Metodo di Galerkin: elementi finiti per problemi parabolici

Con condizioni di Cauchy-Dirichlet omogenee

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \qquad x \in [0, L] \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Dato un problema di Cacuhy-Dirichlet in forma generale come segue è possibile passare al problema in forma debole:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \qquad x \in [0, L] \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$-\int_0^L a(x)u'v'dx + \int_0^L b(x)u'vdx + \int_0^L c(x)uvdx = \int_0^L f(x)vdx$$

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} vdx - \int_0^L a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v'dx + \int_0^L b(x)u'vdx + \int_0^L c(x)uvdx = \int_0^L f(x)vdx$$

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} vdx - \int_0^L \left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x}v + cuv\right]dx = \int_0^L f(x)vdx$$

Se i coefficienti $a(x) = a,\ b(x) = b,\ c(x) = c$ sono costanti allora si può calcolare la matrice di massa:

$$M = h\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \vdots \\ \vdots & \frac{1}{6} & \ddots & \frac{2}{3} \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Poi si può calcolare la matrice A è simmetrica e può essere calcolata così:

$$A = \frac{a}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{2} & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + cM$$

Dove h è l'ampiezza dei sottointervalli. E la dimensione della matrice A è N ovvero la lunghezza del vettore dei nodi. Il vettore dei nodi (NON comprende il primo estremo mentre comprende il secondo) si calcola come:

```
vert=[x0+h:h:xL-h]
```

A questo punto per risolvere l'equazione differenziale occorre calcolare il vettore dei termini noti $\vec{F}$. Per calcolare il vettore dei termini noti si scrive la funzione come function handle, poi la si valuta nei nodi e infine la si moltiplica per l'ampiezza degli intervalli dunque:

```
fun = @(x) -2.*exp(x).*cos(x);
f = h*fun(vert);
```

A questo punto occorre risolvere la seguente equazione che può essere vista come un sistema:

$$\frac{1}{\tau}M(u_n - u_{n-1}) + A[\vartheta u_n + (1-\vartheta)u_{n-1}] = \vartheta f_n + (1-\vartheta)f_{n-1}$$

$$\left(\frac{M}{\tau} + A\vartheta\right)u_n = \left[\frac{M}{\tau} - A(1-\vartheta)\right]u_{n-1} + f$$

Quindi in funzione del tipo di metodo che si vuole utilizzare per risolvere tale equazione occorre scegliere il valore di ϑ:

- $\vartheta = 0$ $\rightarrow$ Eulero esplicito
- $\vartheta = 1$ $\rightarrow$ Eulero implicito
- $\vartheta = 0.5$ $\rightarrow$ Crank-Nicholson

Dopo dunque aver imposto τ, ϑ e T ovvero il numero di passi temporali si effettua la fattorizzazione LU del termine in blu e si procede con il seguente ciclo:

```
u = zeros(N,1);
tao = 0.01;
teta = 0.5;
nodi = [x0:h:xL];
plot(nodi,[0;u],'ro-');
hold on

[L,U,P] = lu(M/tao+teta*A);
for i = 1:T
    b = (M/tao-A*(1-teta))*u+f;
    y = fwsub(L,P*b);
    u = bksub(U,y);
    plot(nodi,[0;u], 'bo-');
end
```

Con condizioni di Cauchy-Neuman (secondo estremo) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \qquad x \in [0, L] \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = g_N \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$	see right column

Dato un problema parabolico di Cacuhy-Neumann in forma generale come segue è possibile passare al problema in forma debole:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \qquad x \in [0, L] \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = g_N \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx - \int_0^L a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v' dx + \int_0^L b(x) u' v dx + \int_0^L c(x) u v dx = \int_0^L f(x) v dx + g_N v(L)$$

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx - \int_0^L \left[a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} v + c u v \right] dx = \int_0^L f(x) v dx + g_N v(L)$$

Se i coefficienti $a(x) = a$, $b(x) = b$, $c(x) = c$ sono costanti allora si può calcolare la matrice di massa:

$$M = h \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \vdots \\ \vdots & \frac{1}{6} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Poi si può calcolare la matrice A è simmetrica e può essere calcolata così:

$$A = \frac{a}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + cM$$

Dove h è l'ampiezza dei sottointervalli. E la dimensione della matrice A è N ovvero la lunghezza del vettore dei nodi. Il vettore dei nodi (NON comprende il primo estremo mentre comprende il secondo) si calcola come:

```
vert=[x0+h:h:xL]
```

A questo punto per risolvere l'equazione differenziale occorre calcolare il vettore dei termini noti $\vec{F}$. Per calcolare il vettore dei termini noti si scrive la funzione come function handle, poi la si valuta nei nodi, la si moltiplica per l'ampiezza degli intervalli e infine si somma all'ultimo elemento del vettore il termine noto g_N dunque:

```
fun = @(x) 5.*x.^3+15.*x.^2-33.*x-3;
gN = 12;
f = h*fun(vert);
f(N)=f(N)+gN;
```

A questo punto occorre risolvere la seguente equazione che può essere vista come un sistema:

$$\frac{1}{\tau}M(u_n - u_{n-1}) + A[\vartheta u_n + (1-\vartheta)u_{n-1}] = \vartheta f_n + (1-\vartheta)f_{n-1}$$

$$\left(\frac{M}{\tau} + A\vartheta\right)u_n = \left[\frac{M}{\tau} - A(1-\vartheta)\right]u_{n-1} + f$$

Quindi in funzione del tipo di metodo che si vuole utilizzare per risolvere tale equazione occorre scegliere il valore di ϑ:

- $\vartheta = 0$ $\rightarrow$ Eulero esplicito
- $\vartheta = 1$ $\rightarrow$ Eulero implicito
- $\vartheta = 0.5$ $\rightarrow$ Crank-Nicholson

Dopo dunque aver imposto τ, ϑ e T ovvero il numero di passi temporali si effettua la fattorizzazione LU del termine in blu e si procede con il seguente ciclo:

```
u = zeros(N,1);
tao = 0.01;
teta = 0.5;
nodi = [x0:h:xL];
plot(nodi,[0;u],'ro-‘);
hold on

[L,U,P] = lu(M/tao+teta*A);
for i = 1:T
    b = (M/tao-A*(1-teta))*u+f;
    y = fwsub(L,P*b);
    u = bksub(U,y);
    plot(nodi,[0;u], 'bo-');
end
```