Michela Eleuteri

ANALISI MATEMATICA

Funzioni di più variabili reali

Calcolo integrale per funzioni di più variabili

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Calcolo integrale per funzioni di più variabili reali

1.1. Integrali doppi

1.1.1. Integrale di una funzione limitata definita su un rettangolo

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di una variabile continua. In Analisi I abbiamo introdotto l'integrale definito di f su $[a,b]$ come limite delle somme di Cauchy-Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_k)$$

dove l'intervallo $[a,b]$ è stato diviso in n intervallini della stessa ampiezza $\frac{b-a}{n}$ attraverso una partizione equispaziata e ξ_k è un qualunque punto appartenente al k-esimo intervallino; il limite viene poi fatto all'infittirsi della partizione (per $n \to \infty$)
La definizione di integrale attraverso le somme di Cauchy-Riemann si può dare anche per funzioni limitate. Se tale limite esiste finito, e non dipende dalla partizione e dai punti ξ_k scelti, allora si dice che f è integrabile su $[a,b]$.
L'idea di integrale doppio nasce come la naturale estensione di tali concetti.
Sia $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata definita su un rettangolo. Prendiamo una partizione equispaziata dell'intervallo $[a,b]$ in n intervallini di ampiezza $\frac{b-a}{n}$ cioè sia

$$x_h = a + h\,\frac{b-a}{n} \qquad h = 0, 1, 2, \dots n$$

tale che

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

e allo stesso modo prendiamo una partizione equispaziata dell'intervallo $[c, d]$ in n intervallini di ampiezza $\frac{d-c}{n}$ cioè sia

$$y_k = c + k\,\frac{d-c}{n} \qquad k = 0, 1, 2, \dots n$$

tale che

$$y_0 = c < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d.$$

Queste due partizioni inducono una partizione del rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ in n^2 rettangolini che denomineremo

$$I_{hk} = [x_{h-1}, x_h] \times [y_{k-1}, y_k], \qquad h, k = 1, 2, \dots, n$$

ciascuno di area

$$|I_{hk}| = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$$

Sia $\mathbf{p}_{hk}(x_{hk}, y_{hk})$ un generico punto appartenente al generico I_{hk} e consideriamo la somma di Cauchy-Riemann

$$s_n = \sum_{h,k=1}^{n} |I_{hk}|\, f(\mathbf{p}_{hk}). \tag{1.1.1}$$

Nella somma precedente ogni addendo è il prodotto dell'area del rettangolo I_{hk} per il valore che la funzione f assume sul punto $\mathbf{p}_{hk}$ scelto a caso in I_{hk} quindi rappresenta il volume del parallelepipedo di base I_{hk} e altezza $f(\mathbf{p}_{hk})$. La somma di Cauchy-Riemann rappresenta quindi il volume di una certa regione tridimensionale che all'infittirsi della partizione ci si aspetta approssimi sempre meglio la regione tridimensionale che sta tra il grafico di f e il piano xy.

❒ **Definizione 1.1.1.** Si dice che la funzione $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ limitata è INTEGRABILE nel rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ se esiste finito $\lim_{n\to\infty} s_n$ con s_n data da (1.1.1) e inoltre tale limite non dipende dalla scelta dei punti $\mathbf{p}_{hk}$. In tal caso tale limite si dice INTEGRALE DOPPIO di f su R e si indica con

$$\int\!\!\int_R f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{h,k=1}^{n} |I_{hk}|\, f(\mathbf{p}_{hk}).$$

☞ **Osservazione 1.1.2.** *Naturalmente come nel caso unidimensionale le variabili dentro il segno di integrazione sono mute, cioè ad esempio*

$$\int\!\!\int_R f(x, y)\, dx\, dy = \int\!\!\int_R f(u, v)\, du\, dv$$

Come già accennato, dunque, il significato geometrico dell'integrale doppio è quello di volume della regione tridimensionale compresa tra il grafico di f e il piano xy. Il problema ora è, in analogia al caso unidimensionale, cercare di individuare opportune classi di funzioni integrabili e poi trovare metodi per calcolare gli integrali doppi. Infatti è facile vedere che non tutte le funzioni sono integrabili, come mostra il prossimo esempio, che estende il caso unidimensionale.

✎ **Esempio 1.1.3.** *Consideriamo la funzione $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ così definita:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Se i punti $\mathbf{p}_{hk}$ sono scelti con prima coordinata tra i razionali, allora presa una partizione equispaziata del rettangolo $R := [0,1] \times [0,1]$ con rettangolini di area $\frac{1}{n^2}$ si ha

$$s_n = \sum_{h,k=1}^{n} |I_{hk}|\, f(\mathbf{p}_{hk}) = \sum_{h,k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{h,k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^2}\, n^2 = 1$$

mentre se i punti $\mathbf{p}_{hk}$ sono scelti con prima coordinata tra i reali non razionali allora $s_n = 0$. Quindi il limite dipende dalla scelta della partizione e perciò la funzione f non è integrabile.

Vale invece il seguente teorema.

Teorema 1.1.4. *Se $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ è continua allora è integrabile.*

Quindi abbiamo individuato una classe di funzioni integrabili. Poniamoci ora il problema di calcolare in maniera effettiva l'integrale doppio. L'idea è quella di ridurlo a integrali iterati. Infatti, dal significato geometrico di volume di una regione tridimensionale, sia $R = [a,b] \times [c,d]$; consideriamo un piano verticale parallelo all'asse delle x che taglierà questa regione tridimensionale in una regione piana (funzione della sola y!) di area data, supponiamo $A(y)$. A questo punto allora il volume totale della regione tridimensionale si ricostruirà integrando poi nella variabile y, per $y \in [c,d]$, cioè, indicando con V il volume di tale regione

$$V = \int_c^d A(y)\, dy.$$

Come si calcola l'area di $A(y)$? Essa è un'area di una regione bidimensionale e quindi si calcola per mezzo dell'integrale unidimensionale della funzione $x \mapsto f(x,y)$ con y fissato, cioè

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

e dunque riassumendo

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Si ha dunque il seguente teorema.

Teorema 1.1.5. (di riduzione dell'integrale doppio su un rettangolo a integrali iterati) *Sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua, allora il suo integrale doppio su $R := [a, b] \times [c, d]$ si può calcolare come integrale iterato nel modo seguente*

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Il significato del teorema precedente è che di fatto si può ridurre il calcolo di un integrale doppio su un rettangolo a quello di due integrali semplici, di una variabile, in sequenza. Mentre si fa il primo integrale naturalmente la variabile rispetto alla quale non si sta integrando va trattata come una costante.

✎ **Esempio 1.1.6.** *Si calcoli*

$$\int\int_{[0,1]\times[0,2]} y\, e^{xy}\, dx\, dy$$

Poniamo

$$I = \int\int_{[0,1]\times[0,2]} y\, e^{xy}\, dx\, dy.$$

Allora dal teorema di riduzione di un integrale doppio su un rettangolo a integrali iterati, si ha che

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 y\, e^{xy}\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 y\, e^{xy}\, dx \right) dy$$

Mostriamo attraverso questo semplice esempio come scegliere una strada oppure l'altra può non essere equivalente, in termini di semplicità di risoluzione dell'integrale stesso (rimane ovviamente equivalente ai fini del risultato finale).
Scegliamo dunque la prima via. Una primitiva di $y\, e^{xy}$ rispetto a y e tenendo x costante si può trovare integrando per parti, da cui

$$\int y\, e^{xy}\, dy = \frac{y\, e^{xy}}{x} - \frac{1}{x^2}\, e^{xy} + C$$

da cui

$$I = \int_0^1 \left[\frac{y}{x} e^{xy} - \frac{1}{x^2} e^{xy} \right]_0^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x} e^{2x} - \frac{1}{x^2} e^{2x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

Ora, saper calcolare $\int \frac{2}{x} e^{2x}\, dx$ è purtroppo tutt'altro che banale. Allora possiamo osservare che (di nuovo per parti nel primo termine e integrando immediatamente i terzo termine)

$$\int \left(\frac{2}{x} e^{2x} - \frac{1}{x^2} e^{2x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{2}{x} \frac{e^{2x}}{2} + \int \left(\frac{2}{x^2} \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{x^2} e^{2x} \right) dx - \frac{1}{x} + C = \frac{e^{2x} - 1}{x} + C$$

quindi (si tratta di un integrale generalizzato convergente)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{2}{x}e^{2x} - \frac{1}{x^2}e^{2x} + \frac{1}{x^2}\right) dx &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{2}{x}e^{2x} - \frac{1}{x^2}e^{2x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{e^{2x}-1}{x}\right]_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^2-1}{1} - \frac{e^{2\varepsilon}-1}{2\varepsilon}2 = e^2 - 1 - 2 = e^2 - 3.\end{aligned}$$

Adesso calcoliamo l'integrale di partenza attraverso l'altra via. Si ha in maniera molto più immediata

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^1 y\, e^{xy}\, dx\right) dy = \int_0^2 [e^{xy}]_0^1\, dy = \int_0^2 (e^y - 1)\, dy = [e^y - y]_0^2 = e^2 - 1 - 2 = e^2 - 3$$

☞ **Osservazione 1.1.7.** (funzioni a variabili separate) Quando si integra su un rettangolo una funzione prodotto di due funzioni ciascuna in una sola delle 2 variabili, per esempio $f(x)\, g(y)$ allora è facile vedere che l'integrale doppio si calcola come prodotto di due integrali unidimensionali, ossia

$$\begin{aligned}\int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x)\, g(y)\, dx\, dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x)\, g(y)\, dy\right) dx = \int_a^b f(x) \left(\int_c^d g(y)\, dy\right) dx \\ &= \left(\int_c^d g(y)\, dy\right)\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\end{aligned}$$

e analogamente per l'altra integrazione.

✎ **Esempio 1.1.8.** *Si calcoli*

$$\int\int_{[0,1]\times[0,2]} y\, e^x\, dx\, dy$$

Si ha

$$\int\int_{[0,1]\times[0,2]} y\, e^x\, dx\, dy = \left(\int_0^1 e^x\, dx\right)\left(\int_0^2 y\, dy\right) = [e^x]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 2\,(e-1).$$

1.1.2. Funzioni integrabili su domini non rettangolari

Sia ora f definita non più su un rettangolo ma su Ω insieme qualunque del piano. Ci poniamo il problema di capire come definire l'integrale doppio di f su Ω.
Si potrebbe pensare di considerare un rettangolo $R \supseteq \Omega$ e calcolare

$$\int\int_R \tilde{f}\, dx\, dy$$

dove $\tilde{f}$ coincide con f in Ω e vale 0 fuori da Ω. Tuttavia, in generale, senza nessuna ipotesi di continuità su Ω, f non risulterà integrabile, nemmeno se continua e limitata, come mostra il prossimo esempio.

✎ **Esempio 1.1.9.** *Sia*

$$\Omega := \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : \, x \in \mathbb{Q}\}$$

e si consideri

$$\int\int_{\Omega} 1 \, dx \, dy.$$

Allora estendendo la funzione integranda (che è costantemente uguale a 1) a zero fuori da Ω otteniamo la stessa funzione del primo esempio del capitolo, che sappiamo già non essere integrabile.

Sulla base di questo semplice esempio (si noti che la funzione costante 1 è continua e limitata!) ci si convince che occorre individuare condizioni sul dominio Ω che garantiscano l'integrabilità (almeno) di una funzione continua e limitata. In questo capitolo analizzeremo alcune classi di insiemi che soddisfano i nostri requisiti: insiemi semplici, regolari e misurabili.

Insiemi semplici e regolari

❒ **Definizione 1.1.10.** Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice y-SEMPLICE se è del tipo

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \in [a,b], \; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue.

Geometricamente un insieme y-semplice è tale che se si taglia E con una retta del tipo $x = c$ con $c \in [a,b]$, si ottiene un segmento che varia con continuità al variare della retta.

❒ **Definizione 1.1.11.** Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice x-SEMPLICE se è del tipo

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y \in [c,d], \; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

con $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ funzioni continue.

Geometricamente un insieme x-semplice è tale che se si taglia E con una retta del tipo $y = k$ con $k \in [c,d]$, si ottiene un segmento che varia con continuità al variare della retta.

❒ **Definizione 1.1.12.** Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice SEMPLICE se è y-semplice e x-semplice; si dice REGOLARE se è unione di un numero finito di insiemi semplici.

✎ **Esempio 1.1.13.** *I rettangoli e i quadrati sono domini sia x-semplici che y-semplici; i triangoli sono domini semplici (al massimo se nessuno dei lati è parallelo agli assi sono domini regolari). L'insieme*

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \;\; \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$$

è sia x-semplice che y-semplice.
L'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ |x| \leq y\}$$

non è un dominio né y-semplice né x-semplice, ma può essere decomposto in domini semplici (dunque è regolare).

☞ **Osservazione 1.1.14.** Un insieme semplice per definizione è anche chiuso e limitato, quindi lo stesso vale per un insieme regolare. In particolare una funzione definita su un insieme regolare, dal Teorema di Weierstrass, ha sempre massimo e minimo, dunque è limitata.

Vale il seguente importante teorema.

Teorema 1.1.15. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile in Ω.*

Insiemi misurabili

Abbiamo visto che il significato geometrico dell'integrale doppio è quello di rappresentare il volume del "sottografico" di una superficie cioè il volume della parte di spazio compresa tra il grafico di f e il piano xy. D'altra parte il concetto di integrale doppio permette anche di dare senso al concetto di AREA di una figura piana.

❒ **Definizione 1.1.16.** (INSIEME MISURABILE) Un insieme limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice MISURABILE (SECONDO PEANO-JORDAN) se la funzione costante 1 è integrabile in Ω. In tal caso chiameremo MISURA (O AREA) di Ω (e la denoteremo con $|\Omega|$) il numero

$$|\Omega| = \int\int_{\Omega} 1 \, dx \, dy.$$

Per i risultati precedenti, ogni insieme regolare è misurabile (perché la funzione costante 1 è continua); tuttavia come mostrato in precedenza esistono anche insiemi non misurabili.

1.1.3. Proprietà dell'integrale doppio

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile. Siano f e g integrabili su Ω e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà dell'integrale doppio.
1) LINEARITÀ DELL'INTEGRALE

$$\int\int_{\Omega} [f(x, y) + g(x, y)] \, dx \, dy = \int\int_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy + \int\int_{\Omega} g(x, y) \, dx \, dy$$

$$\int\int_\Omega c\, f(x,y)\,dx\,dy = c\int\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\int\int_\Omega c\,dx\,dy = c|\Omega|$$

2) positività e monotonia

$$f \geq 0 \text{ in } \Omega \;\Rightarrow\; \int\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$$

$$f \geq g \text{ in } \Omega \;\Rightarrow\; \int\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \geq \int\int_\Omega g(x,y)\,dx\,dy$$

$$|f(x,y)| \leq c \;\Rightarrow\; \left|\int\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy\right| \leq \int\int_\Omega |f(x,y)|\,dx\,dy \leq c\,|\Omega|$$

Valgono altre proprietà di additività e monotonia dell'integrale rispetto al dominio di integrazione; valgono altresì diverse proprietà dell'integrale nel caso specifico di funzioni continue.

1.1.4. Calcolo degli integrali doppi: metodo di riduzione

Vale il seguente importante teorema.

Teorema 1.1.17. (riduzione per domini semplici) *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia Ω un dominio x-semplice, cioè*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; y \in [c,d],\; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

con $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora l'integrale doppio

$$\int\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Analogamente se Ω un dominio y-semplice, cioè

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; x \in [a,b],\; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora l'integrale doppio

$$\int\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Se Ω è sia x-semplice che y-semplice, valgono entrambe le formule.

✎ **Esempio 1.1.18.** *Si calcoli*

$$\int\int_A 2x\,dx\,dy$$

con

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}$$

Il dominio A è, per esempio, y-semplice. Allora possiamo riscriverlo come

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 1, \; \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right\}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int\int_A 2x\,dx\,dy &= \int_0^1 2x \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dy = \int_0^1 2x\,dx \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \int_0^1 2x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx - \sqrt{3}\int_0^1 x\,dx = -\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{3/2} \frac{2}{3}\,4\Bigg|_0^1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2\Bigg|_0^1 \\
&= -\frac{8}{3}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} - 1\right] - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

✎ **Esempio 1.1.19.** *Calcolare l'area dell'insieme*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x \leq y \leq \frac{x}{3}, \; x \leq 0, \; y \geq -x - 3\right\}$$

La figura descritta dall'insieme E è un triangolo delimitato dalle rette

$$r_1 : y = 3x \qquad r_2 : y = \frac{x}{3} \qquad r_3 : y = -x - 3$$

L'insieme non è né x-semplice né y-semplice ma è regolare, quindi può essere decomponibile in domini semplici. Per esempio: decomponiamolo in domini y-semplici. Ad esempio si ha $E = E_1 \cup E_2$ con

$$E_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x - 3 \leq y \leq \frac{x}{3}, \; -\frac{9}{4} \leq x \leq -\frac{3}{4}\right\}$$

e

$$E_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x \leq y \leq \frac{x}{3}, \; -\frac{3}{4} \leq x \leq 0\right\}$$

Allora

$$\begin{aligned}
|E| &= \int\int_E 1\,dx\,dy = \int_{-9/4}^{-3/4} \left(\int_{-x-3}^{x/3} dy\right) dx + \int_{-3/4}^{0} \left(\int_{3x}^{x/3} dy\right) dx \\
&= \int_{-9/4}^{-3/4} \left(\frac{x}{3} + x + 3\right) dx + \int_{-3/4}^{0} \left(\frac{x}{3} - 3x\right) dx = \frac{4}{3}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-9/4}^{-3/4} + 3x\Bigg|_{-9/4}^{-3/4} - \frac{8}{3}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-3/4}^{0} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{16} - \frac{81}{16}\right) + 3\left(-\frac{3}{4} + \frac{9}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(-\frac{9}{16}\right) = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Supponiamo ora di volerlo decomporre in domini x-semplici. In tal caso si può vedere ad esempio $E = E_3 \cup E_4$ con

$$E_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y - 3 \leq x \leq \frac{y}{3},\ -\frac{9}{4} \leq y \leq -\frac{3}{4} \right\}$$

e

$$E_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y \leq x \leq \frac{y}{3},\ -\frac{3}{4} \leq y \leq 0 \right\}$$

allora

$$|E| = \int\int_E 1\, dx\, dy = \int_{-9/4}^{-3/4} \left(\int_{-y-3}^{y/3} dx \right) dy + \int_{-3/4}^{0} \left(\int_{3y}^{y/3} dx \right) dy$$

che non è altro che l'integrale di prima con le variabili scambiate.

1.1.5. Calcolo degli integrali doppi: cambiamento di variabili

Abbiamo visto nel caso unidimensionale la formula di cambiamento di variabili per gli integrali

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt$$

con $x = \phi(t)$ derivabile e monotona, da $\phi^{-1}([a, b]) \to [a, b]$.
Il procedimento analogo nel caso di due dimensioni consiste nell'effettuare una *trasformazione di coordinate* nel piano (più precisamente un diffeomorfismo globale, come abbiamo introdotto nel paragrafo relativo).
Sia dunque da calcolare

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy$$

e sia $\mathbf{T} : D' \to D$ una trasformazione di coordinate tale che $(x, y) = \mathbf{T}(u, v)$ cioè che trasforma le nuove coordinate nelle vecchie, dove

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

In questo modo $f(x, y)$ diventa $f(g(u, v), h(u, v))$. Il problema è: come si trasforma l'integrale doppio? Qual è l'analogo bidimensionale per il termine $\phi'(t)$?

La risposta è data dal seguente teorema.

Teorema 1.1.20. (formula di cambiamento di variabili) *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio regolare, $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e $\mathbf{T} : D' \to D$ una trasformazione di coordinate, più precisamente un diffeomorfismo globale tra D e D', con $(x, y) = \mathbf{T}(u, v)$ e*

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

Allora

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{D'} f(g(u, v), h(u, v))\, |\det \mathbf{JT}(u, v)|\, du\, dv$$

dove

$$\mathbf{JT}(u, v) = \begin{pmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$$

indica la matrice Jacobiana della trasformazione. I punti singolari della trasformazione costituiscono un insieme di misura nulla.

❐ **Definizione 1.1.21.** Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione $\mathbf{T}$ tale che $(x, y) = \mathbf{T}(u, v)$ si dice jacobiano della trasformazione e si indica per esempio con la notazione $J_{\mathbf{T}}$.

☞ **Osservazione 1.1.22.** Si può dimostrare che se $\mathbf{T}$ è una trasformazione di coordinate tale che $(x, y) = \mathbf{T}(u, v)$ e $\mathbf{T}^{-1}$ è la trasformazione inversa, cioè tale che $(u, v) = \mathbf{T}^{-1}(x, y)$, allora si ha che

$$\mathbf{JT}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}$$

cioè le matrici Jacobiane associate a trasformazioni inverse sono l'una l'inversa dell'altra. Questo avrà importanti conseguenze, come mostra l'Osservazione 1.1.25.

✎ **Esempio 1.1.23.** *Si calcoli l'integrale doppio*

$$\int\int_D (y^2 + 1)\, dx\, dy,$$

ove D è la parte dell'ellisse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4\,y^2 \leq 1\}$ contenuta nel secondo quadrante.

Descriviamo l'ellisse attraverso il seguente cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \dfrac{1}{2}\rho \sin\theta \end{cases}$$

con le seguenti limitazioni per le variabili ρ e θ

$$0 \leq \rho \leq 1 \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Calcoliamo il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione. Si ha

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \dfrac{1}{2}\sin\theta & \dfrac{1}{2}\rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det J = \frac{1}{2}\rho\cos^2\theta + \frac{1}{2}\rho\sin^2\theta = \frac{1}{2}\rho.$$

Quindi

$$\int\int_D (y^2+1)\,dx\,dy = \int_0^1 d\rho \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\, \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{4}\rho^2\sin^2\theta + 1\right) = \frac{1}{8}\left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \rho\,d\rho\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\right) = \frac{1}{8}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1\theta\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{128} + \frac{\pi}{8} = \frac{17}{128}\pi.$$

✎ **Esempio 1.1.24.** (trasformazione più generale) *Si calcoli*

$$\int\int_E x\,y\,dx\,dy$$

dove E è l'insieme delimitato dalle curve

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = \frac{2}{x} \qquad y = \frac{1}{x^2} \qquad y = \frac{2}{x^2}$$

L'insieme E può essere convenientemente descritto nel seguente modo

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2,\ 1 < x^2 y < 2\}$$

È dunque naturale pensare di operare il seguente cambiamento di coordinate per ridurre l'insieme E (che non è semplice anche se a fatica può essere descritto come unione di insiemi semplici) ad un rettangolo

$$\begin{cases} xy = u \\ x^2 y = v \end{cases}$$

da cui si deduce

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{u} \\ y = \dfrac{u^2}{v} \end{cases}$$

A questo punto la matrice Jacobiana della trasformazione diventa

$$\mathbf{JT}(u,v) = \begin{pmatrix} -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \\ \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2} \end{pmatrix}$$

quindi

$$\det\mathbf{JT} = -\frac{1}{v}$$

e quindi il modulo del determinante della matrice Jacobiana è

$$|\det\mathbf{JT}| = \frac{1}{v}$$

(essendo $v \geq 0$ visto che siamo in E e dunque si ha $1 < v < 2$).
Concludendo dunque

$$\int\int_E x\,y\,dx\,dy = \int_1^2 u\,du \int_1^2 \frac{1}{v}\,dv = \left.\frac{u^2}{2}\right|_1^2 \left.\log v\right|_1^2 = \frac{3}{2}\log 2$$

☞ **Osservazione 1.1.25.** Dall'Osservazione 1.1.22 e dal Teorema di Binet, possiamo concludere che

$$J_{\mathbf{T}} = \det\mathbf{JT} = \frac{1}{\det\mathbf{JT}^{-1}} = \frac{1}{J_{\mathbf{T}^{-1}}}.$$

I calcoli possono essere quindi semplificati, come mostra il prossimo esercizio.

✎ **Esempio 1.1.26.** *Calcolare l'area della regione piana compresa nel primo quadrante e limitata dalle curve $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$, $xy^3 = 15$. Per disegnare il dominio si consiglia di confrontare preventivamente i grafici di $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; per calcolare l'integrale doppio si consiglia di eseguire un cambiamento di variabili.*

Il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = xy \\ v = xy^3 \end{cases}$$

trasforma il dominio dato nel rettangolo $R = \{(u,v) : 4 \leq u \leq 8,\ \ 5 \leq v \leq 15\}$. La trasformazione che ci serve per la sostituzione delle variabili nell'integrale doppio è l'inversa di questa (e ci permetterà di esprimere x e y in funzione di u e v), ma dall'Osservazione 1.1.25 possiamo semplicemente calcolare

$$\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{bmatrix} = 2xy^3 = 2v$$

da cui
$$|J_{\mathbf{T}}| = \frac{1}{2v}.$$
Di conseguenza l'integrale cercato risulta
$$\int\int_D 1\, dx\, dy = \int\int_R |J_{\mathbf{T}}|\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_4^8 du \int_5^{15} \frac{dv}{v} = 2\log 3.$$

✎ **Esempio 1.1.27.** (coordinate polari per domini generali) *Calcolare il volume del cilindroide a generatrici verticali determinato dalla funzione*
$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$
avente per base il trapezio compreso tra le rette $x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=x$.
Eseguire l'integrazione una prima volta in coordinate cartesiane e poi in coordinate polari, confrontando il risultato.

La funzione integranda è sempre positiva o nulla; il trapezio di base può essere espresso nel seguente modo:
$$T = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\}$$
dunque il volume richiesto vale
$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \int_0^x \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_1^2 \int_0^x \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\, dy\, dx \\ &= \int_1^2 x\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]_0^x dy\, dx = \int_1^2 x\arctan 1\, dx \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$
Alternativamente, usando le coordinate polari, si ha
$$T = \left\{(\rho,\theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\cos\theta} \le \rho \le \frac{2}{\cos\theta}\right\}$$
dove, per trovare le limitazioni su ρ è sufficiente sostituire le espressioni delle coordinate polari nelle rette $x=1$ e $x=2$. A questo punto il volume richiesto diventa
$$V = \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \rho\frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\, \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{3}{2}\, d\theta = \frac{3}{8}\pi.$$

✎ **Esempio 1.1.28.** *Calcolare il volume del solido delimitato dal grafico di $f(x,y) = 2x$, dal piano $z=0$ e dalle condizioni*
$$x \ge 0,\ y \ge \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1.$$

La richiesta coincide con il calcolo dell'integrale doppio

$$\int\!\!\int_A 2x\,dx\,dy,$$

dove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ \ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}.$$

A questo punto si può procedere come nell'Esempio 1.1.18; oppure alternativamente, possiamo risolvere l'esercizio usando le coordinate polari. Data la simmetria del problema usiamo il seguente cambio di coordinate

$$x = 2\rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta.$$

Allora il dominio A si trasforma nel seguente dominio

$$T = \left\{(\rho,\theta) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta} \leq \rho \leq 1\right\}$$

dove la limitazione su ρ si è ottenuta sostituendo

$$y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow\ \rho\sin\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A questo punto allora, ricordando che il modulo del determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è 2ρ si ottiene che l'integrale di partenza coincide con il seguente integrale doppio

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}}^{1} 4\rho\cos\theta(2\rho)\,d\rho\,d\theta \\
=\ &\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos\theta\left[\frac{8}{3}\rho^3\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}}^{1} d\theta \\
=\ &\frac{8}{3}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos\theta\left[1 - \frac{3\sqrt{3}}{8\sin^3\theta}\right] d\theta \\
=\ &\frac{8}{3}[\sin\theta]_{\pi/3}^{\pi/2} - \sqrt{3}\left[\frac{\sin^{-2}\theta}{-2}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} \\
=\ &\frac{8}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[1 - \frac{4}{3}\right] = \frac{8}{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

1.2. Integrali doppi: esercizi svolti

1.2.1. Riduzione per domini semplici e regolari

✍ **Esercizio 1.2.1.**

Calcolate l'integrale di $3xy^2 + x^2y$ *sul rettangolo* $[1,3] \times [0,1]$.

SOLUZIONE. Il dominio è sia $x-$semplice che $y-$semplice. Si ha dunque

$$I = \int_1^3 \left(\int_0^1 (3x\, y^2 + x^2\, y)\, dy \right) dx = \int_1^3 \left[3\, x\, \frac{y^3}{3} + x^2\, \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_1^3 \left(x + \frac{x^2}{2} \right) dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_1^3 = \frac{9}{2} + \frac{27}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{25}{3}.$$

✍ **Esercizio 1.2.2.**

Si calcoli l'integrale della funzione $f(x,y) = x^2\, y$ esteso al triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$.

Sia T il triangolo dato dal problema. Il dominio T è sia $x-$semplice che $y-$semplice. Ad esempio può essere descritto nel modo seguente

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le \pi \ \vee \ 0 \le y \le \pi - x\}$$

allora

$$\int_T x^2\, y\, dx\, dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\pi - x} dy\, x^2\, y = \int_0^\pi x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\pi - x} = \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 (\pi - x)^2\, dx$$
$$= \frac{\pi^2}{2} \int_0^\pi x^2\, dx - \pi \int_0^\pi x^3\, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi x^4\, dx = \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\pi - \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^\pi$$
$$= \frac{\pi^5}{6} - \frac{\pi^5}{4} + \frac{\pi^5}{10} = \frac{\pi^5}{60}.$$

✍ **Esercizio 1.2.3.**

Calcolare

$$\int \int_E f(x,y) dx dy,$$

dove $f(x,y) = x + y$ e

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ y \ge 0 \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ xy \ge 0 \right\}.$$

Osserviamo che E non è semplice, però è regolare. Infatti, detti

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2+y^2 \le 4, \ x, y \ge 0\} \\ E_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2+y^2 \le 4, \ y \ge 0, \ x \le 0\} \\ E_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2+y^2 \le 4, \ x, y \le 0\}, \end{aligned}$$

allora possiamo scrivere $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, e poiché questi tre insiemi sono x-semplici, abbiamo che E è regolare.
Inoltre, E_1, E_2 e E_3 si intersecano vicendevolmente solo sul bordo (quindi $E_i \cap E_j$ ha area nulla). Perciò, grazie a una proprietà dell'integrale doppio,

$$\int\int_E f(x,y)dxdy \ = \ \int\int_{E_1} f(x,y)dxdy \ + \ \int\int_{E_2} f(x,y)dxdy \ + \ \int\int_{E_3} f(x,y)dxdy.$$

Notiamo subito che, per simmetria,

$$\int\int_{E_1} f(x,y)dxdy \ = \ -\int\int_{E_3} f(x,y)dxdy \ :$$

infatti, E_1 ed E_3 sono simmetrici rispetto all'origine, mentre f è dispari; ovvero:

$$\begin{gathered} (x,y) \in E_1 \Leftrightarrow (-x,-y) \in E_3 \\ f(x,y) = -f(-x,-y). \end{gathered}$$

Ne consegue che i due integrali sono opposti. Perciò è sufficiente calcolare

$$\int\int_E f(x,y)dxdy \ = \ \int\int_{E_2} f(x,y)dxdy.$$

Per calcolare l'integrale su E_2 scomponiamo ulteriormente questo dominio in $E_2 = E_2' \cup E_2''$, dove

$$\begin{aligned} E_2' &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -2 \le x \le -1, \ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\} \\ E_2'' &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le x \le 0, \ \sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}. \end{aligned}$$

A loro volta questi due insiemi sono semplici e si intersecano solo sul bordo; quindi

$$\int\int_{E_2} f(x,y)dxdy \ = \ \int\int_{E_2'} f(x,y)dxdy \ + \ \int\int_{E_2''} f(x,y)dxdy.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\int\int_{E_2'} f(x,y)dxdy &= \int_{-2}^{-1}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(x+y)dydx\\
&=\int_{-2}^{-1}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}}dx\\
&=\int_{-2}^{-1}\left(x\sqrt{4-x^2}+\frac{4-x^2}{2}\right)dx\\
&=\left(-\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}+2x-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{-1}\\
&=\frac{5}{6}-\sqrt{3},
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
\int\int_{E_2''} f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x+y)dydx\\
&=\int_{-1}^{0}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx\\
&=\int_{-1}^{0}\left(x\sqrt{4-x^2}-x\sqrt{1-x^2}+\frac{4-x^2-1+x^2}{2}\right)dx\\
&=\left(-\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+\frac{3}{2}x\right)\Big|_{-1}^{0}\\
&=\sqrt{3}-\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int\int_E f(x,y)dxdy = \int\int_{E_2} f(x,y)dxdy = \int\int_{E_2'} f(x,y)dxdy + \int\int_{E_2''} f(x,y)dxdy = 0.$$

N.B.: alternativamente si poteva pensare di descrivere E_2 attraverso le coordinate polari. Si avrebbe

$$E_2 = \left\{(\rho,\theta) : 1 \le \rho \le 2,\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\right\}.$$

Dunque (molto più brevemente!) si avrebbe

$$\begin{aligned}
\int\int_{E_2} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)\,d\rho\,d\theta \\
&= \int_1^2 \rho^2\,d\rho \int_{\pi/2}^{\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta \\
&= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 [(\sin\theta-\cos\theta)]_{\pi/2}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.4.**

> Si calcoli l'integrale della funzione $f(x,y) = x^3y - e^{x+y}y$ esteso al triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,\pi)$ $(2\pi,0)$.

Il triangolo dato dal problema (che d'ora in poi chiameremo T) può essere visto come dominio $x-$semplice o $y-$semplice. Si ha

$$\int\int_T (x^3\,y - e^{x+y}\,y)\,dx\,dy = I + II.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} dx \int_0^{-\frac{1}{2}x+\pi} x^3\,y\,dy = \int_0^{2\pi} x^3\,dx \int_0^{\pi-\frac{1}{2}x} y\,dy = \int_0^{2\pi} x^3\,dx \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\pi-\frac{1}{2}x} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^3\left(\pi-\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^3\left[\pi^2 - \pi\,x + \frac{1}{4}x^2\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\pi^2\,x^3 - \pi\,x^4 + \frac{1}{4}x^5)\,dx = \frac{1}{2}\pi^2\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{\pi}{2}\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{8}\frac{x^6}{6}\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{8}16\,\pi^4 - \frac{\pi}{10}32\,\pi^5 + \frac{1}{8}\frac{1}{6}64\,\pi^6 = \pi^6\left[2 - \frac{16}{5} + \frac{4}{3}\right] = \frac{2}{15}\pi^6.
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$II = -\int\int_T e^{x+y}\,y\,dx\,dy = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi-\frac{1}{2}x} e^x\,e^y\,y\,dy\,dx = -\int_0^{2\pi} e^x\left\{[y\,e^y]\Big|_0^{\pi-\frac{1}{2}x} - [e^y]\Big|_0^{\pi-\frac{1}{2}x}\right\}$$

$$= -\int_0^{2\pi} e^x\,[(y-1)\,e^y]\Big|_0^{\pi-\frac{1}{2}x} = -\int_0^{2\pi} e^x\left\{\left[\pi-\frac{1}{2}x-1\right]\,e^{\pi-\frac{1}{2}x}+1\right\}$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(e^{x+\pi-\frac{1}{2}x}\left(\pi-\frac{1}{2}x-1\right)+e^x\right)dx = -(\pi-1)\int_0^{2\pi} e^{\pi+\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{\pi+\frac{1}{2}x}\,x\,dx - \int_0^{2\pi} e^x\,dx = -(\pi-1)\,e^\pi\,2\,e^{\frac{1}{2}x}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\,e^\pi\,[2(x-2)\,e^{\frac{1}{2}x}]\Big|_0^{2\pi}$$

$$-[e^x]\Big|_0^{2\pi} = -2\,(\pi-1)\,e^\pi\,(e^\pi-1) + e^\pi\,[(2\,\pi-2)\,e^\pi+2] - e^{2\pi}+1 = -e^{2\pi}+2\,\pi\,e^\pi+1.$$

I conti risultato più semplici se vediamo II come integrale su un dominio $x-$semplice. Si ha infatti

$$-\int\int_T e^{x+y}y\,dx\,dy = -\int_0^\pi\int_0^{2(\pi-y)} e^x\,e^y\,y\,dx\,dy = -e^{2\pi}\int_0^\pi e^{-y}\,y\,dy + [(y-1)\,e^y]\Big|_0^\pi$$

$$= -\,e^{2\pi}\,[-(y+1)\,e^{-y}]\Big|_0^\pi + (\pi-1)\,e^\pi+1 = e^{2\pi}\,[(\pi+1)\,e^{-\pi}-1] + (\pi-1)\,e^\pi+1$$

$$= -\,e^{2\pi}+2\,\pi\,e^\pi+1.$$

Quindi riassumendo

$$\int\int_T (x^3y - e^{x+y}y)\,dx\,dy = \frac{2}{15}\,\pi^6 - e^{2\pi}+2\,\pi\,e^\pi+1.$$

✍ **Esercizio 1.2.5.**

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} y\sin(xy)\,dx\,dy$$

Si ha

$$\iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} y\sin(xy)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 y\sin(xy)\,dx\right)dy = \int_0^{\pi/2}[-\cos(xy)]_0^1\,dy$$

$$= \int_0^{\pi/2}(-\cos y+1)\,dy = [-\sin y+y]_0^{\pi/2} = -1+\frac{\pi}{2}.$$

✍ **Esercizio 1.2.6.**

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_T (x + \sin y)\, dx\, dy$$

con

$$T = \{(x, y) : 0 < x < 1;\ 0 < y < 1 - x\}.$$

Il triangolo T è un dominio sia $x-$semplice che $y-$semplice. Interpretandolo come dominio $y-$semplice si ottiene

$$\iint_T (x + \sin y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x + \sin y)\, dy \right) dx = \int_0^1 x\, dx \int_0^{1-x} 1\, dy$$
$$+ \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \sin y\, dy \right) dx = \int_0^1 x(1 - x)\, dx + \int_0^1 [-\cos y]_0^{1-x}\, dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$
$$+ \int_0^1 [-\cos(1 - x) + 1]\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + [\sin(1 - x)]_0^1 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \sin 1 + 1 = \frac{7}{6} - \sin 1$$

✍ **Esercizio 1.2.7.**

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xy}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

In questo caso la funzione non è continua fino al bordo del quadrato - nell'origine è discontinua - tuttavia è limitata (perché?) e integrabile.

Si ha

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xy}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 x \left(\int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \right]_0^1 dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\log(x^2 + 1) - \log x^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]_0^1$$
$$-\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3} \right) dx = \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{4} [\log(x^2 + 1)]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} \log 2 = \log \sqrt{2}.$$

✍ **Esercizio 1.2.8.**

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^y \, dx \, dy$$

Vale la stessa osservazione dell'esercizio precedente. Si provi qui a calcolare l'integrale iterando nei due ordini diversi.

Integrando prima nella variabile x e poi nella variabile y si ottiene

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^y \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right] dy = \log 2.$$

Scambiando l'ordine di integrazione si deduce invece

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^y \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\log x} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x-1}{\log x} \, dx$$

che non si riesce ad esprimere in termini di funzioni elementari.

✍ **Esercizio 1.2.9.**

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_{[0,1]\times[0,\pi]} x \sin y \, dx \, dy$$

Si ha

$$\iint_{[0,1]\times[0,\pi]} x \sin y \, dx \, dy = \int_0^1 x \int_0^\pi \sin y \, dy \, dx = \int_0^1 x \, dx [-\cos y]_0^\pi = 2 \int_0^1 x \, dx = [x^2]_0^1 = 1.$$

✍ **Esercizio 1.2.10.**

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_{\{(x,y):0<x<1,\ 0<y<x\}} x \sin y \, dx \, dy$$

Si ha

$$\begin{aligned}
&\iint_{\{(x,y):0<x<1,\ 0<y<x\}} x \sin y \, dx \, dy = \int_0^1 x[-\cos y]_0^x \, dx = \int_0^1 x(1-\cos x)\, dx \\
= &\int_0^1 x - \int_0^1 x \, \cos x \, dx = \frac{1}{2} - \left\{ [x \sin x]_0^1 - \int_0^1 \sin x \, dx \right\} \\
= &\frac{1}{2} - \sin 1 - [-\cos x]_0^1 = \frac{1}{2} - \sin 1 + \cos 1 + 1 = \frac{3}{2} + \cos 1 - \sin 1.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.11.**

> Calcolare il seguente integrale doppio come integrale iterato opportuno oppure mediante opportune considerazioni di simmetria
>
> $$\iint_Q y \, dx \, dy$$
>
> dove Q è il quadrilatero di vertici $(0,1), (1,2), (2,1), (2,0)$.

Il quadrilatero Q è composto dal triangolo D_1 limitato dalle rette $y = x+1$, $y = -x+3$, $y = 1$ e dal triangolo D_2 limitato dalle rette $y = 1$, $x = 2$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Quindi l'integrale dato si scompone nella somma dell'integrale di y su D_1 e di quello su D_2. Possiamo vedere D_1 come dominio $x-$semplice e D_2 come dominio $y-$semplice, cioè

$$D_1 := \{(x,y) : 1 \le y \le 2, \ \ y-1 \le x \le 3-y\} \qquad D_2 := \left\{(x,y) : 0 \le x \le 2, \ 1 - \frac{1}{2}x \le y \le 1\right\}$$

dunque

$$\iint_{D_1} y \, dx \, dy = \int_1^2 y \int_{y-1}^{3-y} 1 \, dx = \int_1^2 (4y - 2y^2)\, dy = [2y^2]_1^2 - \frac{2}{3}[y^3]_1^2 = \frac{4}{3}.$$

D'altra parte

$$\iint_{D_2} y \, dx \, dy = \int_0^2 \int_{1-\frac{x}{2}}^1 y \, dy \, dx = \int_0^2 \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}x)^2}{2} = \int_0^2 x - \frac{x^2}{4} \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

Alternativamente, volendo descrivere D_2 come dominio $x-$semplice

$$D_2 := \{(x,y) : 0 \le y \le 1, \ 2 - 2y \le x \le 2\}$$

e

$$\iint_{D_2} y \, dx \, dy = \int_0^1 y \, dy \int_{2-2y}^2 \, dx = \int_0^1 2y^2 \, dy = \frac{2}{3}.$$

✍ **Esercizio 1.2.12.**

Calcolare
$$\iint_R xe^{\sqrt{y}}\,dx\,dy$$
dove
$$R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le x^2\}.$$

Si ha
$$\begin{aligned}\iint_R xe^{\sqrt{y}}\,dx\,dy &= \int_0^1 x\left(\int_0^{x^2} e^{\sqrt{y}}\,dy\right)dx = \int_0^1 x\left[2\sqrt{y}e^{\sqrt{y}}\right]_0^{x^2}dx\\ &= 2\int_0^1 x^2e^x\,dx = 2[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x]_0^1 = 2(e-2).\end{aligned}$$
dove abbiamo usato il fatto che
$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

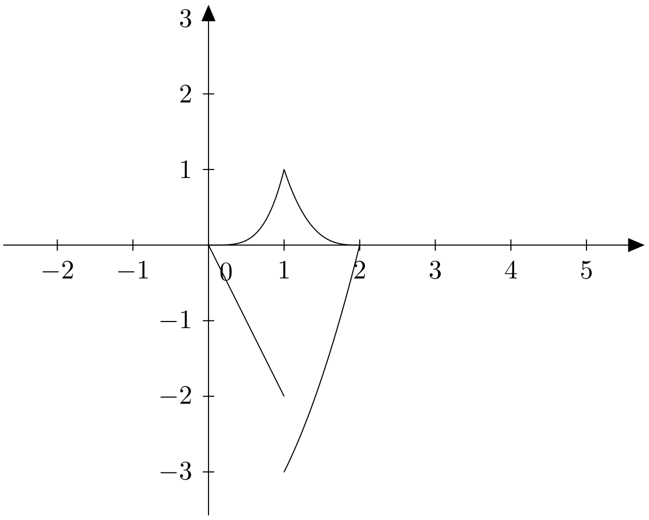
✍ **Esercizio 1.2.13.**

Sia $z = f(x,y)$ una funzione continua positiva definita per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e sia D un dominio tale che
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_{-2x}^{x^4} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx\int_{x^2-4}^{(2-x)^3} f(x,y)\,dy.$$
Disegnare il dominio D nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ ed esprimere
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$
scambiando l'ordine di integrazione.

In figura si osservi il dominio D, che può essere visto come unione di due domini $y-$semplici:
$$\begin{aligned}D_1 &:= \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ -2x \le y \le x^4\}\\ D_2 &:= \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ x^2-4 \le y \le (2-x)^3\}\end{aligned}$$

oppure come unione di 3 domini $x-$semplici:

$$
\begin{aligned}
E_1 &:= \{(x,y) : -3 \le y \le -2,\ 1 \le x \le \sqrt{y+4}\} \\
E_2 &:= \left\{(x,y) : -2 \le y \le 0,\ -\frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y+4}\right\} \\
E_3 &:= \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ \sqrt[4]{y} \le x \le 2 - \sqrt[3]{y}\}.
\end{aligned}
$$



Quindi scambiando l'ordine di integrazione si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int\!\!\int_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-3}^{-2} dy \int_1^{\sqrt{y+4}} f(x,y)\,dx + \int_{-2}^{0} dy \int_{-y/2}^{\sqrt{y+4}} f(x,y)\,dx \\
&+ \int_0^1 dy \int_{\sqrt[4]{y}}^{2-\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx.
\end{aligned}
$$

✍ **Esercizio 1.2.14.**

Calcolare

$$I = \int\!\!\int_D |x-y|\,dx\,dy$$

dove

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1; x^2 \le y \le 1\}.$$

Si ha

$$I = \int\!\!\int_{D_1} (y-x)\,dx\,dy + \int\!\!\int_{D_2} (x-y)\,dx\,dy$$

dove

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}; \qquad D_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1} (y-x)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (x-y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \int_x^1 (y-x)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_{x^2}^x (x-y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - xy\right]_x^1 dx + \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{2} + x^2\right) dx + \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{11}{60}.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.15.**

Sia $z = f(x,y)$ una superficie definita per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e positiva. T è un dominio per cui risulta

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-x^2/4}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{1/4-1/(2x)}^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

Scrivere $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ con un diverso ordine delle variabili di integrazione.

Si ha

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{y^3}^{2-y} f(x,y)\,dx + \int_{-1/4}^0 dy \int_{\sqrt{-4y}}^{2/(1-4y)} f(x,y)\,dx.$$

1.2.2. Cambiamenti di coordinate

✍ **Esercizio 1.2.16.**

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_D (x^2+1)\,dx\,dy,$$

ove D è la parte dell'ellisse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 1\}$ contenuta nel primo quadrante.

Descriviamo l'ellisse attraverso il seguente cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \dfrac{1}{2}\rho\sin\theta \end{cases}$$

con le seguenti limitazioni per le variabili ρ e θ

$$0 \le \rho \le 1 \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calcoliamo il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione. Si ha

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \dfrac{1}{2}\sin\theta & \dfrac{1}{2}\rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det J = \frac{1}{2}\rho\cos^2\theta + \frac{1}{2}\rho\sin^2\theta = \frac{1}{2}\rho.$$

Quindi

$$\int\int_D (x^2+1)\,dx\,dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\,\frac{1}{2}\rho\,(\rho^2\cos^2\theta + 1) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \rho\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} d\,\theta\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\,\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1 \theta\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{8} = \frac{5}{32}\pi.$$

Come appendice ricordiamo due modi di calcolare la primitiva di $\cos^2\theta$.

PRIMO MODO.

$$\int \cos^2\theta\,d\theta = \int \cos\theta\,\cos\theta\,d\theta = \cos\theta\,\sin\theta + \int \sin^2\theta\,d\theta = \cos\theta\,\sin\theta + \int (1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

da cui

$$2\int \cos^2\theta\,d\theta = \theta + \cos\theta\,\sin\theta.$$

SECONDO MODO.

$$\int \cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\int \cos(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\,\cos\theta.$$

✍ **Esercizio 1.2.17.**

Calcolare

$$\iint_A (2|x|y^2 - 3|x|)dxdy,$$

ove

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ |y| \le |x|,\ x \ge 0\}.$$

Parametrizziamo l'insieme A per mezzo delle coordinate polari.
Si ha

$$A = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\,\pi) : \; 1 \le \rho \le 2 \;\wedge\; [0 \le \theta \le \pi/4 \;\vee\; 7/4\,\pi \le \theta \le 2\,\pi]\}$$

ma data la periodicità delle funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta$ possiamo senz'altro scrivere che

$$A = \{(\rho, \theta) : \; 1 \le \rho \le 2 \;\wedge\; -\pi/4 \le \theta \le \pi/4\}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione vale ρ. Dunque si ha (ricordando che in A si ha $x \ge 0$ dunque $|x| = x$)

$$\int\!\!\int_A (2|x|y^2 - 3|x|)\, dx\, dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_1^2 d\rho\, 2\,\rho\,\rho^3\, \cos\theta\, \sin^2\theta - \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_1^2 3\,\rho\, \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, \rho$$

$$= 2\left(\int_1^2 \rho^4\, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\, \sin^2\theta\, d\theta\right) - 3\left(\int_1^2 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta d\theta\right)$$

$$= 2\,\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_1^2 \frac{\sin^3\theta}{3}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} - 3\,\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_1^2 \sin\theta\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2\left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right]\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] - 3\left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{74}{15}\sqrt{2}.$$

✍ **Esercizio 1.2.18.**

Dati gli insiemi $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$, definiti da

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-3)^2 \le\; 9, \;\; x \ge 0\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-3)^2 \ge\; 4, \;\; y \le 3\},$$

$$C = A \cap B,$$

calcolare

$$\int\!\!\int_C x\, dx\, dy.$$

L'insieme A è la parte di cerchio di centro $(0, 3)$ e raggio 3 contenuto nel primo quadrante; l'insieme B è la parte esterna al cerchio di centro $(0, 3)$ e raggio 2 contenuta nel semipiano $y \le 3$; l'insieme C dunque è un quarto di corona circolare. La cosa migliore è passare a coordinate polari. Si ha

$$C = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\,\pi) : \; 2 \le \rho \le 3 \;\wedge\; \theta \in [3/2\,\pi, 2\pi]\}.$$

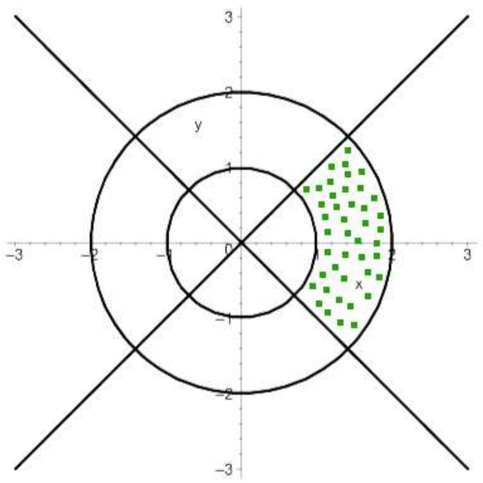


Figura 1.1: Esercizio 1.1: Insieme A.

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione vale ρ. Dunque si ha

$$\int\int_C x\,dx\,dy = \int_2^3 \int_{3/2\,\pi}^{2\,\pi} \rho\,\rho\,\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \int_2^3 \rho^2\,d\rho \int_{3/2\,\pi}^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$$

$$= \left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_2^3\right)\left(\sin\theta\Big|_{3/2\pi}^{2\pi}\right) = \frac{19}{3}.$$

✍ **Esercizio 1.2.19.**

Calcolare il seguente integrale doppio
$$\int\int_C (2x^2 + 8y^2 + 3x + 6y)\, dx\, dy,$$
dove
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, 2x^2 + 8y^2 \le 1\}.$$

Parametrizziamo l'ellisse attraverso il seguente cambio di variabili:
$$\begin{cases} x = \rho\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ y = \rho\,\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi] \;\; 0 \le \rho \le 1.$$
Si verifica facilmente che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate vale $\dfrac{1}{4}\,\rho$.
Quindi
$$\begin{aligned}
&\int\int_C (2x^2 + 8y^2 + 3x + 6y)\, dx\, dy \\
=&\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + 3\,\rho\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + 6\,\rho\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\theta\right)\frac{\rho}{4}\, d\rho\, d\theta \\
=&\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\, d\rho\, d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\left[\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\theta\right] d\theta\, d\rho \\
=&\frac{1}{4}\left(\int_0^1 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) + \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\int_0^1 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}(\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta\right) \\
=&\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^1 \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\,\frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^1 [\sin\theta - \cos\theta]\bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4\sqrt{2}}[0] = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.20.**

Calcolare $\iint_A (|x|y^2 - 3|x|)dxdy$, ove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9, \;\; |y| \le x, \;\; x \ge 0\}$.

Parametrizziamo l'insieme A per mezzo delle coordinate polari. Si ha
$$A = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) : \, 1 \le \rho \le 3 \;\wedge\; [0 \le \theta \le \pi/4 \;\vee\; 7/4\,\pi \le \theta \le 2\,\pi]\}$$
ma data la periodicità delle funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta$ possiamo senz'altro scrivere che
$$A = \{(\rho, \theta) : \, 1 \le \rho \le 3 \;\wedge\; -\pi/4 \le \theta \le \pi/4\}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione vale ρ. Dunque si ha

$$\int\int_A (|x|y^2 - 3|x|)\, dx\, dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_1^3 d\rho\, \rho\, \rho^3 \cos\theta \sin^2\theta - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_1^3 3\,\rho \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, \rho$$

$$= \left(\int_1^3 \rho^4\, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta\right) - 3\left(\int_1^3 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta\right)$$

$$= \frac{\rho^5}{5}\bigg|_1^3 \frac{\sin^3\theta}{3}\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} - 3\,\frac{\rho^3}{3}\bigg|_1^3 \sin\theta\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \left[\frac{243}{5} - \frac{1}{5}\right]\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] - 3\left[9 - \frac{1}{3}\right] 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{269}{15}\sqrt{2}.$$

✍ **Esercizio 1.2.21.**

Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_A (30xy^2 + 3x)\, dx\, dy,$$

dove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ |y| \le x,\ x \ge 0\right\}.$$

Parametrizziamo l'insieme A per mezzo delle coordinate polari.
Si ha

$$A = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0, 2\pi) :\ 1 \le \rho \le 2\ \wedge\ [0 \le \theta \le \pi/4\ \vee\ 7/4\,\pi \le \theta \le 2\pi]\}$$

ma data la periodicità delle funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta$ possiamo senz'altro scrivere che

$$A = \{(\rho,\theta) :\ 1 \le \rho \le 2\ \wedge\ -\pi/4 \le \theta \le \pi/4\}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione vale ρ. Dunque si ha

$$\int\int_A (30xy^2 + 3x)\, dx\, dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_1^2 d\rho\, \rho\, 30\, \rho^3 \cos\theta \sin^2\theta + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_1^2 3\,\rho \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, \rho$$

$$= 30\left(\int_1^2 \rho^4\, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta\right) + 3\left(\int_1^2 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta d\theta\right)$$

$$= 30\,\frac{\rho^5}{5}\bigg|_1^2 \frac{\sin^3\theta}{3}\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} + 3\,\frac{\rho^3}{3}\bigg|_1^2 \sin\theta\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 30\left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right]\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] + 3\left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}.$$

✍ **Esercizio 1.2.22.**

Si calcoli il seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{y^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove D è il dominio definito dalle condizioni $x \geq 0$, $y \geq 0$, $r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2$.

Passando a coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2}\int_r^R \frac{\rho^2\sin^2\theta\rho}{\rho^2}\rho\,d\rho d\theta \\ &= \left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_r^R \rho^2 d\rho\right) = \frac{R^3-r^3}{12}\pi.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.23.**

Sia D il dominio definito come

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x,\ 4x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

Calcolare

$$\iint_D x^2y\,dx\,dy.$$

Usiamo il seguente cambiamento di coordinate:

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = 2\rho\sin\theta$$

dove $0 \leq \rho \leq 1$ perché stiamo descrivendo parametricamente l'ellisse di semiassi 1 e 2; per determinare la variabilità di θ si osserva che sulla retta $y = x/2$ si ha, sostituendo le nuove coordinate $\tan\theta = \frac{1}{4}$ e dunque $\theta = \arctan(1/4)$ mentre sulla retta $y = 2x$ si ha $\theta = \arctan 1 = \pi/4$. Si osservi poi che $\arctan(1/4) = \arcsin(1/\sqrt{17}) = \arccos(4/\sqrt{17})$. Dunque

$$\begin{aligned}\iint_D x^2y\,dx\,dy &= \int_{\arctan(1/4)}^{\pi/4}\int_0^1 2\rho\rho^2\cos^2\theta 2\rho\sin\theta\,d\rho d\theta \\ &= \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4}\left[\frac{4}{5}\rho^5\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{15}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^3\right] = \frac{256}{255\sqrt{17}}-\frac{\sqrt{2}}{15}.\end{aligned}$$

Si verifichi che lo stesso risultato si ottiene passando in coordinate cartesiane.

✍ **Esercizio 1.2.24.**

Calcolare
$$I = \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$
dove D è il dominio (interno all'arco di spirale) espresso in coordinate polari da
$$\left\{\rho < \theta,\ 0 < \theta < \frac{3}{2}\pi\right\}.$$
Si noti che in questo caso il dominio espresso in coordinate polari non è un rettangolo; di conseguenza l'integrale doppio in polari diventa un effettivo integrale iterato e non semplicemente il prodotto di due integrali.

Passando in coordinate polari si ottiene (integrando due volte per parti)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} d\theta \int_0^{\theta} \rho\, \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2} d\rho \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos\theta \sin\theta \left(\int_0^{\theta} \rho d\rho\right) d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \theta^2 \sin(2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[-\theta^2 \frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \theta\cos(2\theta)d\theta \\
&= \frac{9}{32}\pi^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\theta\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{3}{2}\pi} - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin(2\theta)d\theta \\
&= \frac{9}{32}\pi^2 + \frac{1}{16}[\cos(2\theta)]_0^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{9}{32}\pi^2 - \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.25.**

Calcolare
$$I = \iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$
dove D è la regione descritta in coordinate polari da
$$\{(\rho,\theta) : \pi < \theta < 2\pi,\ \rho < \theta\}.\}$$

Passando in coordinate polari si ottiene (integrando per parti 3 volte)

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\theta} \rho \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho}\, d\rho d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_0^{\theta}\rho^2 d\rho\right)\cos\theta\sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{6}\int_{\pi}^{2\pi}(\theta^3\sin(2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{12}\left[-\theta^3\cos(2\theta)\right]_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{4}\int_{\pi}^{2\pi}[\theta^2\cos(2\theta)]\, d\theta \\
&= -\frac{7}{12}\pi^3 + 0 - \frac{1}{4}\int_{\pi}^{2\pi}\theta\sin(2\theta)\, d\theta \\
&= -\frac{7}{12}\pi^3 + \frac{1}{8}(\theta\cos(2\theta))_{\pi}^{2\pi} - 0 = \frac{\pi}{8} - \frac{7}{12}\pi^3.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.26.**

Calcolare il seguente integrale doppio usando le coordinate polari

$$\iint_{x^2+y^2<2} xy^3\, dx\, dy$$

Usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

con le limitazioni $0 \le \rho \le \sqrt{2}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, l'integrale richiesto si trasforma in

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2<2} xy^3\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\,\rho^4\cos\theta\sin^3\theta d\theta d\rho \\
&= \left(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^5\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\cos\theta\, d\theta\right) \\
&= \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2}}\left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.27.**

Sia D il quarto di corona circolare con centro nell'origine, raggi 1 e 2 e angolo variabile tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi$. Calcolare:

$$\iint_D x^2y\, dx\, dy.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\iint_D x^2y\,dx\,dy &= \int_{\pi/4}^{(3/4)\pi}\int_1^2 \rho\,\rho^2\,\cos^2\theta\rho\sin\theta d\rho d\theta = \left(\int_{\pi/4}^{(3/4)\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\right)\left(\int_1^2\rho^4\,d\rho\right)\\ &= \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\pi/4}^{(3/4)\pi}\frac{31}{5} = \frac{31}{15\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Alternativamente si può osservare che la funzione data è dispari nella y e il dominio è simmetrico rispetto all'asse y pertanto, detta D_1 la parte di corona circolare contenuta nel primo quadrante e D_2 la parte di corona circolare contenuta nel secondo quadrante, si ha

$$\iint_{D_1} x^2y\,dx\,dy = \iint_{D_2} x^2y\,dx\,dy$$

e dunque

$$\iint_D x^2y\,dx\,dy = 2\iint_{D_1} x^2y\,dx\,dy.$$

Si verifichi per esercizio che si ottiene lo stesso risultato.

Calcolare:

$$i)\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{x^3y}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad \text{e} \qquad ii)\iint_{[-1,1]\times[-1,1]}\frac{x^3y}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

i) Proviamo a passare in coordinate polari. Dobbiamo descrivere il dominio di integrazione (il quadrato di lato 1) in termini delle coordinate polari. Dividiamo in due il dominio attraverso la bisettrice del primo quadrante. Si ha $Q = Q_1 \cup Q_2$ dove

$$Q_1 = \left\{(\rho,\theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}\right\} \qquad Q_2 = \left\{(\rho,\theta) : \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\sin\theta}\right\}$$

dove la limitazione superiore per ρ in Q_1 è stata ottenuta sostituendo le coordinate polari nell'equazione $x = 1$ mentre la limitazione analoga in Q_2 sostituendo le coordinate polari in $y = 1$.

A questo punto dunque

$$\begin{aligned}&\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{x^3y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\rho^4\cos^3\theta\sin\theta}{\rho^2}\rho\,d\rho d\theta\\ &+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{\rho^4\cos^3\theta\sin\theta}{\rho^2}\rho\,d\rho d\theta = \int_0^{\pi/4}\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\\ &+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{2}\frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\sin(2\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{1}{\tan\theta}-\sin\theta\right)d\theta\\ =\ &\frac{1}{4}\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\left[\log|\sin\theta|\right]_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{1}{2}[\cos\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

ii)

$$\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} \frac{x^3y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = 0$$

perché si tratta di un integrale di una funzione dispari rispetto a entrambe le variabili su un dominio simmetrico rispetto all'origine.

✍ **Esercizio 1.2.28.**

Calcolare:

$$\iint_{x^2+4y^2<1} y^2\,dx\,dy$$

con un opportuno cambiamento di variabili.

Siccome la funzione integranda è pari rispetto alla variabile y, l'integrale può essere calcolato come il doppio dell'integrale sulla semiellisse contenuta nel primo e secondo quadrante. Dunque si ha, usando il seguente cambio di coordinate

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \frac{1}{2}\rho\sin\theta$$

(che porta il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione uguale a $\frac{1}{2}\rho$) si ottiene

$$\iint_{x^2+4y^2<1} y^2\,dx\,dy = 2\int_0^{\pi}\int_0^1 \frac{\rho^2}{4}\sin^2\theta\frac{\rho}{2}\,d\rho d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^1\rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{32}.$$

✍ **Esercizio 1.2.29.**

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{2x-2y}{3+(x+y)^2}\,dx\,dy,$$

dove

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x+y\le 1,\ -2\le x-y\le 3\}$$

Operiamo il seguente cambio di variabile

$$u = x+y \qquad v = x-y$$

da cui si ricava

$$x = \frac{u+v}{2} \qquad y = \frac{u-v}{2}$$

quindi la matrice Jacobiana della trasformazione risulta

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e pertanto il modulo del determinante della matrice Jacobiana della trasformazione risulta $\frac{1}{2}$.
A questo punto il dominio D si trasforma in

$$\tilde{D} = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, \ -2 \leq v \leq 3\}$$

e pertanto

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_D \frac{2x - 2y}{3 + (x+y)^2}\, dx\, dy &= \int_0^1 du \int_{-2}^3 \frac{2v}{3 + u^2}\, \frac{1}{2}\, dv \\
&= \left(\int_0^1 \frac{1}{3 + u^2}\, du\right)\left(\int_{-2}^3 v\, dv\right) = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\, du\right)\left[\frac{v^2}{2}\right]_{-2}^3 \\
&= \left[\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \frac{5}{2} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{12\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.30.**

Integrare $f(x, y) = xy^2$ su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x > y^2,\ 2y > x^2\}$. (Non è necessario svolgere il conto finale).

Proviamo ad usare le coordinate polari. Occorre esprimere anche il dominio in coordinate polari. Le due curve $2y = x^2$ e $2x = y^2$ si intersecano in $(0, 0)$ e $(2, 2)$ per i quali punti passa la bisettrice del primo quadrante. Tale bisettrice taglia il dominio in due regioni: la prima (visto che le due curve hanno rispettivamente tangente orizzontale e tangente verticale) è per $0 \leq \theta \leq \pi/4$ e la variabilità su ρ si ottiene sostituendo le coordinate polari nella disequazione $2x > y^2$ che porta a $2\rho\cos\theta > \rho^2\sin^2\theta$ e dunque $\rho < \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$. La seconda regione è per $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ e per ottenere la variabilità di ρ basta sostituire le coordinate polari nella disequazione $2y > x^2$ che porta a $2\rho\sin\theta > \rho^2\cos^2\theta$ e dunque $\rho < \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$.
Riassumendo

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_D xy^2 &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}} \rho^4\cos\theta\sin^2\theta\, d\rho d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}} \rho^4\cos\theta\sin^2\theta\, d\rho d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos\theta\sin^2\theta\, d\theta \frac{1}{5}\frac{32\sin^5\theta}{\cos^{10}\theta} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{32}{5}\frac{\cos^5\theta}{\sin^{10}\theta}\cos\theta\sin^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{32}{5}\left\{\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^7\theta}{\cos^9\theta} d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^6\theta}{\sin^8\theta} d\theta\right\}.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.31.**

Calcolare

$$\iint_D \frac{x^3 y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove D è l'intersezione del settore circolare $\{\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}\}$ con la corona circolare con centro nell'origine e raggi 1 e 2 .

Passando in coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^3 y}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_1^2 \rho\frac{\rho^4\cos^3\theta\sin\theta}{\rho^2}\,d\rho d\theta \\ &= \left(\int_1^2 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta\right) \\ &= \frac{15}{4}\left[-\frac{\cos^3\theta}{4}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{15}{16}\left[-\frac{1}{16}+\frac{9}{16}\right] = \frac{15}{32}.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.32.**

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_D \sqrt{9-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

dove

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-3x \le 0,\ y\ge 0\}.$$

Osserviamo che la disequazione

$$x^2+y^2-3x\le 0$$

si può scrivere come

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4} \le 0$$

che quindi rappresenta il cerchio di centro $(3/2, 0)$ e raggio $3/2$. Il dominio D rappresenta dunque il semicerchio situato nel semipiano $y \ge 0$. Proviamo a passare in coordinate polari. Sostituendo

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$

nella precedente equazione si ottiene

$$\rho^2 - 3\rho\cos\theta \le 0 \;\Rightarrow\; \rho \le 3\cos\theta$$

quindi l'insieme di integrazione diventa

$$T = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 3\cos\theta \right\}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
&\iint_D \sqrt{9-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_T \sqrt{9-\rho^2}\rho\,d\rho, d\theta \\
= &\int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{3\cos\theta} \rho\sqrt{9-\rho^2}\,d\rho \right] d\theta \\
= &\int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} \int_0^{3\cos\theta} (-2\rho)\sqrt{9-\rho^2} d\rho \right] d\theta \\
= &-\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} \left[(9-\rho^2)^{3/2} \right]_0^{3\cos\theta} d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \left[(9-9\cos^2\theta)^{3/2} - 9^{3/2} \right] d\theta \\
= &-9 \int_0^{\pi/2} (\sin^3\theta - 1)\,d\theta = 9 \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta + \frac{9}{2}\pi \\
= &\ 9 \left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} + \frac{9}{2}\pi = -6 + \frac{9}{2}\pi.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.33.**

Calcolare l'area della regione D del piano xy descritta dalle seguenti disuguaglianze:

$$y \ge 0,\ x^2+y^2 \ge 4,\ (x-2)^2+y^2 \le 4,\ y \le \sqrt{3}/3x.$$

Usando il seguente cambio di coordinate

$$x = 2\rho\cos\theta \qquad y = 2\rho\sin\theta$$

si ha $\det JT = 4\rho$ e

$$D' = \left\{ (\rho,\theta) : 1 \le \rho \le 2\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6} \right\}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\text{Area (D)} &= \int\int_D 1dx\,dy = 4\int\int_{D'} \rho\rho d\rho d\theta = 4\int_0^{\pi/6}\int_1^{2\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = 4\int_0^{\pi/6} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_1^{2\cos\theta} \\
&= 2\int_0^{\pi/6} (4\cos^2\theta - 1)\,d\theta = 4\int_0^{\pi/6} \cos(2\theta)\,d\theta + 2\int_0^{\pi/6} d\theta = \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.34.**

Si calcoli

$$\int\int_D \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,$$

dove D è la regione limitata di piano compresa nel primo quadrante, delimitata dall'asse x, dalla retta $x = 2$, dalla bisettrice del primo quadrante e dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

In coordinate polari il dominio D si trasforma nel dominio

$$D' = \left\{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\theta},\ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

da cui

$$\begin{aligned}\int\int_D \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/4}\int_1^{2\cos\theta} \frac{2\rho\sin\theta}{\rho}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\sin\theta\int_1^{2\cos\theta} 2\rho\,d\rho\,d\theta \\ = \int_0^{\pi/4}\sin\theta\left(\frac{4}{\cos^2\theta} - 1\right)d\theta &= \frac{4}{\cos\theta} + [\cos\theta]_0^{\pi/4} = \frac{9}{2}\sqrt{2} - 5.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.35.**

Calcolare

$$\int\int_T xy\,dx\,dy$$

dove

$$T = \left\{(\rho, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq \rho \leq \sqrt[4]{1 + (\sin\theta)^3}\right\}.$$

Passando in coordinate polari si ha

$$\begin{aligned}\int\int_T xy\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/4}\int_1^{\sqrt[4]{1+(\sin\theta)^3}} \rho\cos\theta\rho\sin\theta\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\int_1^{\sqrt[4]{1+(\sin\theta)^3}} \rho^3\,d\rho\,d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\sin^4\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{20}[\sin^5\theta]_0^{\pi/4} = \frac{1}{80\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.36.**

Calcolare
$$\int\int_D \frac{y}{x^4}\log\frac{y}{x^2}\,dx\,dy,$$
dove
$$D=\left\{(x,y):\frac{1}{2}\le\frac{y}{x}\le 1,\ \frac{1}{2}\le\frac{y}{x^2}\le 2\right\}.$$
Si consiglia di usare un opportuno cambio di coordinate.

Il cambiamento di variabili
$$\begin{cases} u=\dfrac{y}{x}\\ v=\dfrac{y}{x^2}\end{cases}$$
trasforma il dominio dato nel rettangolo $R=\{(u,v):1/2\le u\le 1,\ 1/2\le v\le 2\}$. La trasformazione che ci serve per la sostituzione delle variabili nell'integrale doppio è l'inversa di questa (e ci permetterà di esprimere x e y in funzione di u e v), dunque la trasformazione

$$\mathbf{T}=\begin{cases} x=\dfrac{u}{v}\\ y=\dfrac{u^2}{v}\end{cases}$$

da cui
$$\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2}\\ \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2}\end{bmatrix}=\frac{u^2}{v^3}.$$
Di conseguenza l'integrale cercato risulta

$$\int\int_D 1\,dx\,dy=\int\int_R |J_{\mathbf{T}}|\,du\,dv=\int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{2}\log v\,dv\,du=\frac{1}{2}[v\log v-v]_{1/2}^{2}=\frac{5}{4}\log 2-\frac{3}{4}.$$

✍ **Esercizio 1.2.37.**

Sia D il parallelogramma di verici $A=(1,1)$, $B=(2,2)$, $C=(3,6)$, $D=(2,5)$. Eseguendo un opportuno cambiamento di variabili, calcolare l'integrale
$$\int\int_D \frac{e^{4x-y}(x-y)}{1+(x-y)^2}\,dx\,dy.$$

La retta AB ha equazione $y=x$ cioè $x-y=0$; la retta CD ha equazione $x-y=3$; la retta AD ha equazione $4x - y = 3$ e infine la retta BC ha equazione $4x - y = 6$. Poniamo quindi

$$\mathbf{T}^{-1} := \begin{cases} x - y = u \\ 4x - y = v \end{cases}$$

da cui $|J\mathbf{T}| = \frac{1}{|J_{\mathbf{T}^{-1}}|} = \frac{1}{3}$. Allora

$$\begin{aligned} \int\!\!\int_D \frac{e^{4x-y}(x-y)}{1+(x-y)^2}\,dx\,dy &= \frac{1}{3}\int_3^6 e^v\,dv \int_{-3}^0 \frac{u}{1+u^2}\,du \\ &= \frac{1}{6}(e^6 - e^3)[\log(1+u^2)]_{-3}^0 = -\frac{1}{6}(e^6 - e^3)\log 10. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.38.**

Sia $D = \{(x,y) : x \leq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ un dominio piano. Calcolare

$$\int\!\!\int_D x\,dx\,dy$$

e

$$\int\!\!\int_D y\,dx\,dy.$$

Si ha che

$$\int\!\!\int_D y\,dx\,dy = 0$$

perché la funzione $f(x,y) = y$ è tale che $f(x,-y) = -f(x,y)$, mentre

$$\int\!\!\int_D x\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos\theta\,d\rho \right) d\theta = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} [\sin\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = -\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

✍ **Esercizio 1.2.39.**

Calcolare

$$\int\!\!\int_D \frac{x+2y-2}{2x^2+2y^2-1}\,dx\,dy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Il dominio di integrazione è la corona circolare di raggi $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ contenuta nel primo quadrante. Pertanto in coordinate polari il dominio di integrazione D si trasforma nel rettangolo

$$D' = \left\{(\rho,\theta) : \sqrt{2} \leq \rho \leq \sqrt{3},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

quindi in coordinate polari l'integrale dato diventa

$$\int\!\!\int_D \frac{x+2y-2}{2x^2+2y^2-1}\,dx\,dy = \int\!\!\int_{D'} \frac{\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-2}{2\rho^2-1}\rho\,d\rho\,d\theta = I_1 - I_2$$

avendo posto

$$I_1 := \int\!\!\int_{D'} \frac{\rho^2}{2\rho^2-1}(\cos\theta+2\sin\theta)\,d\rho\,d\theta \qquad I_2 = \int\!\!\int_{D'} \frac{2\rho}{2\rho^2-1}\,d\rho\,d\theta$$

da cui

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{\rho^2}{2\rho^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+2\sin\theta)\,d\theta\,d\rho = [\sin\theta-2\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{2\rho^2-1}\right)d\rho \\ &= \frac{3}{2}\left[\rho+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}\rho-1}{\sqrt{2}\rho+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{3(\sqrt{6}-1)}{\sqrt{6}+1}\right) \end{aligned}$$

e

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2\rho}{2\rho^2-1}\,d\rho\,d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\log(2\rho^2-1)}{2}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4}\log\frac{5}{3}.$$

✍ **Esercizio 1.2.40.**

Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\int\!\!\int_D \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\,dx\,dy,$$

dove

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x-1)^2+y^2\geq 1,\ 0\leq y\leq\sqrt{3}(x-1),\ 1\leq x\leq 2\}.$$

Attraverso il seguente cambio di variabili

$$x = 1+\rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$

il dominio D viene trasformato nel dominio

$$D' = \left\{(\rho,\theta): 1\leq\rho\leq\frac{1}{\cos\theta},\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}\right\}$$

quindi in coordinate polari l'integrale dato diventa

$$\begin{aligned} &\int\!\!\int_D \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\,dx\,dy = \int\!\!\int_{D'} \rho\frac{\rho\cos\theta}{\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/3}\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\cos\theta\,d\rho\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

1.2.3. Svolgimento di integrali con considerazioni di simmetria

✍ **Esercizio 1.2.41.**

Calcolare il seguente integrale doppio mediante opportune considerazioni di simmetria

$$\iint_{x^2+y^2<2} xy^3\,dx\,dy$$

Sia $C := \{(x,y) : x^2 + y^2 < 2\}$ e sia A_i $i = 1,2,3,4$ le intersezioni di C con i quattro quadranti nell'ordine. Allora valgono le seguenti considerazioni, dovute alla simmetria del problema: siccome xy^3 è dispari rispetto a x, l'integrale di xy^3 su A_1 è opposto all'integrale su A_2 e l'integrale su A_3 è opposto all'integrale su A_4. Oppure, visto che la funzione xy^3 è anche dispari rispetto a y si ha che l'integrale di xy^3 su A_2 è opposto all'integrale su A_3 e l'integrale su A_1 è opposto all'integrale su A_4. D'altra parte, visto che xy^3 è simmetrica rispetto all'origine, l'integrale di xy^3 su A_3 è uguale all'integrale su A_1 e quello su A_4 è uguale a quello su A_2. Concludendo l'integrale proposto fa zero.

✍ **Esercizio 1.2.42.**

Calcolare il seguente integrale doppio mediante opportune considerazioni di simmetria

$$\iint_T (x+5)\,dx\,dy$$

con

$$T = \{(x,y) : |x| \le 1,\ 0 \le y \le 2 - 2|x|\}.$$

(Non occorre calcolare integrali!)

Il dominio è simmetrico rispetto all'asse y e la funzione x è dispari, quindi l'integrale di x sulla parte del triangolo contenuta nel primo quadrante è opposto all'integrale di x sulla parte di triangolo contenuta nel secondo quadrante. Pertanto si ha

$$\iint_T (x+5)\,dx\,dy = \iint_T x + 5\mathrm{area}(T) = 0 + 5\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{1}{2} = 10.$$

✍ **Esercizio 1.2.43.**

Sfruttando opportune simmetrie, calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D 2 + 3x \log(x^4 + y^3)\, dx$$

dove D è il rettangolo $[-2, 2] \times [0, 1]$.

Il dominio è simmetrico rispetto all'asse y e la funzione integranda è la somma di 2 + una funzione dispari rispetto alla variabile x, pertanto l'integrale di tale funzione sulla parte di dominio contenuta nel primo quadrante è opposta all'integrale sulla parte di dominio contenuta nel secondo quadrante. Quindi l'integrale dato coincide con il doppio dell'area del dominio, che essendo un rettangolo ha area uguale a base per altezza cioè ha area 4. L'integrale totale vale dunque 8.

✍ **Esercizio 1.2.44.**

Sia $f(x, y) = (x^2 + y^2)\, \sin(x + 2y)$ e sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 9\}$. Dimostrare che

$$\int\int_D f(x, y) = 0.$$

Si tratta di una funzione simmetrica rispetto all'origine integrata su un dominio centrato nell'origine. In particolare, se denotiamo con A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ i quarti di ellisse contenuti nei rispettivi quadranti si ha

$$\begin{aligned}\int\int_{A_1} f(x, y)\, dx\, dy &= \int\int_{A_1} (x^2 + y^2) \sin(x + 2y)\, dx\, dy \\ &= \int\int_{A_3} (x^2 + y^2) \sin(-x - 2y)\, dx\, dy \\ &= -\int\int_{A_3} f(x, y)\, dx\, dy\end{aligned}$$

e analogamente si dimostra che

$$\int\int_{A_2} f(x, y)\, dx\, dy = -\int\int_{A_4} f(x, y)\, dx\, dy$$

dunque l'integrale proposto fa zero.

✍ **Esercizio 1.2.45.**

Calcolare

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} x^2y^2\,dx\,dy.$$

Si tratta del quadrato centrato nell'origine e con i lati (di lunghezza $\sqrt{2}$) paralleli alle bisettrici dei quattro quadranti. Si tratta quindi di integrare una funzione pari su un dominio simmetrico. Dunque per simmetria del problema si ha

$$\begin{aligned}\iint_{|x|+|y|\leq 1} x^2y^2\,dx\,dy &= 4\iint_Q x^2y^2\,dx\,dy = 4\int_0^1 x^2\left(\int_0^{1-x} y^2\,dy\right)dx \\ &= 4\int_0^1 x^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \frac{4}{3}\int_0^1 (x^2-3x^3+3x^4-x^5)\,dx \\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{45}.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.46.**

Facendo eventualmente considerazioni sulle simmetrie, integrare la funzione

$$f(x,y) = y(x^4+y^4) + \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

sul dominio

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ 4\leq x^2+y^2\leq 9\}.$$

Si osserva immediatamente che

$$\iint_D y(x^4+y^4)\,dx\,dy = 0$$

perché la funzione è dispari nella variabile y e il dominio è simmetrico rispetto all'asse x. D'altra parte la funzione $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ è dispari nella variabile x ed essendo il dominio simmetrico rispetto all'asse x, detta A la parte di D contenuta nel quarto quadrante e detta B la parte di D contenuta nel primo quadrante si ha

$$\iint_A \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_B \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

per cui riassumendo

$$\begin{aligned}
&\iint_A y(x^4+y^4)+\frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = 0+2\iint_A \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy \\
= \;& 2\int_0^{\pi/2}\int_2^3 \frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_2^3 \rho^2\cos\theta\sin^2\theta\,d\rho\,d\theta \\
= \;& 2\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_2^3 = \frac{2}{3}\,\frac{27-8}{3} = \frac{38}{9}.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.47.**

Con opportuni ragionamenti, dimostrare che è nullo l'integrale doppio

$$\iint_D \sin(y-1)^3\cos(x+(y-1)^2)\,dx\,dy$$

dove D è il quadrato di vertici $(1/2,1),(1,1/2),(3/2,1),(1,3/2)$.

Il dominio di integrazione è simmetrico rispetto alle rette $x=1$ e $y=1$. Eseguendo la traslazione del piano $X=x-1$, $Y=y-1$ ed essendo l'elemento di area $dxdy=dXdY$ si ottiene

$$I=\int\int_{D'} \sin Y^3\cos(X+1+Y^2)dXdY=0$$

visto che si ha $f(X,Y)=-f(-X,-Y)$.

1.2.4. Applicazioni fisiche

✍ **Esercizio 1.2.48.**

Calcolare il centroide del quarto di cerchio

$$x^2+y^2<R^2, \qquad x>0,\ y>0$$

usando le coordinate polari.

Le formule delle coordinate del controide sono

$$\bar{x}=\frac{1}{|D|}\iint_D x\,dx\,dy \qquad \bar{y}=\frac{1}{|D|}\iint_D y\,dx\,dy$$

quindi essendo da considerazioni geometriche $|D| = (\pi R^2)/4$, si ottiene

$$\bar{x} = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho^2 \cos\theta d\rho d\theta = \frac{4}{\pi R^2} \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^R \rho^2 \, d\rho \right) = \frac{4R}{3\pi}.$$

Analogamente

$$\bar{y} = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta = \frac{4}{\pi R^2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^R \rho^2 \, d\rho \right) = \frac{4R}{3\pi}.$$

✍ **Esercizio 1.2.49.**

Calcolare il baricentro di una lamina omogenea a forma di un quarto di corona circolare:

$$\left\{ (\rho, \theta) : r < \rho < R; 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Le coordinate del baricentro sono date dalle formule

$$\bar{x} = \frac{1}{|D|} \iint_D x \, dx \, dy \qquad \bar{y} = \frac{1}{|D|} \iint_D y \, dx \, dy.$$

Per la geometria del problema si calcola immediatamente che

$$|D| = \frac{1}{4}(\pi R^2 - \pi r^2)$$

quindi per esempio passando in coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{|D|} \int_0^{\pi/2} \int_r^R \rho^2 \cos\theta d\theta d\rho = \frac{1}{|D|} \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_r^R \rho^2 \, d\rho \\ &= \frac{4}{\pi(R^2 - r^2)} \frac{R^3 - r^3}{3} = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + rR + r^2}{R + r} \end{aligned}$$

e visto che

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta = 1$$

si ottiene con conti analoghi che $\bar{y} = \bar{x}$.

✍ **Esercizio 1.2.50.**

Calcolare il momento di inerzia di una lamina omogenea di massa M a forma di corona circolare di raggi r, R, rispetto all'asse passante per il centro e perpendicolare al piano della corona.

Detto I il momento d'inerzia richiesto dal problema si ha

$$I = \frac{M}{|D|} \iint_D (\delta(x,y))^2 \, dx \, dy$$

dove δ è la distanza dall'asse, cioè $\delta(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
Dunque, passando in coordinate polari, si ha

$$I = \frac{M}{\pi(R^2-r^2)} \int_0^{2\pi} \int_r^R \rho^3 \, d\rho d\theta = \frac{M}{2(R^2-r^2)}(R^4-r^4) = \frac{M}{2}(R^2+r^2).$$

✍ **Esercizio 1.2.51.**

Calcolare il momento di inerzia di un disco omogeneo di massa M e raggio R, rispetto a un asse perpendicolare al suo piano e passante per un punto posto sulla circonferenza.
Suggerimento: l'equazione polari della circonferenza di raggio R passante per l'origine è: $\rho = 2R\cos\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Per risolvere il problema occorre centrare la circonferenza nell'origine, in modo che l'origine sia il punto dove passa l'asse; in tal modo la distanza dall'asse diventa $\delta(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e dunque passando in coordinate polari

$$\begin{aligned} I &= \frac{M}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2R\cos\theta} \rho^2 d\rho = \frac{M}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3} R^3 \cos^3\theta \, d\theta \\ &= \frac{8}{3}\frac{M}{\pi} R \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{32}{9}\frac{M}{\pi} R, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\int \cos^3\theta d\theta = \int \cos\theta(\cos^2\theta) \, d\theta = \int \cos\theta(1-\sin^2\theta) d\theta = \sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} + C$$

✍ **Esercizio 1.2.52.**

Calcolare il centroide del quarto di cerchio:

$$x^2 + y^2 < R^2, \qquad x > 0, \; y > 0.$$

usando le coordinate cartesiane.

Le coordinate del centroide sono date dalle formule

$$\bar{x} = \frac{1}{|D|} \iint_D x \, dx \, dy \qquad \bar{y} = \frac{1}{|D|} \iint_D y \, dx \, dy$$

quindi nel nostro caso si ha

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{|D|}\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x\,dx\,dy = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R x\,dx\sqrt{R^2-x^2} \\
&= \frac{4}{\pi R^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^R -2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx = -\frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{(R^2-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^R \\
&= \frac{2}{\pi R^2}\frac{2}{3}R^3 = \frac{4}{3\pi}R.
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\bar{y} = \frac{1}{|D|}\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy\right)dx = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R \frac{1}{2}(R^2-x^2)\,dx = \frac{2}{\pi R^2}\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3\pi}R.$$

✍ **Esercizio 1.2.53.**

Calcolare il centroide del quadrilatero di vertici $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,0)$.

Le coordinate del centroide sono date dalle formule

$$\bar{x} = \frac{1}{|Q|}\iint_D x\,dx\,dy \qquad \bar{y} = \frac{1}{|Q|}\iint_D y\,dx\,dy.$$

L'area del quadrilatero è la somma delle aree dei due triangoli Q_1 e Q_2 di vertici rispettivamente $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ e $(2,1)$, $(2,0)$, $(0,1)$ quindi si calcolano immediatamente con considerazioni geometriche e $|Q| = 2$.

A questo punto allora,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{2}\left[\iint_{Q_1} x\,dx\,dy + \iint_{Q_2} x\,dx\,dy\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2\int_{y-1}^{3-y} x\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_0^2\int_{1-\frac{x}{2}}^1 x\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int_1^2 ((3-y)^2-(y-1)^2)\,dy + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int_1^2 (8-4y)\,dy + \frac{1}{12}[x^3]_0^2 = \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{2}\left[\iint_{Q_1} y\,dx\,dy + \iint_{Q_2} y\,dx\,dy\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 y \int_{y-1}^{3-y} 1\,dx + \frac{1}{2}\int_0^2 \int_{1-\frac{x}{2}}^{1} y\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (4y-2y^2)\,dy + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1-(1-\frac{1}{2}x)^2}{2}\,dx \\
&= [y^2]_1^2 - \frac{1}{3}[y^3]_1^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\right]_0^2 = 1.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.54.**

> Calcolare il baricentro della lamina rettangolare $[0,4]\times[0,3]$ di densità superficiale $\rho(x,y) = 1+x^2+y^2$.

Le coordinate del baricentro di una lamina non omogenea (a densità variabile) D sono

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\,dx\,dy \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\,dx\,dy$$

dove la massa della lamina non omogenea (a densità variabile) è data da

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy.$$

Dunque calcoliamo prima

$$\begin{aligned}
M &= \iint_D (1+x^2+y^2)\,dx\,dy = |D| + \int_0^4\int_0^3 x^2\,dx\,dy + \int_0^4\int_0^3 y^2\,dx\,\,dy \\
&= 12 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 + 4\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 \\
&= 12+64+36 = 112.
\end{aligned}$$

A questo punto

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{112}\iint_D x(1+x^2+y^2)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{112}\left[\int_0^4\int_0^3 x\,dx\,dy + \int_0^4\int_0^3 x^3\,dx\,dy + \int_0^4\int_0^3 xy^2\,dx\,dy\right] \\
&= \frac{1}{112}[24+192+72] = \frac{18}{7}.
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{112}\iint_D y(1+x^2+y^2)\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{112}\left[\int_0^4\int_0^3 y\,dx\,dy + \int_0^4\int_0^3 x^2y\,dx\,dy + \int_0^4\int_0^3 y^3\,dx\,dy\right] \\ &= \frac{1}{112}[18+96+81] = \frac{195}{112}.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.55.**

> Calcolare il momento di inerzia di una lamina circolare omogenea di massa M e raggio R rispetto all'asse passante per il centro e perpendicolare al cerchio.

In tal caso la distanza dall'asse risulta $\delta(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ dunque il momento di inerzia da calcolare è (passando in coordinate polari)

$$\begin{aligned}I &= \frac{M}{|D|}\iint_D \delta^2(x,y)\,dx\,dy = \frac{M}{\pi R^2}\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \\ &= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^3\,d\rho d\theta = \frac{MR^2}{2}.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.2.56.**

> Sia D la regione piana delimitata dall'asse x e dall'arco di parabola $y = 4-x^2$ con $-2 \leq x \leq 2$. Calcolare le coordinate del baricentro di D supponendo la densità costante.

Le coordinate del baricentro sono

$$\bar{x} = \frac{1}{|D|}\iint_D x\,dx\,dy \qquad \bar{y} = \frac{1}{|D|}\iint_D y\,dx\,dy.$$

Per la simmetria del problema si vede immediatamente che $\bar{x} = 0$. D'altra parte

$$|D| = \int_{-2}^2\int_0^{4-x^2} dy\,dx = \int_{-2}^2 (4-x^2)\,dx = 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3}.$$

A questo punto, di nuovo per la simmetria del problema

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{3}{32}2\int_0^2\int_0^{4-x^2} y\,dx\,dy = \frac{3}{16}\int_0^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x^2} dx \\ &= \frac{3}{32}\int_0^2 [16-8x^2+x^4]\,dx = \frac{3}{32}\left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 3\left[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right] = \frac{8}{5}.\end{aligned}$$

1.3. Integrali tripli

Tutto quanto detto finora si generalizza anche a dimensioni superiori. Vediamo alcuni casi particolari in 3 dimensioni.

1.3.1. Integrazione "per fili"

Sia

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), \ (x, y) \in D\}$$

con D dominio regolare e $g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$ continue. Allora se anche $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e integrabile su Ω) allora l'integrale triplo si può calcolare mediante la formula

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\ dz = \int\int_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy$$

1.3.2. Integrazione "per strati"

Sia ora

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ h_1 \leq z \leq h_2, \ (x, y) \in \Omega(z)\}$$

con $z \in [h_1, h_2]$ e $\Omega(z)$ un dominio regolare nel piano. Allora se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e integrabile su Ω allora l'integrale triplo si può calcolare tramite la formula

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\ dz = \int_{h_1}^{h_2} \left(\int\int_{\Omega(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz$$

1.3.3. Formula di cambiamento di variabili

Teorema 1.3.1. (formula di cambiamento di variabili negli integrali tripli) *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio regolare, $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e $\mathbf{T} : D' \to D$ una trasformazione di coordinate, più precisamente un diffeomorfismo globale tra D e D', con $(x, y, z) = \mathbf{T}(u, v, w)$ e*

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} &\int\!\!\int\!\!\int_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ = \; &\int\!\!\int\!\!\int_{D'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\, |\det \mathbf{JT}(u, v, w)|\, du\, dv\, dw \end{aligned}$$

dove $\mathbf{JT}(u, v, w)$ indica la matrice Jacobiana della trasformazione.

✎ **Esempio 1.3.2.** *Si calcoli il volume della regione*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Si può ad esempio calcolare questo volume integrando per "fili" da cui

$$\int\!\!\int\!\!\int_V 1\, dx\, dy\, dz = \int\!\!\int_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_0^{3\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dx\, dy = \int\!\!\int_{x^2+y^2\leq 1} 3\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

a questo punto si può utilizzare nell'ultimo integrale (che diventa un integrale doppio) un cambio di coordinate, per esempio le coordinate polari, dunque

$$\int\!\!\int\!\!\int_V 1\, dx\, dy\, dz = \int\!\!\int_{x^2+y^2\leq 1} 3\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^2\, d\rho\, d\theta = 2\pi$$

Si può giungere allo stesso risultato usando direttamente le coordinate cilindriche come cambio di coordinate nell'integrale triplo di partenza, per cui usando la trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = t \end{cases}$$

che ha determinante della matrice Jacobiana uguale a ρ, si riscrive

$$V = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 3\rho\}$$

per cui

$$\int\int\int_V 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3\rho} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^2\,d\rho\,d\theta = 2\pi$$

1.4. Integrali tripli: esercizi svolti

1.4.1. Integrazione per "fili" e per "strati"

✍ **Esercizio 1.4.1.**

Calcolate il volume della regione interna al cilindro di equazione $x^2+y^2 \le 4$ e compresa tra i piani $z = x-1$ e $z = 1-x$.

Si ha che

$$\min\{x-1, 1-x\} = x-1 \quad \Leftrightarrow \quad x \le 1.$$

Allora si ponga

$$A = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4, \;\; x \le 1\}$$

e

$$B = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4, \;\; x \ge 1\}$$

Allora

$$V(C) = \int\int_A \int_{x-1}^{1-x} dx\,dy + \int\int_B \int_{1-x}^{x-1} dx\,dy = \int\int_A (2-2x) + \int\int_B (2x-2) =: I + II.$$

Prima di tutto si ha

$$I := \int\int_A (2-2x) = 2\text{area (A)} - 2\int\int_A x\,dx\,dy$$

Poniamo

$$A_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \;\; -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x\}$$

e $A_1 := A \setminus A_2$. Allora è chiaro che l'area di A è l'area di A_1 che è $2/3\,\pi\,4$ unita all'area di A_2 che è (essendo un triangolo) $2\sqrt{3}\,1\,1/2 = \sqrt{3}$.
D'altra parte

$$II := \int\int_B (2x-2)\,dx\,dy = 2\int\int_B x - 2\text{area (B)}.$$

Ora analogamente a prima l'area di B è l'area del settore circolare sotteso a un angolo di 120 gradi (che chiameremo S) che è $1/3\pi\,4$ a cui si toglie l'area del triangolo A_2 cioè $\sqrt{3}$.
Riassumendo

$$\begin{aligned} V(C) &= -2\int\int_A x + 2\int\int_B x + 2\text{area (A)} - 2\text{area(B)} \\ &= -2\int\int_{A_1} x - 2\int\int_{A_2} x + 2\int\int_S x - 2\int\int_{A_2} x + 2\left(\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}\right) - 2\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) \\ &= -2\int\int_{A_1} x - 4\int\int_{A_2} x + 2\int\int_S x + \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

A questo punto parametrizzo A_1 e S con coordinate polari; si ha

$$A_1 = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 2,\ \ \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right]\}$$

e

$$S = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 2,\ \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right]\}$$

Quindi, essendo il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione uguale a ρ, si ha

$$-2\int\int_{A_1} x\,dx = -2\int_0^2\int_{\pi/3}^{5/3\pi} \rho^2\,\cos\theta d\theta d\rho = -2\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2 \sin\theta\Big|_{\pi/3}^{5/3\pi} = \frac{16}{3}\sqrt{3}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} 2\int\int_S x\,dx &= 2\int_0^2\int_0^{\pi/3} \rho^2\,\cos\theta d\theta d\rho + 2\int_0^2\int_{5/3\pi}^{2\pi} \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta \\ &= 2\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2\left(\sin\theta\Big|_0^{\pi/3} + \sin\theta\Big|_{5/3\pi}^{2\pi}\right) = \frac{16}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Infine

$$-4\int\int_{A_2} x = -4\int_0^1\int_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x} x\,dx\,dy = -4\int_0^1 2\sqrt{3}x^2\,dx = -8\sqrt{3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

Alternativamente A_2 può essere descritto in coordinate polari nel seguente modo:

$$A_2 = \left\{(\rho,\theta) : -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3},\ \ 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}\right\}$$

dove la maggiorazione su ρ è stata individuata dalla relazione $x = 1$ scrivendo x in coordinate polari. Dunque in questo caso si avrebbe

$$\begin{aligned} -4\int\int_{A_2} x\,dx\,dy &= -4\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta \\ &= -4\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos\theta\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\cos\theta}} = -\frac{4}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= -\frac{4}{3}[\tan\theta]_{-\pi/3}^{\pi/3} = -\frac{4}{3}[2\sqrt{3}] = -\frac{8}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

In ogni caso riassumendo

$$V(C) = \frac{16}{3}\sqrt{3} - \frac{8}{3}\sqrt{3} + \frac{16}{3}\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi.$$

✍ **Esercizio 1.4.2.**

Calcolate il volume del solido V limitato dal cilindro ellittico di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e dai piani di equazione $z = 1 - \sqrt{3}x - 3y$ e $z = 1$.

Si ha che

$$\min\{1 - \sqrt{3}x - 3y, 1\} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x$$

quindi ponendo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \ \wedge \ y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}x\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \ \wedge \ y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x\}$$

si ha

$$\begin{aligned} V(C) &= \int\int_A \int_1^{1-\sqrt{3}x-3y} dz\,dx\,dy + \int\int_B \int_{1-\sqrt{3}x-3y}^1 dz\,dx\,dy \\ &= \int\int_A (-\sqrt{3}x - 3y)\,dx\,dy + \int\int_B (\sqrt{3}x + 3y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Data la simmetria del dominio di integrazione e considerato che la funzione integranda è simmetrica rispetto all'origine si ha che

$$\int\int_B (\sqrt{3}x + 3y)\,dx\,dy = -\int_A (\sqrt{3}x + 3y)\,dx\,dy$$

pertanto

$$V(C) = -2\int_A (\sqrt{3}x + 3y)\,dx\,dy.$$

A questo punto passiamo in coordinate polari: si pone $x = 2\,\rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$ con $0 \leq \rho \leq 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, da cui

$$A = \{(\rho,\theta) : \ 0 \leq \rho \leq 1, \ \theta \in \left[\frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right]\}.$$

Quindi, ricordando che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è 2ρ, si ha

$$\begin{aligned} V(C) &= 2\int_0^1\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} 2\rho\,(-\sqrt{3}\,2\rho\,\cos\theta - 3\rho\,\sin\theta)\,d\rho\,d\theta \\ &= 2\int_0^1\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} 2\rho\,(-\sqrt{3}\,2\rho\,\cos\theta - 3\rho\,\sin\theta)\,d\rho\,d\theta \\ &= 2\left[\int_0^1 -4\sqrt{3}\,\rho^2 d\rho\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\cos\theta\,d\theta - \int_0^1 6\rho^2\,d\rho\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\sin\theta\,d\theta\right] \\ &= 2\left[\left(-4\sqrt{3}\,\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(\sin\theta\Big|_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\right) - (2\rho^3\Big|_0^1)\,(-\cos\theta)\Big|_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}\right] \\ &= \left[-\frac{4}{3}\sqrt{3}\,(-1) + 2\sqrt{3}\right] = \frac{20}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.4.3.**

Assegnati il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ ed il piano di equazione $z = 4x - 12y$ si calcoli il volume racchiuso dalle due superfici.

Sia S il volume racchiuso dalle due superfici considerate. Si ha

$$\mathrm{Vol}(S) = \int\int_A\int_{x^2+y^2}^{4x-12y} dz\,dx\,dy$$

dove

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \, 4x - 12y \geq \, x^2 + y^2\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \, (x-2)^2 + (y+6)^2 \leq \, 40\}$$

Quindi si ha

$$\mathrm{Vol}(S) = \int\int_A (4x - 12y - x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

Faccio il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x - 2 = \rho\,\cos\theta \\ y + 6 = \rho\,\sin\theta \end{cases}$$

con le limitazioni $0 \leq \rho \leq \sqrt{40}$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è ρ, dunque si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S) &= \int\int_A (4x - 12y - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{40}}\int_0^{2\pi}(40 - \rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta \\ &= 2\pi\left(20\,\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{40}} = 2\pi(800 - 400) = 800\pi. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.4.4.**

Se $C = \{x^2 + y^2 - 2z^2 \leq 0,\ \ 0 \leq z \leq 4\}$ quale delle seguenti condizioni implica che

$$\int\int\int_C f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0?$$

$$(a) f(x,-y,-z) = -f(x,y,z); \qquad (b) f(x,-y,z) = f(x,y,z);$$
$$(c) f(-x,y,z) = -f(x,y,z); \qquad (d) f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$$

Si ha

$$C \cap \{\text{primo ottante}\} = C_1 = \{(x,y,z) \in C;\ x, y\ \geq 0\};$$
$$C \cap \{\text{secondo ottante}\} = C_2 = \{(x,y,z) \in C;\ x, \leq\ 0,\ y \geq\ 0\};$$
$$C \cap \{\text{terzo ottante}\} = C_3 = \{(x,y,z) \in C;\ x \leq\ 0,\ y \leq\ 0\};$$
$$C \cap \{\text{quarto ottante}\} = C_4 = \{(x,y,z) \in C;\ x \geq\ 0, y \leq\ 0\}.$$

Allora

$$\begin{aligned}\int\int\int_C f\,dx\,dy\,dz \quad &= \quad \int\int\int_{C_1} f\,dx\,dy\,dz + \int\int\int_{C_2} f\,dx\,dy\,dz \\ &\quad + \int\int\int_{C_3} f\,dx\,dy\,dz + \int\int\int_{C_4} f\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Se $f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$ allora

$$\int\int\int_{C_1} f\,dx\,dy\,dz = -\int\int\int_{C_2} f\,dx\,dy\,dz$$

e

$$\int\int\int_{C_4} f\,dx\,dy\,dz = -\int\int\int_{C_3} f\,dx\,dy\,dz$$

quindi

$$\int\int\int_C f\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Infatti, per esempio, C_1 e C_2 sono simmetrici rispetto all'asse y (ribaltamento da x a $-x$) e f è dispari rispetto a x e quindi cambia di segno, ma resta uguale in valore assoluto tra (x,y,z) e il suo simmetrico rispetto all'asse y che è $(-x,y,z)$. Se ne deduce che ciò che integro di f su C_1 è l'opposto di ciò che integro su C_2.
Consideriamo il cambiamento di variabili

$$\varphi : C_2 \to C_1 \qquad (x,y,z) \mapsto (-x,y,z)$$

con $C_2 = \varphi^{-1}(C_1)$. Allora $|\det J_\varphi(x,y,z)| = 1$. Quindi

$$\begin{aligned} \iiint_{C_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \iiint_{\varphi^{-1}(C_1)} f(\varphi(x,y,z))\,|\det J_\varphi(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_{C_2} f(-x,y,z)\,dx\,dy\,dz = -\iiint_{C_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \end{aligned}$$

N.B.: la terna $(x,y,z) \in C_2$ gioca il ruolo della terna (u,v,w), nuove coordinate nell'usuale formulazione del cambiamento di variabili. Qui abbiamo mantenuto lo stesso nome (x,y,z) per semplicità.

✍ **Esercizio 1.4.5.**

Sia

$$V = \left\{ (x,y,z) : \ z^2 \geq \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2, \ \ 0 \leq z \leq 1 - \frac{x}{2} \right\}.$$

Calcolate

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

Prima di tutto osserviamo che

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2} = 1 - \frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1,$$

quindi la condizione sulla z diventa

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2} \leq \ z \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

Poniamo

$$A = \left\{ (x,y) : \ x^2 + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} \leq \ 1 \right\}$$

Osserviamo che dalla condizione su z si deduce che deve essere $x \leq \ 2$, che va bene in A. Allora si ha

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \iint_A \int_{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2}}^{1-\frac{x}{2}} z\,dz\,dx\,dy = \frac{1}{2} \iint_A \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 - y^2 \right)\,dx\,dy.$$

Passiamo in coordinate polari ponendo

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \rho\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \rho \leq 1, \ \ \theta \in [0, 2\pi)$$

Tenendo conto che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è $\frac{\sqrt{3}}{2}\rho$, si deduce

$$\int\int\int_V z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{3}{4}\int\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\,(1-\rho^2)\,d\rho\,d\theta = \frac{3}{8}\sqrt{3}\,\pi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{32}\sqrt{3}\,\pi.$$

✍ **Esercizio 1.4.6.**

Sia $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le e^{-x}\sqrt{x}\}$ e sia V il solido generato dalla rotazione di A intorno all'asse x;
a) disegnate gli insiemi A e V;
b) determinate il volume di V;
c) calcolate l'integrale su V della funzione $\dfrac{\sqrt{z^2+y^2}}{x\sqrt{x}}$.

Se poniamo $f(x) = e^{-x}\sqrt{x}$ si ha $f(0)=0$, $f(1)=1/e$, $f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ dunque

$$f'_+(0) = +\infty, \qquad f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Volume di V :

$$\mathrm{vol(V)} = \int_V 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_{S_x} 1\,dy\,dz\right)dx,$$

ma $S_x = \{(y,z) : \sqrt{y^2+z^2}\le e^{-x}\sqrt{x}\}$ è un cerchio di raggio $e^{-x}\sqrt{x}$ quindi ha area $\pi x e^{-2x}$, da cui

$$\mathrm{vol(V)} = \int_0^1 \pi x e^{-2x}\,dx = \left[-\pi e^{-2x}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4e^2}.$$

Invece per l'integrale, usando su S_x le coordinate polari (in y e z) si ha

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x\sqrt{x}}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\int_{S_x}\sqrt{z^2+y^2}\,dy\,dz\right)dx\\
&= \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{e^{-x}\sqrt{x}}\rho\,\rho\,d\rho\right)d\theta\right]dx\\
&= \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,2\pi\left(\int_0^{\sqrt{x}e^{-x}}\rho^2\,d\rho\right)dx = \int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x}}\,2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{x}e^{-x}}dx\\
&= \int_0^1 \frac{2\pi}{3}e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{2\pi}{9}e^{-3x}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{9}(1-e^{-3}).
\end{aligned}$$

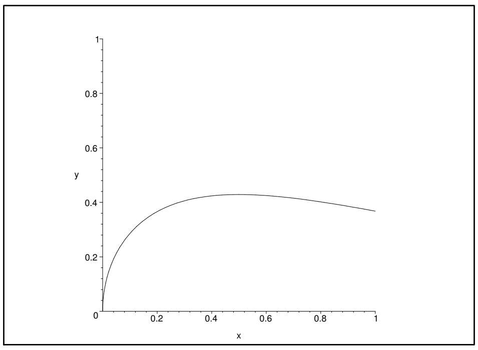


Figura 1.2: Insieme A.

✍ **Esercizio 1.4.7.**

Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq x^2,\ \ 0 \leq z \leq (x-1)^2\}$;
a) disegnate A;
b) determinate il volume di A;
c) degli "spigoli" di A, ve n'è uno che non giace su alcuno dei piani coordinati; trovatene una parametrizzazione e determinate la retta tangente a tale spigolo nel punto corrispondente a $x = 0$.

L'insieme A sta "sotto" alla superficie $z = (x-1)^2$ e "a sinistra" di $y = x^2$.

$$\mathrm{Vol(A)} = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{(x-1)^2} dz\, dy\, dx = \int_0^1 x^2(x-1)^2\, dx = \int_0^1 x^4 - 2x^3 + x^2\, dx = \frac{1}{30}.$$

Una parametrizzazione dello spigolo richiesto dal testo è $(x, x^2, (x-1)^2$, quindi il vettore tangente è $(1, 2x, 2x-2)$, che per $x = 0$ vale $(1, 0, -2)$. Poiché il unto corrispondente a $x = 0$ è $(0, 0, 1)$ la retta è $(0, 0, 1) + t(1, 0, -2)$.

✍ **Esercizio 1.4.8.**

Sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq 2,\ \ 0 \leq z \leq 2,\ \ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$. Disegnate C e determinatene il volume.

Si ha il cubo $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ al quale è stata tolta l'intersezione con la sfera unitaria

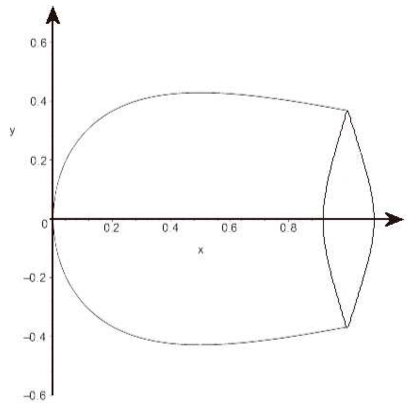


Figura 1.3: Insieme V.

di centrata nell'origine (cioè un ottavo di sfera). Il volume si calcola con facili integrali oppure semplicemente scrivendo

$$V = 2^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 8 - \frac{\pi}{6}.$$

✍ **Esercizio 1.4.9.**

Dato l'insieme $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$, disegnatelo e descrivetelo a parole, quindi calcolate

$$\int_T x^2 z^2 \, dx \, dy \, dz.$$

$x^2 + y^2 \leq 4$ è il cilindro di asse l'asse z e $R = 2$. Invece $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ è il cono circolare

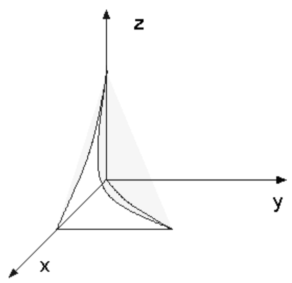


Figura 1.4: Insieme A.

di vertice l'origine. T è il cilindro (con $0 \leq z \leq 2$ al quale si toglie il cono).

$$\begin{aligned}\int_T x^2 z^2\, dx\, dy\, dz &= \int_{x^2+y^2\leq 4} dx\, dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} x^2 z^2\, dz = \int_{x^2+y^2\leq 4} x^2 \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy \\ &= \int_{x^2+y^2\leq 4} \frac{x^2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{3}\, dx\, dy = \int_0^2 d\,\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\rho^6\cos^2\theta}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{\rho^7}{7}\right]_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{128}{21}\left[\frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta)\right]_0^{2\pi} = \frac{128}{21}\pi.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.4.10.**

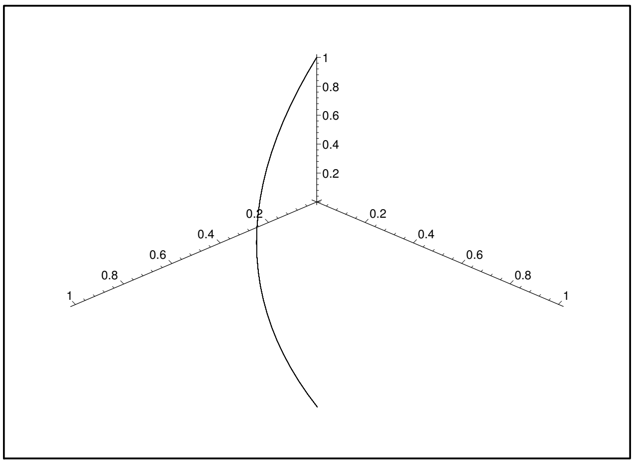


Figura 1.5: Lo spigolo che non appartiene ad alcun piano coordinato.

Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$E = \{(x, y, z) : -1 \leq y \leq 0,\ 0 \leq z \leq 4 - x^2\}.$$

Calcolate:
a) il volume di E;
b) l'integrale di $f(x, y, z) = x(1 - y)$ su E.

$$\text{Volume di } E = \text{area di base} \cdot \text{altezza} = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx \cdot h = \frac{32}{3}.$$

$$\int_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Infatti

$$\iint_{[-2,2]\times[-1,0]} x(1 - y)\, dx\, dy \int_0^{4-x^2} dz = \left(\int_{-2}^{2} x(4 - x^2)\, dx\right) \cdot \left(\int_{-1}^{0} (1 - y)\, dy\right)$$

$$= \left(\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2}\right) \cdot \left(\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right) = 0 \cdot \frac{3}{2} = 0.$$

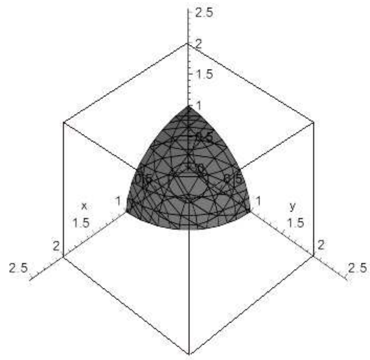


Figura 1.6: Insieme C.

✍ **Esercizio 1.4.11.**

> Sia T il triangolo contenuto nel piano xy, con vertici $(-1,3)$, $(-1,-3)$, $(2,0)$. Calcolare il volume del solido S interno al prisma retto di base T e compreso tra le superfici di equazioni $z = 2 - x^2$ e $z = 1$.

Prima di tutto vediamo quando $2 - x^2 \geq 1$. Questo accade quando $x^2 \leq 1$ cioè $-1 \leq x \leq 1$. D'altra parte, il triangolo T è un dominio y-semplice che può essere descritto come

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \ x \leq 2 \ \ x - 2 \leq y \leq -x + 2\}$$

Quindi si ha (integrazione per fili)

$$
\begin{aligned}
V(S) &= \int\int\int_S 1\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1}\int_{x-2}^{2-x}\int_{1}^{2-x^2} dz\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{x-2}^{2-x}\int_{2-x^2}^{1} dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x-2}^{2-x}(1-x^2)\,dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{x-2}^{2-x}(x^2-1)\,dx\,dy \\
&= \int_{-1}^{1} 2(1-x^2)(2-x)\,dx + \int_{1}^{2} 2(x^2-1)(2-x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}(4-2x-4x^2+2x^3)\,dx + \int_{1}^{2}(4x^2-2x^3-4+2x)\,dx \\
&= \left(4x - x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{2} - 4x + x^2\right)\Bigg|_{1}^{2} \\
&= 4 - 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + 4 + 1 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{32}{3} - 8 - 8 + 4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + 4 - 1 = \frac{37}{6}.
\end{aligned}
$$

✍ **Esercizio 1.4.12.**

Se $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2z^2 \le 0,\ 0 \le z \le 4\}$ quale delle seguenti condizioni implica che

$$\int\int\int_C f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0?$$

$(a) f(x,-y,-z) = -f(x,y,z)$ $\qquad$ $(b) f(x,-y,z) = f(x,y,z)$

$(c) f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$ $\qquad$ $(d) f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$

Si ha che C è il cono con $0 \le z \le 4$. Affinché l'integrale di f su C sia 0, devo avere f dispari in x oppure in y, quindi l'unica risposta corretta è la (c).

1.4.2. Cambiamenti di coordinate

✍ **Esercizio 1.4.13.**

Sia
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1,\ \ 0 \le z \le 3\sqrt{x^2+y^2}\};$$
a) disegnate l'insieme A;
b) determinare il volume di A;
c) calcolate l'integrale su A della funzione
$$\frac{z}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

a) L'insieme A è costituito da un cilindro (di equazione $x^2+y^2 \le 1$) a cui è stato tolto il dominio di $\mathbb{R}^3$ occupato da un cono circolare retto di vertice nell'origine (e di equazione $z = 3\sqrt{x^2+y^2}$).
b) Si ha
$$\text{Vol } A = \iiint_A 1\,dx\,dy\,dz.$$
Data la simmetria del problema operiamo un cambio di coordinate. Passiamo a considerare le coordinate cilindriche
$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$
L'insieme A viene allora descritto nel seguente modo nelle nuove coordinate
$$A = \{(\rho,\theta,z) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} : 0 \le \rho \le 1,\ \ 0 \le z \le 3\,\rho\}$$
mentre il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è ρ. Si ha allora
$$\begin{aligned}\text{Vol } A &= \iiint_A 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3\rho} \rho\,dz\,d\theta\,d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho\,[z]_0^{3\rho}\,d\rho = 2\pi \int_0^1 3\,\rho^2\,d\rho = 2\pi.\end{aligned}$$
c) Invece (di nuovo passo a coordinate cilindriche)
$$\iiint_A \frac{z}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3\rho} \frac{z}{(1+\rho^2)\,\rho}\rho\,dz\,d\theta\,d\rho$$
$$= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{1+\rho^2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{3\rho} d\rho = 9\pi \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\,d\rho = 9\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\rho^2}\right) d\rho$$
$$= 9\pi - 9\pi\,[\arctan\rho]_0^1 = 9\pi(1-\arctan 1) = 9\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

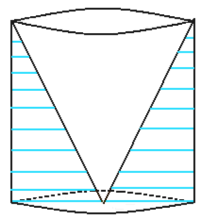


Figura 1.7: Insieme A.

1.4.3. Calcolo di aree e volumi

✍ **Esercizio 1.4.14.**

Calcolare l'area dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e il volume dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in forma canonica attraverso il cambio di coordinate

$$x = a\rho\cos\theta \qquad y = b\rho\sin\theta.$$

(determinante della matrice Jacobiana della trasformazione $ab\rho$).

Per l'ellisse si ha

$$\text{area}(E) = \iint_E 1\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} ab\rho\,d\rho d\theta = a\,b\,\pi.$$

Per quanto riguarda l'ellissoide invece, un modo per calcolare il volume è calcolare il volume della zona tra la superficie $z = c\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$ e il piano $z = 0$ e sommare l'OPPOSTO dell'integrale della superficie $z = -c\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$ (che rappresenta il volume con segno della zona tra tale superficie e il piano $z = 0$). In totale si ha (usando poi il cambio di coordinate richiesto)

$$V(E) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} a\, b\, 2\, c\, \rho \sqrt{1-\rho^2}\, d\rho\, d\theta = 4\,\pi\, a\, b\, c \left[-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c.$$

dove l'equazione della superficie da integrare è stata ricavata direttamente dall'equazione dell'ellissoide.

✍ **Esercizio 1.4.15.**

Calcolare l'area del dominio

$$D = \{(x, y) : 0 \le y \le 1,\ y^2 - 1 \le x \le \sqrt{1 - y^2}\}.$$

Il dominio D è $x-$semplice. Si ha

$$\text{area}(D) = \int_0^1 dy \int_{y^2-1}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \int_0^1 (\sqrt{1-y^2} - (y^2 - 1))\, dy.$$

A questo punto ricordiamo che, attraverso la sostituzione $y = \sin t$ si ottiene la seguente primitiva

$$\int \sqrt{1-y^2}\, dy = \int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}[t + \sin t \cos t] + C = \frac{1}{2}(y\sqrt{1-y^2} + \arcsin y) + C.$$

Si noti che siamo nell'intervallo corretto per poter invertire la funzione seno. A questo punto dunque

$$\text{area}(D) = \int_0^1 (\sqrt{1-y^2} - (y^2-1))\, dy = \frac{1}{2}\arcsin 1 - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 + [y]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}.$$

✍ **Esercizio 1.4.16.**

Calcolare il volume della regione sotto il grafico del paraboloide (usando coordinate cartesiane)

$$V = \{(x, y, z) : z < 1 - x^2 - y^2;\ x^2 + y^2 < 1\}.$$

Si ha

$$V = \iint_{x^2+y^2<1} (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

dove abbiamo notato che nel dominio $x^2 + y^2 < 1$ la funzione integranda è positiva (altrimenti si sarebbe trattato di un integrale con segno, visto che il volume per definizione deve essere una quantità positiva).
Siccome la funzione è pari e il dominio è simmetrico, indicando con Q il quarto di cerchio (per esempio contenuto nel primo quadrante) e C il cerchio intero $x^2 + y^2 < 1$, per simmetria si ha

$$\begin{aligned} V &= \iint_C 1\, dx\, dy - \iint_C x^2\, dx\, dy - \iint_C y^2\, dx\, dy \\ &= |C| - 4\iint_Q x^2\, dx\, dy - 4\iint_Q y^2\, dx\, dy = |C| - 8\iint_C x^2\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Calcoliamo dunque (con le coordinate cartesiane come richiesto dall'esercizio)

$$\iint_Q x^2\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\, dx\, dy = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Calcoliamo prima di tutto la primitiva del precedente integrale. Con un cambio di variabile, ponendo $x = \sin t$, si ha

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx &= \int \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \int \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]^2 dt \\ &= \frac{t}{8} - \frac{1}{8}(\sin t \cos t)(1 - 2\sin^2 t) + C = \frac{\arcsin x}{8} - \frac{x}{8}\sqrt{1-x^2}(1 - 2x^2) + C. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{16}.$$

Pertanto riassumendo

$$V = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Lo stesso esercizio può essere risolto più velocemente con le coordinate polari.

✍ **Esercizio 1.4.17.**

Calcolare l'area del dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x \leq 2y \leq \sqrt{3}x,\ x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Il dominio D è costituito da uno spicchio di ellisse compreso tra le rette $y = x/2$ e $y = (\sqrt{3}x)/2$.

Si tratta di un dominio regolare unione (per esempio) di due domini y-semplici. Calcoliamo:
- il punto di intersezione dell'ellisse con la retta $y = x/2$: $A = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
- il punto di intersezione dell'ellisse con la retta $y = (\sqrt{3}x)/2$: $B = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
- il punto di intersezione della retta $x = 1$ con la retta $y = x/2$: $C = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

A questo punto:

$$\begin{aligned}\text{area}(D) &= \int_0^1 \int_{x/2}^{(\sqrt{3}x)/2} 1\,dx\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{x/2}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} 1\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) x\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}\,dx - \frac{1}{4}(2-1).\end{aligned}$$

A questo punto

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx &= 2\int \sqrt{1-t^2}\,dt = 2\int \cos^2 z\,dz = 2\left[\frac{z}{2} + \frac{\sin z \cos z}{2}\right] + C \\ &= \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + C\end{aligned}$$

da cui

$$\text{area}(D) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

N.B.: Si noti come in coordinate polari $x = 2\cos\theta$, $y = \sin\theta$ si avrebbe molto più agevolmente:

$$D = \left\{(\rho, \theta) : \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3};\ 0 \le \rho \le 1\right\}$$

e

$$\text{area}(D) = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_0^1 2\rho\,d\rho d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

✍ **Esercizio 1.4.18.**

Calcolare l'area del dominio di $\mathbb{R}^2$

$$D = \{(x, y) : y > 0,\ |\ln y| < 1,\ |x - y\ln y| < 1\}.$$

➻ **Hint:** La disequazione $|\ln y| < 1$ rappresenta la striscia sulle ordinate compresa tra $1/e$ e e dunque $\frac{1}{e} < y < e$. La disequazione $|x - y\ln y| < 1$ rappresenta la zona compresa tra le curve

$x = y \ln y - 1$ e $x = y \ln y + 1$.
Dunque

$$\text{area}(D) = \int_{1/e}^{e} dy \int_{y \ln y - 1}^{y \ln y + 1} dx = \int_{1/e}^{e} 2\, dy = 2\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

✍ **Esercizio 1.4.19.**

Calcolare il volume della regione sotto il grafico del paraboloide usando le coordinate polari

$$V = \{(x, y, z) : z < 1 - x^2 - y^2;\ x^2 + y^2 < 1\}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2<1} (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - \rho^2)\, \rho d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3)\, d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.4.20.**

Calcolare il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse z delimitato dal piano $z = 0$ e dalla superficie $z = y(2 - x^2 - y^2)$ che si proietta su

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 2x + y^2 \le 0,\ y \ge x\}.$$

Il dominio T è tutto contenuto all'interno della circonferenza $x^2 - 2x + y^2 = 0$ dove l'integranda è positiva, perciò risulta

$$V = \int\int_T y(2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Usando le coordinate polari, la circonferenza di raggio 1 e centro $(1, 1)$ ha equazione $\rho = 2\cos\theta$. Espresso in coordinate polari, il dominio T quindi diventa

$$T = \left\{ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le \rho \le 2\cos\theta \right\}.$$

A questo punto allora

$$\begin{aligned} V &= \int\int_T y(2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 (2 - \rho^2)\, d\rho \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \left[\frac{2}{3}\rho^3 - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^{2\cos\theta} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta \left[\frac{16}{3}\cos^3\theta - \frac{32}{5}\cos^5\theta \right] d\theta \\ &= \frac{16}{12}[\cos^4\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} - \frac{32}{30}[\cos^6\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{16}{12}\,\frac{1}{4} - \frac{32}{30}\,\frac{1}{8} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

1.4.4. Applicazioni fisiche (integrali tripli)

✍ **Esercizio 1.4.21.**

Si calcoli il baricentro della parte interna di una semisfera D di raggio 1 con base sul piano $z = 0$. La densità dell'oggetto sia $f(\rho, \varphi, \theta) = 2 - \rho$ (quindi l'oggetto sarà più pesante vicino al centro e più leggero verso l'esterno).

Per la simmetria del problema (sia del solido che della densità) sicuramente il baricentro giace sull'asse z, quindi se indichiamo con $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ le coordinate del baricentro si ottiene subito $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Quindi occorre solo calcolare la massa totale della semisfera e la terza coordinata del baricentro. Per farlo usiamo le coordinate sferiche: il modulo del determinante della matrice Jacobiana risulta $\rho^2 \sin\varphi$. Per la massa totale si ha

$$\begin{aligned}
M &= \int\int\int_D f(\rho,\varphi,\theta)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (2-\rho)\,\rho^2 \sin\varphi d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{2}{3}\rho^3 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{5}{12}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = \frac{5}{12}\int_0^{2\pi}[-\cos\varphi]_0^{\pi/2} d\theta = \frac{5}{6}\pi.
\end{aligned}$$

A questo punto

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{M}\int\int\int_D z f(\rho,\varphi,\theta)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\cos\varphi(2-\rho)\,\rho^2\sin\varphi d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \sin\varphi\cos\varphi d\varphi\, d\theta \\
&= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{3}{10}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta = \frac{1}{M}\frac{3}{10}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\cos 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} d\theta = \frac{9}{25}.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.4.22.**

Si calcoli il momento di inerzia (rispetto all'asse di rotazione) di una sfera di raggio R ruotante attorno ad una retta tangente.

Prendiamo come asse di rotazione per esempio la retta di equazioni $x = R$ e $y = 0$. La distanza di un generico punto di coordinate (x, y, z) da questa retta è data da $\delta(x, y, z) = \sqrt{(R-x)^2 + y^2}$. A questo punto il momento di inerzia della sfera S è

$$I = \int\int\int_S [(R-x)^2 + y^2]\, dx\, dy\, dz.$$

Se passiamo a coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi & 0 \le \rho \le R \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = \rho\cos\varphi & 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

il precedente integrale diventa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho^2\sin\varphi(R^2 - 2R\rho\cos\theta\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi^2)d\rho\, d\theta\, d\varphi \\ &= 2\pi\int_0^{\pi} R^2\frac{R^3}{3}\sin\varphi\, d\varphi - \int_0^{\pi} 2R\,\frac{R^4}{4}\sin^2\varphi\, d\varphi\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta + 2\pi\int_0^{\pi}\frac{R^5}{5}\sin^3\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{2}{3}\pi R^5[-\cos\varphi]_0^{\pi} + \frac{R^5}{2}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi[\sin\theta]_0^{2\pi} + \frac{2}{5}\pi R^5\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{3}\pi R^5 + 0 + \frac{2}{5}\pi R^5\left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] \\ &= \frac{4}{3}\pi R^5 + \frac{8}{15}\pi R^5 = \frac{28}{15}\pi R^5. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.4.23.**

> Si calcoli il momento di inerzia di un guscio sferico di raggio interno 2 e raggio esterno 3 ruotante attorno a un diametro.

Prendiamo come asse di rotazione per esempio l'asse z. La distanza di un generico punto di coordinate (x, y, z) da questa retta è data da $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. A questo punto il momento di inerzia del guscio sferico G è

$$I = \int\int\int_G [x^2 + y^2]\, dx\, dy\, dz.$$

Se passiamo a coordinate sferiche (con le opportune limitazioni)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi & 2 \le \rho \le 3 \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = \rho\cos\varphi & 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

il precedente integrale diventa

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_2^3 \rho^2 \sin\varphi(\rho^2\sin^2\varphi^2)d\rho\, d\theta\, d\varphi \\
&= 2\pi\int_0^{\pi}\int_2^3 \rho^4\sin^3\varphi\, d\rho\, d\varphi \\
&= 2\pi\frac{3^5-2^5}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi \\
&= \frac{422}{5}\pi\left[-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{422}{5}\pi\frac{4}{3} = \frac{1688}{15}\pi.
\end{aligned}$$

1.5. Esercizi senza soluzione

N.B. *sarò grata agli studenti che vorranno inviarmi copia della loro soluzione*

✍ **Esercizio 1.5.1.**

Dopo aver verificato l'integrabilità delle funzioni sottoassegnate sull'insieme indicato, si calcoli l'integrale $\iint_D f$

$$a) f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2} \qquad D = [3,4]\times[1,2]$$

$$b) f(x,y) = \begin{cases} x+y & x+y-1\geq 0 \\ 2x-y^2 & x+y-1<0 \end{cases} \qquad D=[0,1]\times[0,1]$$

$$c) f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2/2 \leq y \leq x^2,\ \ 1<x<2\}$$

$$d) f(x,y) = \frac{\sin y^2}{y} \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq y^2,\ \ 0<y\leq\sqrt{\pi}\}$$

$$e) f(x,y) = xy \qquad T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 2x-x^2\}$$

$$f) f(x,y) = e^{x+y} \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\leq 1\}$$

$$g) f(x,y) = |y-x| \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq x\leq 1,\ \ x^2\leq y\leq 1\}$$

✍ **Esercizio 1.5.2.**

Si calcoli l'integrale di

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

sulla regione

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x,\ \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

✍ **Esercizio 1.5.3.**

Dati gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

determinare l'area di $A \cap B$.

✍ **Esercizio 1.5.4.**

Dato l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ si calcolino gli integrali

$$a) \int_E y \arcsin x dxdy \qquad b) \int_E x\sqrt{1 - y^2} dxdy \qquad c) \int_E xe^y dxdy$$

✍ **Esercizio 1.5.5.**

Dato il triangolo T di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ si calcolino gli integrali

$$a) \int_T \frac{y}{1 + x + y} dxdy \qquad b)^* \int_T \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}} dxdy$$

✍ **Esercizio 1.5.6.**

Dati gli insiemi

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1\right\} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

determinare l'area di $A \cap B$.

✍ **Esercizio 1.5.7.**

Sia E il settore del cerchio di centro l'origine e raggio 1 delimitato dalle semirette di equazione: $y = \pm\sqrt{3}x, \ \ x \geq 0$. Calcolare gli integrali:

$$a) \int_E x^2 dxdy \qquad b) \int_E xe^{2y} dxdy$$

✍ **Esercizio 1.5.8.**

Sia E la porzione di corona circolare di raggi 1 e 2 contenuta nel primo quadrante. Calcolare gli integrali

$$a) \int_E \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dxdy \qquad b) \int_E xe^y dxdy \qquad c) \int_E x \arctan \frac{x}{y} dxdy$$

✍ **Esercizio 1.5.9.**

Si calcoli

$$\iint_T xy \sin(xy) dxdy$$

con

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, \ \frac{2}{x}\pi \leq y \leq \frac{3}{x}\pi, \ x > 0\}$$

utilizzando un cambiamento di variabili che trasformi T in un rettangolo.

✍ **Esercizio 1.5.10.**

Si calcoli l'area della regione di piano

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2, \ \frac{y^2}{2} \leq x \leq y^2\}$$

✍ **Esercizio 1.5.11.**

Si calcoli, utilizzando un'opportuna trasformazione

$$\iint_T x^2(y - x^3)e^{y+x^3}dxdy$$

dove

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 3, \quad x \geq 1\}$$

✍ **Esercizio 1.5.12.**

Dato l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x,\ 1 < xy < 2\}$ calcolare gli integrali

$$a) \int_E dxdy \qquad b) \int_E (x + y)dxdy$$

✍ **Esercizio 1.5.13.**

Dato l'insieme E delimitato dalle rette $y = x$, $y = 2x$, $y + x = 2$, $y + 2x = 2$, calcolare gli integrali:

$$a) \int_E \frac{dxdy}{x^2y} \qquad b) \int_E \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^2} \qquad c) \int_E dxdy$$

(N.B. Osservare che si ha: $1 < y/x < 2,\ 1 < (2 - y)/x < 2$)

✍ **Esercizio 1.5.14.**

Dato l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq ye^{-x} \leq 2,\ 2 \leq ye^x \leq 3\}$ calcolare gli integrali

$$a) \int_E dxdy \qquad b) \int_E ydxdy \qquad c) \int_E e^x ydxdy$$

✍ **Esercizio 1.5.15.**

Si calcoli il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse z delimitata dal piano $z = 0$ e dalla porzione di superficie di equazione $z = (x^2 + y^2)y$ che si proietta in

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq R^2,\ x^2 + 4y^2 \leq 4R^2\}$$

✍ **Esercizio 1.5.16.**

Dato il tetraedro T di vertici $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, calcolare gli integrali

$$\iint_T x(y+z)dxdydz \qquad \iint_T xye^z dxdydz \qquad \iint_T \frac{dxdydz}{1+x+y+z}$$

✍ **Esercizio 1.5.17.**

Determinare il volume del solido delimitato dal grafico di

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

dal piano $z=0$ e dalle condizioni:

$$1 \leq y \leq 3, \;\; y \geq x^2, \;\; y \geq -\sqrt{3}x$$

✍ **Esercizio 1.5.18.**

Dopo aver verificato l'integrabilità delle funzioni sottoassegnate sull'insieme indicato, si calcoli l'integrale $\iiint_S f$

$$a) f(x,y,z) = \frac{x+y}{z} \qquad S = [0,1]\times[0,1]\times[1,2]$$
$$b) f(x,y,z) = y^2 z \qquad S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq x,\, 0 \leq z \leq xy\}$$
$$c) f(x,y,z) = \frac{1}{(y+1)^3} \qquad S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\, 0 < z < 1,\, 0 < y < x+z\}$$
$$d) f(x,y,z) = xyz \qquad S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0 < x < 2,\, 0 < y < x,\, 0 < z < y\}$$
$$e) f(x,y,z) = y(x+e^x) \qquad S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2+1 \geq 0,\, |y| \leq 1-x^2\}$$

✍ **Esercizio 1.5.19.**

Si calcoli il volume della regione S interna al cilindro di equazione $x^2+y^2=1$, compresa tra il paraboloide $z=x^2+y^2-2$ ed il piano $x+y+z=4$.

✍ **Esercizio 1.5.20.**

Si calcolino gli integrali:

$$a) \iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z^2-x^2-y^2 \leq 0,\ z \geq 0\}$$
$$b) \iiint_S \frac{x^2}{x^2+z^2}dxdydz$$
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 2,\ x^2-y^2+z^2 < 0,\ y > 0\}$$

utilizzando opportuni cambiamenti di variabili, dopo aver verificato che l'integrale esiste.

✍ **Esercizio 1.5.21.**

Si calcoli il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse z compreso tra il dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2,\ \ x \geq 1/2\}$$

e la parte di superficie di equazione $z = \log(xy)$ che si proietta su T.

✍ **Esercizio 1.5.22.**

Dato l'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq y-x\}$ si calcolino gli integrali

$$a) \int_E (x+\sin z)dxdydz \qquad b) \int_E \arctan(x+y)dxdydz$$

✍ **Esercizio 1.5.23.**

Dato l'insieme $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, calcolare gli integrali

$$a) \int_B x^2dxdydz \qquad b) \int_B \log(1+x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

✍ **Esercizio 1.5.24.**

Determinare il volume dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4,\ x^2 + y^2 + z^2 < 16\}$$
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$$
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x^2 + y^2) < z^2 < x^2 + y^2 + 25\}$$