Metodo di Galerkin: elementi finiti per problemi ellittici

Condizioni di Cauchy-Dirichlet omogenee

$$\begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) & x \in [0, L] \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

Dato un problema di Cacuhy-Dirichlet in forma generale come segue è possibile passare al problema in forma debole:

$$\begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) & x \in [0, L] \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

$$-\int_0^L a(x)u'v'dx + \int_0^L b(x)u'vdx + \int_0^L c(x)uvdx = \int_0^L f(x)vdx$$

Se i coefficienti $a(x) = a$, $b(x) = b$, $c(x) = c$ sono costanti allora la matrice A è simmetrica e può essere calcolata così:

$$A = \frac{a}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \end{bmatrix} + ch\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \vdots \\ \vdots & \frac{1}{6} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Dove h è l'ampiezza dei sottointervalli. E la dimensione della matrice A è N ovvero la lunghezza del vettore dei nodi. Il vettore dei nodi (NON comprende gli estremi) si calcola come:

```
vert=[x0+h:h:xL-h]
```

A questo punto per risolvere l'equazione differenziale occorre calcolare il vettore dei termini noti $\vec{F}$. Per calcolare il vettore dei termini noti si scrive la funzione come function handle, poi la si valuta nei nodi e infine la si moltiplica per l'ampiezza degli intervalli dunque:

```
fun = @(x) -2.*exp(x).*cos(x);
f = h*fun(vert);
```

Poi si deve risolvere il sistema lineare $A\vec{u} = \vec{F}$, questo sistema lineare può essere risolto mediante metodi diretti (come la sostituzione in avanti e la sostituzione indietro dopo aver fatto la fattorizzazione LU della matrice A oppure mediante metodi iterativi come il metodo del gradiente oppure, il metodo del gradiente precondizionato coniugato che può essere richiamato in Matlab tramite il comando `pcg(A,f',1e-16,N)`.

<u>Attenzione:</u> f deve essere un vettore colonna e non un vettore riga altrimenti il comando non funziona. Si può così ricavare la soluzione esatta dell'equazione differenziali con condizioni al contro Dirchlet omogeneo.

Condizioni di Cauchy-Neuman (secondo estremo)

$$\begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) & x \in [0, L] \\ u(0) = 0 \\ au'(L) = g_N \end{cases}$$

Dato un problema di Cacuhy-Neumann in forma generale come segue è possibile passare al problema in forma debole:

$$\begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) & x \in [0, L] \\ u(0) = 0 \\ au'(L) = g_N \end{cases}$$

$$-\int_0^L a(x)u'v'dx + \int_0^L b(x)u'vdx + \int_0^L c(x)uvdx = \int_0^L f(x)vdx + g_N v(L)$$

Se i coefficienti $a(x) = a,\ b(x) = b,\ c(x) = c$ sono costanti allora la matrice A è simmetrica e può essere calcolata così:

$$A = \frac{a}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + ch\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \vdots \\ \vdots & \frac{1}{6} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Dove h è l'ampiezza dei sottointervalli. E la dimensione della matrice A è N ovvero la lunghezza del vettore dei nodi. Il vettore dei nodi (NON comprende il primo estremo mentre comprende il secondo) si calcola come:

```
vert=[x0+h:h:xL]
```

A questo punto per risolvere l'equazione differenziale occorre calcolare il vettore dei termini noti $\vec{F}$. Per calcolare il vettore dei termini noti si scrive la funzione come function handle, poi la si valuta nei nodi, la si moltiplica per l'ampiezza degli intervalli e infine si somma all'ultimo elemento del vettore il termine noto g_N dunque:

```
fun = @(x) 5.*x.^3+15.*x.^2-33.*x-3;
gN = 12;
f = h*fun(vert);
f(N)=f(N)+gN;
```

Poi si deve risolvere il sistema lineare $A\vec{u} = \vec{F}$, questo sistema lineare può essere risolto mediante metodi diretti (come la sostituzione in avanti e la sostituzione indietro dopo aver fatto la fattorizzazione LU della matrice A oppure mediante metodi iterativi come il metodo del gradiente oppure, il metodo del gradiente precondizionato coniugato che può essere richiamato in Matlab tramite il comando `pcg(A,f',1e-16,N)`.

<u>Attenzione:</u> f deve essere un vettore colonna e non un vettore riga altrimenti il comando non funziona. Si può così ricavare la soluzione esatta dell'equazione differenziali con condizioni al contro Dirchlet-Neumann.

Condizioni di Cauchy-Neuman (primo estremo)

$$\begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \qquad x \in [0, L] \\ u(L) = 0 \\ au'(0) = g_N \end{cases}$$

Dato un problema di Cacuhy-Neumann in forma generale come segue è possibile passare al problema in forma debole:

$$\begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \qquad x \in [0, L] \\ u(0) = 0 \\ au'(L) = g_N \end{cases}$$

$$-\int_0^L a(x)u'v'dx + \int_0^L b(x)u'vdx + \int_0^L c(x)uvdx = \int_0^L f(x)vdx + g_N v(L)$$

Se i coefficienti $a(x) = a,\ b(x) = b,\ c(x) = c$ sono costanti allora la matrice A è simmetrica e può essere calcolata così:

$$A = \frac{a}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \end{bmatrix} + ch\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \vdots \\ \vdots & \frac{1}{6} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Dove h è l'ampiezza dei sottointervalli. E la dimensione della matrice A è N ovvero la lunghezza del vettore dei nodi. Il vettore dei nodi (NON comprende il secondo estremo mentre comprende il primo) si calcola come:

```
vert=[x0:h:xL-h]
```

A questo punto per risolvere l'equazione differenziale occorre calcolare il vettore dei termini noti $\vec{F}$. Per calcolare il vettore dei termini noti si scrive la funzione come function handle, poi la si valuta nei nodi, la si moltiplica per l'ampiezza degli intervalli e infine si somma all'ultimo elemento del vettore il termine noto g_N dunque:

```
fun = @(x) 5.*x.^3+15.*x.^2-33.*x-3;
gN = 12;
f = h*fun(vert);
f(1)=f(1)+gN;
```

Poi si deve risolvere il sistema lineare $A\vec{u} = \vec{F}$, questo sistema lineare può essere risolto mediante metodi diretti (come la sostituzione in avanti e la sostituzione indietro dopo aver fatto la fattorizzazione LU della matrice A oppure mediante metodi iterativi come il metodo del gradiente oppure, il metodo del gradiente precondizionato coniugato che può essere richiamato in Matlab tramite il comando `pcg(A,f',1e-16,N)`.

<u>Attenzione:</u> f deve essere un vettore colonna e non un vettore riga altrimenti il comando non funziona. Si può così ricavare la soluzione esatta dell'equazione differenziali con condizioni al contro Dirchlet-Neumann.

Condizioni di Cauchy-Robin (secondo estremo)

$$\begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) & x \in [0, L] \\ u(0) = 0 \\ au'(L) + \gamma u(L) = r \end{cases}$$

Dato un problema di Cacuhy-Robin in forma generale come segue è possibile passare al problema in forma debole:

$$\begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) & x \in [0, L] \\ u(0) = 0 \\ au'^{(L)} + \gamma u(L) = r \end{cases}$$

$$-\int_0^L a(x)u'v'dx + \int_0^L b(x)u'vdx + \int_0^L c(x)uvdx + \gamma u(L)v(L) = \int_0^L f(x)vdx + rv(L)$$

Se i coefficienti $a(x) = a,\ b(x) = b,\ c(x) = c$ sono costanti allora la matrice A è simmetrica e può essere calcolata così:

$$A = \frac{a}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + ch\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \vdots \\ \vdots & \frac{1}{6} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & \gamma \end{bmatrix}$$

Dove h è l'ampiezza dei sottointervalli. E la dimensione della matrice A è N ovvero la lunghezza del vettore dei nodi. Il vettore dei nodi (NON comprende il primo estremomentre comprende il secondo) si calcola come:

```
vert=[x0+h:h:xL]
```

A questo punto per risolvere l'equazione differenziale occorre calcolare il vettore dei termini noti $\vec{F}$. Per calcolare il vettore dei termini noti si scrive la funzione come function handle, poi la si valuta nei nodi, la si moltiplica per l'ampiezza degli intervalli e infine si somma all'ultimo elemento del vettore il termine noto g_N dunque:

```
fun = @(x) 5.*x.^3+15.*x.^2-33.*x-3;
r = 12;
f = h*fun(vert);
f(N)=f(N)+r;
```

Poi si deve risolvere il sistema lineare $A\vec{u} = \vec{F}$, questo sistema lineare può essere risolto mediante metodi diretti (come la sostituzione in avanti e la sostituzione indietro dopo aver fatto la fattorizzazione LU della matrice A oppure mediante metodi iterativi come il metodo del gradiente oppure, il metodo del gradiente precondizionato coniugato che può essere richiamato in Matlab tramite il comando `pcg(A,f',1e-16,N)`.

<u>Attenzione:</u> f deve essere un vettore colonna e non un vettore riga altrimenti il comando non funziona. Si può così ricavare la soluzione esatta dell'equazione differenziali con condizioni al contro Dirchlet-Robin.
[<u>Attenzione</u>: In base alle condizioni di Robin bisogna compilare correttamente la matrice di rigidezza e il vettore noto, se infatti la condizioni di dirichlet $u(0) = 0$ è valida nel primo estremo allora bisogna popolare il termine noto e la matrice di rigidezza in posizione N, N. se invece la condizioni di dirichlet $u(L) = 0$ è valida nel secondo estremo allora bisogna popolare il termine noto e la matrice di rigidezza in posizione 1,1.]

Condizioni di Cauchy-Robin
(primo estremo)

$$\begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \qquad x \in [0, L] \\ u(L) = 0 \\ au'(0) + \gamma u(0) = r \end{cases}$$

Dato un problema di Cacuhy-Robin in forma generale come segue è possibile passare al problema in forma debole:

$$\begin{cases} -a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \qquad x \in [0, L] \\ u(L) = 0 \\ au'(0) + \gamma u(0) = r \end{cases}$$

$$-\int_0^L a(x)u'v'dx + \int_0^L b(x)u'vdx + \int_0^L c(x)uvdx + \gamma u(L)v(L) = \int_0^L f(x)vdx + rv(L)$$

Se i coefficienti $a(x) = a$, $b(x) = b$, $c(x) = c$ sono costanti allora la matrice A è simmetrica e può essere calcolata così:

$$A = \frac{a}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \end{bmatrix} + ch\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \vdots \\ \vdots & \frac{1}{6} & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \end{bmatrix}$$

Dove h è l'ampiezza dei sottointervalli. E la dimensione della matrice A è N ovvero la lunghezza del vettore dei nodi. Il vettore dei nodi (NON comprende il secondo estremo mentre comprende il primo) si calcola come:

```
vert=[x0:h:xL-h]
```

A questo punto per risolvere l'equazione differenziale occorre calcolare il vettore dei termini noti $\vec{F}$. Per calcolare il vettore dei termini noti si scrive la funzione come function handle, poi la si valuta nei nodi, la si moltiplica per l'ampiezza degli intervalli e infine si somma all'ultimo elemento del vettore il termine noto g_N dunque:

```
fun = @(x) 5.*x.^3+15.*x.^2-33.*x-3;
r = 12;
f = h*fun(vert);
f(1)=f(1)+r;
```

Poi si deve risolvere il sistema lineare $A\vec{u} = \vec{F}$, questo sistema lineare può essere risolto mediante metodi diretti (come la sostituzione in avanti e la sostituzione indietro dopo aver fatto la fattorizzazione LU della matrice A oppure mediante metodi iterativi come il metodo del gradiente oppure, il metodo del gradiente precondizionato coniugato che può essere richiamato in Matlab tramite il comando `pcg(A,f',1e-16,N)`.

<u>Attenzione:</u> f deve essere un vettore colonna e non un vettore riga altrimenti il comando non funziona. Si può così ricavare la soluzione esatta dell'equazione differenziali con condizioni al contro Dirchlet-Robin.
[<u>Attenzione</u>: In base alle condizioni di Robin bisogna compilare correttamente la matrice di rigidezza e il vettore noto, se infatti la condizioni di dirichlet $u(0) = 0$ è valida nel primo estremo allora bisogna popolare il termine noto e la matrice di rigidezza in posizione N, N. se invece la condizioni di dirichlet $u(L) = 0$ è valida nel secondo estremo allora bisogna popolare il termine noto e la matrice di rigidezza in posizione 1,1.]