Integrali impropri-funzioni integrali

1. Determinare una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{\log(\sin x)}{\tan x}$, e dire se converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

2. Determinare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}\,dx$.

3. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 e^{x\log x}(1+\log x)\,dx$.

4. Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log^2 x}{x}\,dx$.

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$.

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\log x}\,dx$.

4) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

5. Stabilire per quali valori del parametro reale λ convergono i seguenti integrali impropri:

1) $\displaystyle\int_0^1 (1+x^\lambda)^{-\log x}\,dx$, $\lambda > 0$.

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{(1-\cos x)^\lambda}\,dx$, $\lambda > 0$.

3) $\displaystyle\int_1^\lambda \frac{1}{(x-3)(x+\frac{5}{2})^{\frac{3}{2}}}\,dx$, $\lambda > 1$.

6. Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan\sqrt{t}\,dt$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa 3.

7. Sia $F(x) = \int_0^{3x} \log(\arctan t)\, dt$, calcolare $F'(\frac{1}{3})$.

8. Sia $F(x) = \int_0^{x} (t-1) \arctan t\, dt$, calcolare $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x^2}$, dedurne l'ordine di infinito.

9. Studiare le seguenti funzioni integrali, e tracciarne un grafico approssimativo:

1) $F(x) = \int_0^{x} t \arctan(t-1)\, dt$.

2) $F(x) = \int_0^{x} \sqrt[3]{t-1} e^t\, dt$.

Soluzioni.

1. $\int \frac{\log(\sin x)}{\tan x}\, dx = \int \frac{\log t}{t}\, dt$, dunque una primitiva di $f(x)$ è la funzione $F(x) = \frac{1}{2} \log^2(\sin x)$; $\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{a \to 0} \int_a^1 f(x)\, dx = \lim_{a \to 0} \frac{1}{2} \log^2(\sin x)\Big|_a^1 = -\infty$

2. Si ha che: $\lim_{a \to -\frac{\pi}{4}} \int_a^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}\, dx = \lim_{a \to -\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{1+\tan x}\Big|_a^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$

3. Si ha che: $\lim_{a \to 0} \int_a^1 e^{x \log x}(1+\log x)\, dx = \lim_{a \to 0} e^{x \log x}\Big|_a^1 = 0$

4. 1) $\int_0^1 \frac{\log^2 x}{x}\, dx = \lim_{k \to 0^+} \int_k^1 \frac{\log^2 x}{x}\, dx = \lim_{k \to 0^+} -\frac{1}{3} \ln^3 k = +\infty.$

2) Per x che tende a $-\infty$ la funzione xe^x (di segno costante in un intorno di $-\infty$) è un infinitesimo di ordine superiore al secondo, infatti $xe^x : \frac{1}{x^2} = x^3 e^x \to 0$, dunque l'integrale converge.

3) Per x che tende a zero la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}\log x}$ (di segno costante in un intorno destro di 0) è un infinito di ordine inferiore a $\frac{1}{2}$, infatti $\frac{1}{\sqrt{x}\log x} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\log x} \to 0$, dunque l'integrale converge in un intorno di $x = 0$. Per x che tende

a 1 la funzione $\dfrac{1}{\sqrt{x}\log x}$ (di segno costante in un intorno sinistro di 1) è un infinito di ordine uno, infatti $\dfrac{1}{\sqrt{x}\log x} \sim \dfrac{1}{x-1}$, dunque l'integrale diverge in un intorno di $x = 1$. L'integrale dato diverge.

4) Per x che tende a zero la funzione $\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}$ (di segno costante in un intorno di 0) è un infinito di ordine $\dfrac{2}{3}$, infatti $\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} \sim \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$, dunque l'integrale converge.

5) Per x che tende a zero la funzione $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$ (di segno costante in un intorno destro di 0) è un infinito di ordine $\dfrac{1}{2}$, infatti $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, dunque l'integrale converge.

5. 1) Per x che tende a zero la funzione $(1+x^\lambda)^{-\log x}$ (di segno costante in un intorno destro di 0) è limitata, infatti $\lim_{x\to 0}(1+x^\lambda)^{-\log x} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^\lambda)^{\frac{1}{x^\lambda}}\right]^{-x^\lambda \log x} = e^0 = 1$, dunque l'integrale converge per ogni valore di λ.

2) Per x che tende a zero la funzione $\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{(1-\cos x)^\lambda}$ (di segno costante in un intorno destro di 0) è un infinito di ordine $2\lambda - \dfrac{1}{2}$, infatti $\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{(1-\cos x)^\lambda} \sim \dfrac{\sqrt{x}}{(\frac{1}{2}x^2)^\lambda}$, dunque l'integrale converge per $\lambda < \dfrac{3}{4}$.

3) Per x che tende a 3 la funzione $\dfrac{1}{(x-3)(x+\frac{5}{2})^{\frac{3}{2}}}$ (di segno costante in un intorno sinistro di 3) è un infinito di ordine 1, dunque l'integrale diverge se $\lambda \geq 3$. L'integrale dato converge per $\lambda < 3$, infatti se $\lambda < 3$ la funzione integranda è definita e continua nell'intervallo $[1, \lambda]$.

6. Si ha che $F(3) = \displaystyle\int_0^3 \arctan\sqrt{t}\,dt$, ponendo $\sqrt{t} = s$, si trova che $F(3) = 4\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}$; $F'(3) = \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, e dunque l'equazione della retta tangente è $y = \dfrac{\pi}{3}x + \dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

7. $F'(x) = 3\log(\arctan 3x)$, $F'(\dfrac{1}{3}) = 3\log(\dfrac{\pi}{4})$.

8. Applicando il teorema di De l'Hopital, si ottiene:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)\arctan x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x}{2} = \frac{\pi}{4}$. Si deduce che l'ordine di infinito di F per $x \to +\infty$ è 2.

9. 1) $F(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$; poiché la funzione integranda $f(x) = x\arctan(x-1)$ è positiva per $x < 0$ e per $x > 1$, segue che $F(x)$ è positiva per $x > \alpha$, con $\alpha > 1$, inoltre $F(0) = F(\alpha) = 0$. Si ha che $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \pm\infty$. La derivata prima vale: $F'(x) = x\arctan(x-1)$; $x = 0$ è punto di massimo relativo, $x = 1$ è punto di minimo relativo. La derivata seconda vale: $F''(x) = \arctan(x-1) + \frac{x}{1+(x-1)^2}$; se $x > 1$ $F''(x)$ è positiva perché somma di quantità positive, e se $x < 0$ $F''(x)$ è negativa perché somma di quantità negative; si deduce che esiste un punto di flesso $x = \beta \in (0,1)$.

2) Studiamo sommariamente la funzione integranda $f(x) = \sqrt[3]{t-1}e^t$; si ha che $f(x) > 0$ per $x > 1$, $f(1) = 0, f(0) = -1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = \frac{e^x(3x-2)}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, $x = \frac{2}{3}$ è punto di minimo relativo.
$F(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$; poiché la funzione integranda $f(x)$ è positiva per $x > 1$, segue che $F(x)$ è positiva per $x < 0$ e per $x > \alpha$, con $\alpha > 1$, inoltre $F(0) = F(\alpha) = 0$. Siccome per $x \to -\infty$ $f(x)$ è infinitesima di ordine maggiore di 2, si ha che $\lim_{x\to-\infty} F(x) = A > 0$; $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. La derivata prima vale: $F'(x) = \sqrt[3]{x-1}e^x$; $x = 1$ è punto di minimo assoluto. La derivata seconda vale: $F''(x) = f'(x)$; $x = \frac{2}{3}$ è un punto di flesso.