  il versore normale esterno a  $S$  nel generico punto  $(x, y, z) \in S$ . Sia

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\arctan y + \sqrt[3]{z}e^y + x)\mathbf{i} + (2x \cos z^2 - e^{\frac{z}{3}})\mathbf{j} + (2xy - e^x)\mathbf{k} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Calcolare il flusso di  $\mathbf{F}$  attraverso  $S$ .

L'idea è quella di usare il teorema della divergenza

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_C \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz.$$

Dette  $F_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  le componenti del campo vettoriale  $\mathbf{F}$ , calcoliamo dunque

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 0 + 0 = 1$$

quindi il flusso del campo attraverso  $S$  equivale all'integrale triplo di 1 su  $C$  ma questo corrisponde al calcolo del volume di  $C$  che è un cubo con lunghezza dello spigolo uguale a 1, perciò il flusso di  $\mathbf{F}$  attraverso  $S$  vale 1.

#### ✎ Esercizio 3.8.5.

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{3y}{x^2 + y^2}, 1 \right)$$

attraverso la porzione di paraboloido  $z = x^2 + y^2$  compresa tra i piani  $z = 0$  e  $z = 1/4$ .

Cerchiamo prima di tutto una parametrizzazione della superficie. Per esempio possiamo scegliere

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \rho^2 \end{cases} \quad \rho \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right]; \theta \in [0, 2\pi].$$

Quindi

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2)$$

da cui

$$\mathbf{r}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 2\rho) \quad \mathbf{r}_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

e pertanto

$$\mathbf{r}_\rho \wedge \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 2\rho \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-2\rho^2 \cos \theta, -2\rho^2 \sin \theta, \rho).$$

Siccome per calcolare il flusso abbiamo bisogno della normale uscente, in questo caso occorre prendere il vettore  $\mathbf{n} = (2\rho^2 \cos \theta, 2\rho^2 \sin \theta, -\rho)$ .

A questo punto

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2\rho \cos \theta}{\rho^2}, \frac{3\rho \sin \theta}{\rho^2}, \rho \right) \cdot (2\rho^2 \cos \theta, 2\rho^2 \sin \theta, -\rho) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} (4\rho \cos^2 \theta + 6\rho \sin^2 \theta - \rho) d\rho d\theta \\ &= \pi 2 \frac{1}{4} + 6 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \pi - 2\pi \frac{1}{4} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \pi, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\int \cos^2 \theta = \frac{1}{2}[\theta + \sin \theta \cos \theta] + C \quad \int \sin^2 \theta = \frac{1}{2}[\theta - \sin \theta \cos \theta] + C.$$

#### ✎ Esercizio 3.8.6.

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z^4)$$

attraverso la superficie  $S$  del cilindro circolare di equazione  $x^2 + y^2 = 4$  delimitato dai piani  $z = 1$  e  $z = -1$ .

PRIMO MODO: Usiamo il teorema della divergenza. Si ha

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz$$

con

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } -1 \leq z \leq 1\}.$$

A questo punto

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2 + 4z^3$$

per cui, integrando per esempio per strati, si ha

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz = \iiint_V (2 + 4z^3) dx dy dz \\ &= \int_{-1}^1 \left( \iint_{D_z} (2 + 4z^3) dx dy \right) dz = \int_{-1}^1 (2 + 4z^3) \operatorname{area}(D_z) dz = 16\pi. \end{aligned}$$

SECONDO MODO: Calcoliamo il flusso del campo senza usare il teorema della divergenza. La superficie  $S$  è data dall'unione di  $S_1$  che è la superficie laterale del cilindro,  $S_2$  e  $S_3$  che sono i cerchi di base, a quota  $z = 1$  e  $z = -1$  rispettivamente.

Troviamo una parametrizzazione delle tre superfici e calcoliamo il flusso distinguendo i tre contributi, dopo aver calcolato i rispettivi vettori normali.

Prima di tutto si ha per  $S_1$

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad z \in [-1, 1].$$

Quindi

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z)$$

da cui

$$\mathbf{r}_\theta = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) \quad \mathbf{r}_z = (0, 0, 1)$$

e pertanto

$$\mathbf{r}_\theta \wedge \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 \sin \theta & 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0),$$

che è un vettore normale uscente. Dunque

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z^4) \cdot (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0) \, d\theta \, dz = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta \, dz = 16\pi.$$

D'altra parte, sia ora  $S_2$ . In tal caso una sua parametrizzazione si ottiene nel seguente modo

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 1 \end{cases} \quad \rho \in [0, 2] \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Quindi

$$\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 1)$$

da cui

$$\mathbf{r}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \mathbf{r}_\theta = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

e pertanto

$$\mathbf{r}_\rho \wedge \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \rho),$$

che è un vettore normale uscente.

D'altra parte, per  $S_3$  la parametrizzazione diventa

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = -1 \end{cases} \quad \rho \in [0, 2] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

quindi si ottiene il medesimo vettore normale, che stavolta però è entrante! Quindi va preso con il segno contrario. Per la simmetria del problema dunque i contributi del flusso attraverso i due cerchi di base si elidono. Pertanto il valore del flusso ottenuto è  $16\pi$  come calcolato con il teorema della divergenza.

### 3.8.3. Teorema del rotore

#### ✎ Esercizio 3.8.7.

Calcolare il flusso del rotore del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, xy, 0)$$

attraverso la regione piana  $S = S_1 \cup S_2$  dove

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right\} \\ S_2 &= \{(x, y) : 1 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}. \end{aligned}$$

L'idea è di usare il teorema di Stokes o del rotore, pertanto

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial^+ S} \mathbf{F} \, ds.$$

La regione individuata da  $S$  è limitata da tre curve che devono essere percorse parametrizzando il senso antiorario. La prima curva è un segmento sull'asse  $x$  per  $x \in [0, \sqrt{2}]$  quindi una parametrizzazione è

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, \sqrt{2}]$$

e dunque  $\gamma_1'(t) = (1, 0)$ . Pertanto, essendo  $\mathbf{F}(\gamma_1(t)) = 0$  si ha

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \, d\gamma_1 = 0.$$

La seconda curva è un arco di circonferenza pertanto una possibile parametrizzazione è

$$\gamma_2(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t) \quad t \in [0, \pi/4]$$

quindi

$$\gamma_2'(t) = (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 &= \int_0^{\pi/4} (2 \cos t \sin t, 2 \cos t \sin t) \cdot (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t) dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} (-\cos t \sin^2 t + \cos^2 t \sin t) dt = 2\sqrt{2} \left[ -\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{3}. \end{aligned}$$

Infine per quanto riguarda l'ultima curva, si nota che deve essere percorsa in senso antiorario, quindi usiamo la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = \left( t, \sin \left( \frac{\pi}{2} t \right) \right) \quad t \in [0, 1]$$

e poi cambiamo di segno all'integrale risultante. Si ha  $\gamma_3'(t) = (1, \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t)$ , dunque

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} \mathbf{F} d\gamma_3 &= \int_0^1 t \sin \left( \frac{\pi}{2} t \right) dt + \int_0^1 \frac{\pi}{2} t \sin \left( \frac{\pi}{2} t \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} t \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -t \cos \frac{\pi}{2} t \right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} t dt + \frac{\pi}{4} \int_0^1 t \sin(\pi t) dt = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

dove il risultato è stato ottenuto dopo integrazione per parti.

Pertanto riassumendo

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} d\gamma_2 - \int_{\gamma_3} \mathbf{F} d\gamma_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{11}{12}.$$

### ✎ Esercizio 3.8.8.

Calcolare il flusso del rotore del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y, z)$$

attraverso la superficie  $S$  che è il triangolo di vertici  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ .

Si vede facilmente che il campo  $F$  è conservativo, dunque è anche irrotazionale, e pertanto il suo rotore fa zero. D'altra parte, essendo conservativo, la circuitazione del campo lungo una linea chiusa fa zero, perché dipende solo dal punto iniziale e finale. Quindi il flusso attraverso la superficie fa 0, in accordo con il teorema del rotore.



✎ **Esercizio 3.8.9.**

Sia

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos z x \mathbf{i} + x^3 e^{yz} \mathbf{j} - e^{-xyz} \mathbf{k}.$$

Determinare

$$I = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

essendo  $S$  la parte della sfera  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$  che sta sopra il piano  $xy$ , orientato verso l'esterno della sfera.

**Hint:** usando il teorema del rotore, parametrizziamo il dominio che si ottiene intersecando la sfera con il piano  $xy$  (si tratta del cerchio  $x^2 + y^2 \leq 4$  situato nel piano  $z = 0$ ) quindi una parametrizzazione di  $\partial^+ S$  è

$$\partial^+ S(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$$

parametrizzata in senso antiorario come deve essere. Si ha allora

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_{\partial^+ S} \mathbf{F} \, ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta \cos \theta, \cos^3 \theta, -1) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta = 0 \end{aligned}$$