Michela Eleuteri

ANALISI MATEMATICA

Funzioni di più variabili reali

Ottimizzazione vincolata.

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Ottimizzazione vincolata. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

In molti problemi di ottimizzazione le variabili indipendenti sono soggette a vincoli di vario tipo, per esempio problemi con ostacolo, dove ad esempio il minimo di certe energie deve stare sopra una funzione data, detta appunto ostacolo. L'importanza di questi problemi dunque è molto rilevante nel contesto delle applicazioni e merita grande attenzione. Come sopra distinguiamo il caso $n = 2$ dal caso generale.

1.1. Caso $n = 2$: vincolo esplicitabile

Formalizziamo prima di tutto il problema di estremo vincolato nel caso in cui la funzione obiettivo da ottimizzare dipende da due variabili legate da un'equazione di vincolo. Per semplicità lavoriamo con funzioni definite su tutto il piano. Il problema dunque che ci poniamo è quello di minimizzare (o massimizzare) una funzione $f(x, y)$ di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ sotto la condizione di vincolo $g(x, y) = b$. Nello spazio $f(x, y)$ rappresenta il grafico di una superficie, il vincolo rappresenta (in generale) una curva. È chiaro che un punto di massimo o minimo per f soggetta al vincolo g non necessariamente è punto di massimo o minimo (nemmeno locale!) per la funzione f in generale. Quindi non si tratta di andare a calcolare gli estremi liberi di f e vedere se qualcuno di questi cade nel vincolo imposto ma proprio di ottimizzare (e quindi massimizzare o minimizzare) la *restrizione di f al vincolo g* che in generale è appunto una funzione diversa da f.

La situazione più favorevole la si ha quando il vincolo definisce *esplicitamente* una funzione $y = y(x)$ o $x = x(y)$ oppure quando la curva si esprime in forma parametrica $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Allora in tal caso il problema è ricondotto a cercare gli estremi della funzione

$$h(x) = f(x, y(x)) \quad \text{oppure} \quad r(y) = f(x(y), y) \quad \text{oppure} \quad \phi(t) = f(x(t), y(t)).$$

In tutti questi casi comunque lo studio di un problema di ottimizzazione in più variabili si riduce a un problema di ottimizzazione in una variabile. I prossimi esempi chiariranno alcune situazioni tipiche di VINCOLI ESPLICITABILI. Si noti che un ruolo fondamentale è spesso giocato dal teorema di Weierstrass.

✍ **Esercizio 1.1.1.** *Sia data la funzione*

$$f(x, y) = 3\,x^2\,y - y^3 + x^2.$$

(i) Si determinino i suoi punti stazionari in $\mathbb{R}^2$*, e se ne studi la natura.*
(ii) Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se essa ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 2\},$$

e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

(i) I punti stazionari della funzione sono quelli che annullano il gradiente. Si ha dunque

$$\nabla f(x, y) = (6xy + 2x, 3x^2 - 3y^2) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x(3y + 1) = 0 \\ 3(x - y)\,(x + y) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema leggiamo $x = 0$ e $y = -1/3$ e non ci sono altre possibilità. Se $x = 0$, sostituendo nella seconda equazione del sistema si ottiene $y = 0$, mentre sostituendo $y = -1/3$ si ottiene $x = \pm 1/3$. Quindi i punti stazionari sono

$$(0, 0) \qquad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \qquad \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Proviamo a studiare la natura di questi punti con il test della matrice Hessiana. Si ha

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6y + 2 & 6x \\ 6x & -6y \end{pmatrix}$$

quindi

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi non riesco a stabilire la natura dell'origine con il test della matrice Hessiana. Proviamo a studiare il segno dell'incremento di f nel punto. Si ha

$$\triangle f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = 3x^2y - y^3 + x^2.$$

Ora se $x = 0$ si ha $\triangle f(0,0) = -y^3$ che ha segno positivo per $y < 0$ e negativo per $y > 0$. Questo basta a dire che l'origine è un punto di sella per f.
D'altra parte

$$Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui $\det H_f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$ e quindi $(-1/3, -1/3)$ è un punto di sella. Infine

$$Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui $\det H_f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$ e quindi $(1/3, -1/3)$ è un punto di sella.

(ii) La funzione data è continua, il rettangolo dato (che d'ora in avanti chiameremo R) è chiuso e limitato, quindi il teorema di Weierstrass ci assicura che esistono $\max_R f$ e $\min_R f$. Osserviamo che la funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi non ci sono punti singolari. Inoltre non ci sono punti stazionari che stanno in R. Quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto di f su R si troveranno sul bordo di R.
Parametrizziamo il bordo di R. Si ha $\partial R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ dove

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \ \wedge \ 0 \le x \le 1\}$$

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \ \wedge \ 0 \le y \le 2\}$$

$$R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2 \ \wedge \ 0 \le x \le 1\}$$

$$R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \ \wedge \ 0 \le y \le 2\}.$$

Si ha poi

$$f_{R_1}(x,y) = x^2$$

che è una funzione sempre crescente per $0 \le x \le 1$. Dunque eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono $(0,0)$ e $(1,0)$.
D'altra parte

$$f_{R_2}(x,y) = 3y - y^3 + 1 =: g_2(y)$$

da cui $g'(y) = 3 - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Dunque eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluti sono $(1,0)$, $(1,1)$ e $(1,2)$.

Poi si ha

$$f_{R_3}(x,y) = 6x^2 - 8 + x^2 = 7x^2 - 8 =: g_3(x)$$

che è sempre crescente nell'intervallo considerato, allora candidati punti di massimo o minimo assoluto sono $(0,2)$ e $(1,2)$.
Infine

$$f_{R_4}(x,y) = -y^3$$

che è una funzione decrescente nell'intervallo considerato, quindi candidati punti di massimo o minimo assoluto sono $(0,0)$ e $(0,2)$.
Adesso confrontiamo i valori della funzione su tali punti. Si ha

$$f(0,0) = 0 \qquad f(1,0) = 1 \qquad f(1,1) = 3 \qquad f(1,2) = -1 \qquad f(0,2) = -8.$$

Dunque $\min_R f = -8$ e $(0,2)$ è il punto di minimo assoluto; $\max_R f = 3$ e $(1,1)$ è il punto di massimo assoluto.

✍ **Esercizio 1.1.2.** *Sia data la funzione*

$$f(x,y) = \frac{3\,x^2 - 2\,y^2}{x^2 + y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

(i) Si determinino i suoi punti stazionari in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(ii) È possibile stabilire la natura di questi punti stazionari tramite il metodo dell'Hessiano? In caso negativo, studiare comunque la natura di tali punti in altro modo
(iii) Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se essa ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

(i) I punti stazionari sono quelli che annullano il gradiente di f. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{6x\,(x^2+y^2) - 2x\,(3x^2 - 2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{6x^3 + 6xy^2 - 6x^3 + 4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{10xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4y(x^2+y^2) - 2y(3x^2 - 2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4yx^2 - 4y^3 - 6yx^2 + 4y^3}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{10x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left(\frac{10xy^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{10x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = (0,0) \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ y = 0.$$

Quindi i punti stazionari sono tutti i punti degli assi cartesiani (tranne l'origine dove tra l'altro la funzione non è nemmeno definita).
(ii) Proviamo a vedere se è possibile studiare la natura dei punti stazionari con il test della matrice Hessiana. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{10y^2(x^2+y^2)^2 - 2\,(x^2+y^2)\,(2x)\,(10x\,y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{10x^2y^2+10y^4-40x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{10y^4-30x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{10y^2(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{20xy(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)\,(2y)\,(10xy^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{20xy(x^2+y^2) - 40xy^3}{(x^2+y^2)^3} = \frac{20x^3y-20xy^3}{(x^2+y^2)^3} = \frac{20xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-10x^2(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)\,(2y)\,(-10x^2y)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-10x^4-10x^2y^2+40x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{-10x^4+30x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-10x^2(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

Si vede subito che, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$

$$H_f(h,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{10}{h^2} \end{pmatrix} \qquad H_f(0,k) = \begin{pmatrix} \dfrac{10}{k^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi non riesco a studiare la natura di tali punti con il test della matrice Hessiana.
Studio dunque la natura dei punti stazionari attraverso lo studio del segno dell'incremento della funzione. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, si ha

$$\triangle f(h,0) = f(x,y) - f(h,0) = \frac{3x^2-2y^2}{x^2+y^2} - 3 = \frac{3x^2-2y^2-3x^2-3y^2}{x^2+y^2} = -\frac{5y^2}{x^2+y^2}.$$

Siccome $y \neq 0$ si ottiene $\triangle f(x,y) < 0$ e quindi tutti i punti $(h,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$ sono di massimo locale. Invece per $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\triangle f(0,k) = f(x,y) - f(0,k) = \frac{3x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 2 = \frac{3x^2-2y^2+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} = \frac{5x^2}{x^2+y^2} > 0.$$

Quindi tutti i punti $(0,k)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ sono punti di minimo locale.
(iii) Poniamo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Esso rappresenta una corona circolare; le circonferenze che la delimitano hanno raggio rispettivamente 1 e 2.

A è un insieme chiuso e limitato, la funzione f è continua su A, per il teorema di Weierstrass esistono il massimo e il minimo assoluto di f su A.
Non ci sono punti singolari per f, dunque gli eventuali punti candidati ad essere massimo e minimo vanno ricercati tra i punti che annullano il gradiente di f o tra i punti del bordo di A.
Si ha che

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (h,0) \ \vee \ (x,y) = (0,k) \qquad h,k \in \mathbb{R}.$$

Nella parte interna di A i punti che annullano il gradiente sono

$$(x,y) = (h,0) \vee (x,y) = (0,k) \text{ con } -2 < h < -1 \vee 1 < h < 2 \text{ e } -2 < k < -1 \vee 1 < k < 2.$$

Si ha

$$f(k,0) = 3 \qquad f(0,h) = -2.$$

D'altra parte $\partial A = A_1 \cup A_2$ dove

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \text{ e } A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Parametrizziamo A_1. Si ha

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

da cui

$$f_{A_1}(x,y) = 3\cos^2\theta - 2\sin^2\theta =: \tilde{f}(\theta)$$

e quindi

$$\tilde{f}'(\theta) = -6\cos\theta \, \sin\theta - 4\sin\theta\cos\theta = -10\sin\theta\cos\theta.$$

Allora

$$\tilde{f}'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \ \vee \ \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \ \vee \ \theta = \frac{\pi}{2} \ \vee \ \theta = \pi \ \vee \ \theta = \frac{3}{2}\pi.$$

Si ha

$$\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\pi) = 3 \qquad \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tilde{f}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2.$$

Ora parametrizziamo A_2. Si ha

$$\begin{cases} x = 2\,\cos\theta \\ y = 2\,\sin\theta. \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

da cui

$$f_{A_2}(x,y) = \frac{1}{4}\,(12\cos^2\theta - 8\,\sin^2\theta) = 3\,\cos^2\theta - 2\,\sin^2\theta$$

il cui studio si riconduce al caso precedente. In ultima analisi dunque

$$\max_A f = 3 \text{ e i punti di massimo assoluto sono i punti } (h, 0) \text{ con } -2 \le h \le -1 \text{ e } 1 \le h \le 2$$

e

$$\min_A f = -2 \text{ e i punti di minimo assoluto sono i punti } (0, k) \text{ con } -2 \le k \le -1 \text{ e } 1 \le k \le 2.$$

✍ **Esercizio 1.1.3.** *Sia data la funzione*

$$f(x, y) = e^{2x\,y}\,x\,y.$$

(i) Si determinino i punti stazionari di $f(x, y)$ in $\mathbf{R}^2$ e se ne studi la natura.
(ii) Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se $f(x, y)$ ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \, 4x^2 + y^2 \le 2, \; y \ge 0\}$$

e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

(i) I punti stazionari di f sono quelli che annullano il gradiente. Si ha

$$f_x(x, y) = e^{2xy}\,y\,(2xy + 1) \qquad f_y(x, y) = e^{2xy}\,x\,(2xy + 1)$$

quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \;\vee\; 2x\,y = -1.$$

Proviamo a studiare la natura dei punti stazionari attraverso il test della matrice Hessiana. Si ha

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(x, y) = e^{2xy}2y^2(2xy + 1) + e^{2xy}2y^2 = e^{2xy}\,2y^2(2xy + 2)\\
&f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = e^{2xy}2xy(2xy + 1) + e^{2xy}(2xy + 1) + e^{2xy}2xy = e^{2xy}(4x^2y^2 + 6xy + 1)\\
&f_{yy}(x, y) = e^{2xy}2x^2(2xy + 1) + e^{2xy}2x^2 = e^{2xy}\,2x^2(2xy + 2)
\end{aligned}$$

da cui

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

essendo $\det H_f(0, 0) = -1 < 0$, si ha che $(0, 0)$ è un punto di sella. D'altra parte

$$Hf\left(h, -\frac{1}{2h}\right) = \begin{pmatrix} e^{-1}\,2\,\frac{1}{4h^2} & e^{-1}\,(-1) \\ e^{-1}(-1) & e^{-1}\,2h^2 \end{pmatrix}$$

quindi $\det H_f\left(h,-\frac{1}{2h}\right)=0$ e questo ci dice che non siamo in grado di studiare la natura dei punti (x,y) tali che $2xy=-1$ con il test della matrice Hessiana.
Proviamo a studiare il segno dell'incremento di f. Per ogni $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ si ha

$$\triangle f\left(h,-\frac{1}{2h}\right)=f(x,y)-f\left(h,-\frac{1}{2h}\right)=e^{2xy}\,xy+\frac{1}{2}\,e^{-1}.$$

Si vede facilmente che la funzione $g(t)=t\,e^{2\,t}$ ha minimo uguale a $g(-1/2)=-\frac{1}{2}\,e^{-1}$ per $t=-1/2$ per cui $\triangle f\left(h,-\frac{1}{2h}\right)\ge 0$. Questo significa che tutti i punti (x,y) tali che $2xy=-1$ sono punti di minimo.
(ii) La funzione f è continua, l'insieme A è chiuso e limitato dunque il teorema di Weierstrass ci assicura che esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto di f su A.
Non ci sono punti stazionari interni ad A, non ci sono punti singolari dunque il massimo e il minimo assoluti di f su A si trovano sul bordo di A. Si ha $\partial A=A_1\cup A_2$, dove

$$A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,4x^2+y^2=2,\ y\ge 0\}\qquad A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,y=0,\ -1/\sqrt{2}\le x\le 1/\sqrt{2}\}.$$

Parametrizziamo A_1. Si ha

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}\qquad \theta\in[0,\pi]$$

da cui

$$f(x,y)=\exp(2\cos\theta\,\sin\theta)\,\cos\theta\,\sin\theta=\exp(\sin(2\theta))\,\frac{\sin(2\theta)}{2}=:\tilde f(\theta)$$

e quindi allora

$$\begin{aligned}\tilde f'(\theta)&=\exp(\sin(2\theta))\,\cos(2\theta)\,\sin(2\theta)+\exp(\sin(2\theta))\,\cos(2\theta)\\&=\exp(\sin(2\theta))\,\cos(2\theta)\,[\sin(2\theta)+1]\end{aligned}$$

da cui

$$\tilde f'(\theta)=0\Leftrightarrow\cos(2\theta)=0\ \vee\ \sin(2\theta)=-1\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\ \vee\ \theta=\frac{3}{4}\,\pi.$$

Quindi

$$\tilde f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\,e\qquad \tilde f\left(\frac{3}{4}\,\pi\right)=-\frac{1}{2}\,e^{-1}.$$

D'altra parte $f_{A_2}\equiv 0$ quindi

$$\max_A f=\frac{1}{2}\,e\qquad \min_A f=-\frac{1}{2}\,e^{-1};$$

il punto di massimo assoluto è $\left(\frac{1}{2},1\right)$ mentre il punto di minimo assoluto è $\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

✍ **Esercizio 1.1.4.** *Sia data la funzione*

$$f(x,y) = \arctan(x^2 + 2\,y^2).$$

(i) Si determinino i punti stazionari di $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$ e se ne studi la natura.
(ii) Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se $f(x,y)$ ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 4, \; y \geq 2 - x\}$$

e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

(i) Innanzitutto osserviamo che la funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed essendo la funzione arctan sempre strettamente crescente, la funzione data è sempre positiva o nulla; d'altra parte $f(0,0) = 0$ dunque possiamo dire subito che l'origine è punto di minimo assoluto su tutto $\mathbb{R}^2$. Studiamo la natura dei punti stazionari di f. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2\,x}{1 + (x^2 + 2\,y^2)^2}, \frac{4\,y}{1 + (x^2 + 2\,y^2)^2} \right)$$

dunque

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Dunque l'origine è l'unico punto stazionario e dalle considerazioni precedenti sappiamo già che è punto di minimo assoluto.
Se uno non se ne fosse accorto e volesse studiare la natura dell'origine attraverso il test della matrice Hessiana otterrebbe

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2(1 + (x^2 + 2\,y^2)^2) - 2\,x\,2\,(x^2 + 2\,y^2)\,2\,x}{[1 + (x^2 + 2\,y^2)^2]^2} = \frac{2\,[1 + (x^2 + 2\,y^2)^2 - 4\,x^2\,(x^2 + 2\,y^2)]}{[1 + (x^2 + 2\,y^2)^2]^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{-2\,x\,2\,(x^2 + 2\,y^2)\,4\,y}{[1 + (x^2 + 2\,y^2)^2]^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{4(1 + (x^2 + 2\,y^2)^2) - 4\,y\,2\,(x^2 + 2\,y^2)\,4\,y}{[1 + (x^2 + 2\,y^2)^2]^2} = \frac{4\,[1 + (x^2 + 2\,y^2)^2 - 8\,y^2\,(x^2 + 2\,y^2)]}{[1 + (x^2 + 2\,y^2)^2]^2},$$

da cui $f_{xx}(0,0) = 2$ $f_{xy}(0,0) = 0$ $f_{yy}(0,0) = 4$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ed essendo det $Hf(0,0) = 8 > 0$ si ha rapidamente che $(0,0)$ è punto di minimo locale. Il fatto che sia anche minimo assoluto discende da un'ulteriore analisi fatta sulla funzione f.

Osserviamo tuttavia che i calcoli potevano essere notevolmente ridotti se si osservava che la funzione arctan è strettamente crescente (la sua derivata è positiva e non si annulla mai), dunque i punti stazionari di f sono tutti e soli i punti stazionari della funzione $g(x,y) = x^2+2\,y^2$; per cui

$$\nabla g(x,y) = (2x, 4\,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

mentre

$$g_{xx} = 2 \qquad g_{xy} = g_{yx} = 0 \qquad g_{yy} = 4$$

e di nuovo si ha che $(0,0)$ è punto di minimo locale.

(ii) La funzione f è continua, l'insieme A è chiuso e limitato quindi esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto di f per il teorema di Weierstrass.

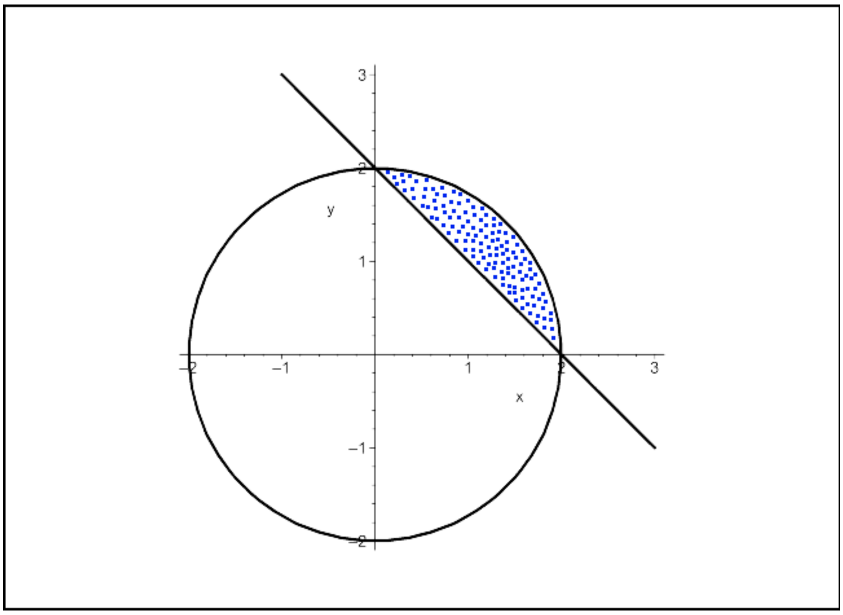

Figura 1.1: Insieme A.

Osserviamo che l'origine non appartiene all'insieme A dunque non è detto che il minimo assoluto di f su A sia di nuovo 0.

L'unico punto stazionario, come si evince dall'analisi al punto (i), è l'origine, che non appartiene alla parte interna di A. Non ci sono punti singolari dunque i punti di massimo e di minimo assoluto di f si trovano sul bordo di A. Si ha $\partial A = A_1 \cup A_2$ dove

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 = 4 \ \wedge \ y \geq 2 - x\}$$

e

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 2 - x \ \wedge \ 0 \leq x \leq 2\}.$$

L'insieme A_1 è un arco di circonferenza, lo parametrizzo usando le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Quindi

$$f(x, y)_{|A_1} = f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = \tilde{f}(\theta) = \arctan(4\cos^2\theta + 8\sin^2\theta) = \arctan(4 + 4\sin^2\theta)$$

da cui

$$\tilde{f}'(\theta) = \frac{8\sin\theta\cos\theta}{1 + (4 + 4\sin^2\theta)^2} = 0 \ \Leftrightarrow \ \sin\theta = 0 \ \vee \ \cos\theta = 0,$$

quindi i punti di estremo si hanno per $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ che corrispondono ai punti $(2, 0)$ e $(0, 2)$. Si ha

$$f(2, 0) = \arctan 4 \qquad f(0, 2) = \arctan 8.$$

D'altra parte

$$f(x, y)_{|A_2} = f(x, 2 - x) = \bar{f}(x) = \arctan(x^2 + 2(2 - x)^2) = \arctan(3x^2 - 8x + 8)$$

da cui

$$\bar{f}'(x) = \frac{6x - 8}{1 + (3x^2 - 8x + 8)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

Si ha

$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \arctan\frac{8}{3}.$$

Siccome la funzione arctan è crescente, si ha che

$$\min_A f(x, y) = \arctan\frac{8}{3} \qquad \max_A f(x, y) = \arctan 8$$

raggiunti rispettivamente nei punti $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $(0, 2)$.

1.2. Caso $n = 2$: metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange funziona quando il vincolo è rappresentato da una curva regolare assegnata in qualsiasi forma: parametrica o cartesiana (implicita o esplicita). Cerchiamo di illustrare il metodo cercando di stabilire, in analogia con il caso di estremi liberi, una condizione necessaria del primo ordine. Nel caso degli estremi liberi, il teorema di Fermat indica che se un punto è di estremo, il suo gradiente si deve annullare e questo è abbastanza ragionevole perché il punto non ha vincoli e potendosi muovere in tutte le direzioni, il teorema di Fermat ci dice che tutte le derivate lungo ogni direzione ammissibile si devono annullare. Nel caso di un vincolo, ovviamente non sarà più così e ci saranno delle direzioni ammissibili e la derivata direzionale lungo queste direzioni si deve annullare. Per capire chi siano queste direzioni ammissibili, supponiamo che in vincolo descriva un arco di curva regolare con retta tangente nella direzione del versore $\mathbf{v}$. In tal caso la derivata direzionale di f nella direzione di $\mathbf{v}$ si deve annullare, cioè se (x^*, y^*) è il nostro punto di estremo vincolato si dovrà avere

$$D_{\mathbf{v}} f(x^*, y^*) = 0$$

e per la formula del gradiente, questo significa

$$\nabla f(x^*, y^*) \cdot \mathbf{v} = 0$$

che esprime l'ortogonalità tra i vettori ∇f e $\mathbf{v}$. Ma ricordando che il gradiente di una funzione in ogni punto è ortogonale alla direzione della retta tangente alle sue curve di livello, se anche il vincolo è sufficientemente regolare anche

$$\nabla g(x^*, y^*) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Ma questo significa che $\nabla f(x^*, y^*)$ e $\nabla g(x^*, y^*)$ devono essere paralleli, cioè deve esistere un numero λ per cui uno dei due è multiplo dell'altro, cioè

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*).$$

Formalmente si ha dunque

Teorema 1.2.1. (moltiplicatori di Lagrange) *Siano $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ e (x^*, y^*) punto di estremo vincolato per f sotto il vincolo $g(x, y) = b$. Allora se (x^*, y^*) è regolare per il vincolo, cioè se $\nabla g(x^*, y^*) \neq (0, 0)$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (detto* moltiplicatore di Lagrange*) tale che*

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*).$$

Ribadiamo dunque che la relazione di parallelismo tra i gradienti di f e g esprime il fatto che se (x^*, y^*) verifica le ipotesi del teorema, allora la derivata di f lungo la tangente al vincolo si deve annullare, e in tal caso diremo che (x^*, y^*) è punto critico vincolato. Questa è la corretta generalizzazione del teorema di Fermat nel caso degli estremi vincolati.
Introducendo la funzione $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \lambda)$ detta Lagrangiana definita da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - b),$$

il teorema afferma che se (x^*, y^*) è punto di estremo vincolato, allora esiste λ tale che il punto (x^*, y^*, λ) sia critico libero per $\mathcal{L}$ cioè che sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = b - g = 0 \end{cases}$$

Le prime due equazioni coincidono con la condizione di parallelismo dei gradienti, mentre la terza esprime esattamente la condizione di vincolo. La teoria sviluppata indica il seguente modo di procedere, noto come METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE:
1) si isolano eventuali punti non regolari dell'insieme $g(x, y) = b$ che vanno esaminati a parte;
2) si cercano i punti critici liberi della Lagrangiana, cioè le soluzioni del precedente sistema;
3) si determina la natura dei punti critici; a questo proposito spesso risulta utile il teorema di Weierstrass, come mostra il seguente esempio.

✍ **Esercizio 1.2.2.** *Sia data la funzione $f(x, y) = 4\,x\,y + 4\,x$.*

(i) Si determinino i suoi punti stazionari in $\mathbb{R}^2$, e se ne studi la natura.
(ii) Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se essa ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme (ellisse)

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 5x^2 + 5\,y^2 - 6\,x\,y - 6\,x + 10\,y + 4\ \leq\ 0\},$$

e in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

(i) I punti stazionari per una funzione sono quelli che annullano il gradiente della funzione stessa. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (4y + 4, 4x)$$

da cui

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, -1).$$

Quindi $(0, -1)$ è l'unico punto stazionario per f.
Proviamo a studiarne la natura con il test della matrice Hessiana. Si ha

$$f_{xx}(x, y) = 0 \qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 4 \qquad f_{yy}(x, y) = 0$$

da cui

$$Hf(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo il determinante della matrice Hessiana uguale a $-16 < 0$ si può senz'altro dire che $(0, -1)$ è un punto di sella per f.

(ii) La funzione data è continua, l'insieme dato (che è un ellisse e che chiameremo d'ora in avanti E) è chiuso e limitato, il massimo e il minimo assoluto della funzione su E esistono per il teorema di Weierstrass.
$(0, -1)$ è l'unico punto che annulla il gradiente di f come visto al punto i); la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e dunque non ci sono punti singolari; resta quindi da studiare il comportamento lungo il bordo dell'ellisse.
Per studiare il comportamento della funzione lungo il bordo dell'ellisse utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Abbiamo il vincolo

$$g(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 6x + 10y + 4 = 0.$$

Prima di tutto osserviamo che non ci sono punti singolari per il vincolo. Si ha infatti

$$\nabla g(x, y) = (10x - 6y - 6, 10y - 6x + 10) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, -1)$$

ma $g(0, -1) \neq 0$ quindi non ci sono punti singolari per il vincolo.
La funzione Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y) = 4xy + 4x + \lambda(5x^2 + 5y^2 - 6xy - 6x + 10y + 4).$$

A questo punto troviamo i punti critici per $\mathcal{L}$. Si ha

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 4 + 10\lambda x - 6\lambda y - 6\lambda = 0 \\ 4x + 10\lambda y - 6x\lambda + 10\lambda = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 6x + 10y + 4 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2 + 5\lambda x - 3\lambda y - 3\lambda = 0 \\ 2x + 5\lambda y - 3x\lambda + 5\lambda = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 6x + 10y + 4 = 0. \end{cases}$$

Seguiamo la seguente strategia: ricaviamo λ dalla prima equazione e inseriamo quanto ottenuto nella seconda equazione. Poi confronteremo quello che otterremo con la terza equazione.
Notiamo subito che se $5x = 3y + 3$ allora $y = -1$ da cui si dedurrebbe $x = 0$ assurdo. Allora sia $5x \neq 3y + 3$. Dalla prima equazione si ha

$$\lambda = \frac{2y + 2}{3y + 3 - 5x}$$

che inserito nella seconda equazione ci dà

$$2x + (5y - 3x + 5)\,\frac{2y + 2}{3y + 3 - 5x} = 0$$

da cui

$$6xy + 6x - 10x^2 + 10y^2 - 6xy + 10y + 10y - 6x + 10 = 0$$

e quindi

$$x = \pm(y + 1).$$

Distinguiamo due casi. Primo caso $x = y + 1$. Allora inserendo nella terza equazione si ha

$$5(y^2 + 2y + 1) + 5y^2 - 6y(y + 1) - 6(y + 1) + 10y + 4 = 0$$

da cui

$$4y^2 + 8y + 3 = 0$$

da cui otteniamo come soluzioni i punti

$$A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \qquad B = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

D'altra parte nel caso $x = -y - 1$ si ottiene invece

$$5(y^2 + 2y + 1) + 5y^2 + 6y(y + 1) + 6(y + 1) + 10y + 4 = 0$$

da cui

$$16y^2 + 32y + 15 = 0$$

da cui otteniamo come soluzioni i punti

$$C = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right) \qquad D = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right).$$

Quindi osservando che

$$f(A) = f(B) = 1 \qquad f(C) = f(D) = -\frac{1}{4}$$

si ha che

$$\max_E f = 1 \qquad \min_E f = -\frac{1}{4}$$

e i punti di massimo assoluti sono A e B mentre i punti di minimo assoluti sono i punti C e D.

1.3. Un esercizio con un punto singolare sul vincolo

✍ **Esercizio 1.3.1.** *Sia*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 + x^4(x^4-1) = 0\}$$

e sia $f(x,y) = y - x^2$. Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se f ammette massimo assoluto e minimo assoluto in S e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

Innanzitutto S è chiuso; poi è limitato, visto che

$$y^2 = -x^4(x^4-1)$$

quindi essendo $y^2 \geq 0$ deve per forza essere anche $-x^4(x^4-1) \geq 0$ da cui $x^4 \leq 1$ cioè $|x| \leq 1$ che comporta $|y| \leq 2$. Quindi dal teorema di Weierstrass esistono il massimo e il minimo assoluti di f su S.
A questo punto sia $g(x,y) = y^2 + x^4(x^4-1)$. Si ha

$$\nabla g(x,y) = \big(8x^7 - 4x^3, 2y\big) = (0,0)$$

quindi deve per forza essere $y = 0$ e $2x^7 - x^4 = 0$ da cui $x = 0$ e $x^4 = 1/2$. Quindi ho il punto $(0,0) \in S$ che è dunque un punto singolare per il vincolo e i punti $(\pm\sqrt[4]{1/2}, 0) \notin S$.
A questo punto la funzione lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y) = y - x^2 - \lambda\,(y^2 + x^4(x^4-1));$$

troviamo i punti critici per $\mathcal{L}$: tenendo conto che

$$\nabla f(x,y) = (-2x, 1),$$

si ha quindi

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - \lambda\,(8x^7 - 4x^3) = 0 \\ 1 - 2\lambda\, y = 0 \\ y^2 + x^4(x^4-1) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione vedo immediatamente che $\lambda, y \neq 0$ da cui posso scrivere $\lambda = \frac{1}{2y}$ e anche $y = \frac{1}{2\lambda}$ quindi sostituendo nella terza equazione si ha

$$\frac{1}{4\lambda^2} + x^4(x^4-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{1}{4x^4(1-x^4)} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{2x^2\sqrt{1-x^4}};$$

d'altra parte dalla prima equazione si ottiene

$$\lambda = -\frac{1}{4x^6 - 2x^2}$$

quindi uguagliando

$$\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{2x^4-1} \qquad \Rightarrow \qquad \pm(2x^4-1) = -\sqrt{1-x^4}$$

da cui

$$4x^8 + 1 - 4x^4 = 1 - x^4 \qquad \Rightarrow \qquad 4x^8 - 3x^4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^4(4x^4-3) = 0$$

siccome devo scartare $x = 0$ avrò $x^4 = \frac{3}{4}$ da cui $x = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ e corrispondentemente

$$y^2 = -\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} - 1\right) = \frac{3}{16} \qquad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Quindi i punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono:

$$A = \left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ B = \left(-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ C = \left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ D = \left(-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Osservo che

$$f(A) = f(B) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

mentre

$$f(C) = f(D) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}\sqrt{3};$$

d'altra parte, tenendo conto del punto singolare sul vincolo, si ha $f(0,0) = 0$ quindi

$$\max_S f = 0 = f(0,0) \qquad \min_S f = -\frac{3}{4}\sqrt{3} = f(C) = f(D).$$

1.4. Il caso generale

Enunciamo per completezza il teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso generale.

Teorema 1.4.1. (MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE - CASO GENERALE) *Siano $f, g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ con $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots g_m)$ e $\mathbf{x}^*$ punto di estremo vincolato per f sotto il vincolo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Allora se $\mathbf{x}^*$ è regolare per il vincolo, cioè se il rango della matrice Jacobiana $\mathbf{Jg}(\mathbf{x}^*)$ è m allora esistono m numeri reali $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$ (detti* MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE*) tali che*

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*).$$

✍ **Esercizio 1.4.2.** *Data la funzione*

$$f(x,y,z) = e^{x+y^2+z},$$

determinarne massimo e minimo assoluti sull'insieme chiuso e limitato

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - x - z - 1 = 0\right\}.$$

La funzione data è continua, l'insieme dato S è chiuso e limitato, quindi il massimo e il minimo assoluto della funzione su S esistono per il teorema di Weierstrass.
L'idea è quella di utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Abbiamo il vincolo

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x - z - 1 = 0.$$

La funzione Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z) = e^{x+y^2+z} + \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - x - z - 1).$$

A questo punto troviamo i punti critici per $\mathcal{L}$. (Osserviamo che, essendo la funzione esponenziale strettamente crescente, i calcoli venivano notevolmente semplificati se si considerava la lagrangiana

$$\tilde{\mathcal{L}}(x,y,z,\lambda) = x + y^2 + z + \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - x - z - 1)$$

al posto di $\mathcal{L}$). Si ha

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y^2+z} + \lambda\,(2x-1) = 0 \\ e^{x+y^2+z}\, 2\,y + \lambda\, 2\, y = 0 \\ e^{x+y^2+z} + \lambda\,(2z-1) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Il confronto tra la prima equazione e la terza porta immediatamente a $x = z$. Dalla seconda invece ricaviamo $y = 0$ oppure $\lambda = -e^{x+y^2+z}$. Se $y = 0$, sostituendo nella quarta equazione abbiamo

$$2x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

quindi candidati punti di estremo assoluto sono

$$A = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \qquad B = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

D'altra parte, se $\lambda = -e^{x+y^2+z}$ allora la prima e la terza equazione danno $x = z = 1$, informazioni che inserite nella quarta equazione danno $y = \pm 1$. Dunque altri candidati punti di estremo assoluto sono

$$C = (1,1,1) \qquad D = (1,-1,1).$$

A questo punto

$$f(A) = e^{1+\sqrt{3}} \quad f(B) = e^{1-\sqrt{3}} \quad f(C) = e^3 = f(D).$$

Quindi $\max_S f = e^3$ e C e D sono i punti di massimo assoluto; $\min_S f = e^{1-\sqrt{3}}$ e il punto di minimo assoluto è B.

☞ **Osservazione 1.4.3.** Anche nel caso in cui il vincolo sia dato da una superficie o una ipersuperficie (invece di una curva regolare) esistono metodi alternativi all'uso dei moltiplicatori di Lagrange. Il prossimo esercizio ne mostra un esempio.

✍ **Esercizio 1.4.4.** *Determinare gli estremi della funzione*

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \;\; z \geq 0\}$$

SOLUZIONE. La funzione data è continua, l'insieme E è chiuso e limitato, dunque il massimo e il minimo assoluti di f su E esistono per il teorema di Weierstrass. Troviamo i punti stazionari di f interni ad E. Ma $\nabla f(x, y, z) = (1, 1, -1) \neq (0, 0, 0)$ quindi non ci sono punti stazionari interni; inoltre $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ dunque gli unici punti di estremo saranno sul bordo di E.
Ora $\partial E = E_1 \cup E_2$ con

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, \;\; x^2 + y^2 \leq 9\}$$

ed

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, \;\; x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Studiamo prima di tutto il comportamento di f ristretto a E_1. Si tratta di studiare gli estremi di $g(x, y) := f(x, y, 0) = x + y$ con il vincolo $x^2 + y^2 \leq 9$.
Non ci sono punti stazionari interni per g (il suo gradiente non si annulla mai), $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi gli unici punti estremanti saranno sul bordo del cerchio. Uso le coordinate polari $x = 3\cos t$, $y = 3\,\sin t$ con $t \in [0, 2\pi]$. Quindi andiamo a studiare la funzione

$$\tilde{g}(t) = 3\cos t + 3\sin t \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Si ha

$$\tilde{g}'(t) = -3\sin t + 3\cos t = 0 \;\; \Leftrightarrow t = \pi/4 \;\vee\; t = 5/4\pi$$

Inoltre $\tilde{g}(0) = \tilde{g}(\pi) = 3$; quindi i candidati punti di estremo sono

$$(3, 0) \qquad \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \qquad \left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right).$$

Studiamo ora f ristretta a E_2. Si ha $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ dove ho scelto il segno positivo perché ci troviamo nel semipiano $z \geq 0$. Da cui sostituendo nell'espressione della funzione abbiamo da studiare la funzione

$$h(x, y) = x + y - \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

con il vincolo $x^2 + y^2 \leq 9$. Di nuovo h continua su un insieme chiuso e limitato, max e min assoluti esistono per Weierstrass. Andiamo a cercare i punti stazionari che sono interni al cerchio:

$$\begin{aligned} \nabla h(x, y) \quad = \quad (0, 0) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, 1 + \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}); \end{aligned}$$

i punti di eventuale non differenziabilità sono quelli del bordo del cerchio quindi vado direttamente a studiare il comportamento di h sul bordo. Si ha che è come studiare g sul bordo del cerchio (abbiamo già fatto i conti al punto precedente).
Quindi alla fine

$$\max_E f = 3\sqrt{2} = f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \qquad \min_E f = -3\sqrt{3} = f\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right).$$

1.5. Ottimizzazione vincolata: metodi alternativi

Esistono metodi alternativi all'uso dei moltiplicatori di Lagrange o all'idea di esplicitare il vincolo usando opportune parametrizzazioni. Per esempio si veda il primo esempio, che mostra come si possa sfruttare direttamente l'equazione del vincolo per ottimizzare una funzione di una variabile (la difficoltà sta nel ricavare la variabilità esatta dell'unica variabile rispetto alla quale si ottimizza) oppure gli altri due esercizi che si basano sul metodo delle curve di livello.

✍ **Esercizio 1.5.1.**

Sia $f(x, y) = (x + 1)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$. Determinare gli estremi assoluti di f nella circonferenza chiusa di centro l'origine e raggio 2.

➻ **Hint:** diamo allo studente il compito di risolvere l'esercizio usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange o ricavando una parametrizzazione della circonferenza, per esempio in coordinate polari. Qui illustriamo un metodo alternativo, più veloce. Osserviamo che sono

verificate le ipotesi del Teorema di Weierstrass, dunque il massimo e il minimo assoluti di f esistono.
D'altra parte, sostituendo direttamente l'equazione della circonferenza dentro l'esponente dell'esponenziale si ottiene

$$f(x, y) = (x+1)e^{-2} = \frac{x+1}{e^2} =: g(x) \qquad x \in [-2, 2]$$

e g è sempre crescente nell'intervallo considerato, quindi candidati punti di estremo assoluto sono $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. Si ha

$$f(2, 0) = \frac{3}{e^2} = \max f \qquad f(-2, 0) = -\frac{1}{e^2} = \min f$$

punto di massimo $(2, 0)$; punto di minimo $(-2, 0)$.

✍ **Esercizio 1.5.2.**

Determinare i punti di massimo e minimo assoluti per la funzione $f(x, y) = (x+y)^2$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 32$.

La funzione data è continua, il vincolo è un insieme chiuso e limitato (circonferenza) dunque il massimo e il minimo di f sul vincolo esistono dal teorema di Weiestrass.
Il vincolo è descritto da un'equazione dunque l'insieme $x^2+y^2 = 32$ è un chiuso. Denotiamo con C questo insieme. Pertanto la parte interna di C è vuota, quindi non ci sono punti stazionari interni (da calcolare annullando il gradiente di f). Inoltre la funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ pertanto non ci sono eventuali punti di non differenziabilità. Il massimo e il minimo di f su C andranno trovati tra i punti del bordo cioè sull'insieme C stesso.
<u>Primo modo:</u> esplicitiamo il vincolo. Un modo è cercare una parametrizzazione della circonferenza, per esempio passando in coordinate polari. Si ha dunque

$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos\theta \\ y = 4\sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Pertanto sostituendo nella funzione si ottiene

$$\tilde{f}(\theta) = f(x(\theta), y(\theta)) = 32(\cos\theta + \sin\theta)^2.$$

Da cui

$$\tilde{f}'(\theta) = 64(\cos\theta + \sin\theta)(-\sin\theta + \cos\theta)$$

che si annulla se $\cos\theta = \pm\sin\theta$.

I punti del bordo corrispondono al valore $\theta = 0$, pertanto i punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono i punti (x, y) che corrispondono ai valori di $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$, $\theta = (3/4)\pi$, $\theta = (5/4)\pi$ oppure $\theta = (7/4)\pi$.
Sostituendo i valori di θ trovati nella parametrizzazione scelta per descrivere la circonferenza si ottengono i seguenti punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto per f su C

$$(\sqrt{32}, 0) \qquad (4,4) \qquad (-4,4) \qquad (-4,-4) \qquad (4,-4).$$

Analisi finale: confrontando i valori della f sui punti candidati trovati si ottiene

$$f(\sqrt{32}, 0) = 32 \qquad f(4,4) = f(-4,-4) = 64 \qquad f(-4,4) = f(4,-4) = 0.$$

Quindi

$$\max_C f = 64 \qquad \min_E f = 0$$

i punti di massimo sono $(4,4)$ e $(-4,-4)$ e i punti di minimo sono $(-4,4)$ e $(4,-4)$.

Secondo modo: usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del sistema risulta

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x+y)^2 - \lambda\left(x^2 + y^2 - 32\right).$$

Si osserva facilmente che nel vincolo tutti i punti sono regolari. Per cui i candidati punti di massimo e minimo si trovano tra i punti critici della Lagrangiana cioè tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2(x+y) - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2(x+y) - 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -(x^2 + y^2 - 32) = 0. \end{cases}$$

Se fosse $x = 0$ allora si avrebbe (per esempio dalla prima equazione) $y = 0$ e sostituendo nella terza equazione si vedrebbe che ciò non è possibile. Dunque sicuramente $x \neq 0$ e pertanto ricavando λ dalla prima equazione si ottiene

$$\lambda = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Sostituendo nella seconda equazione si ottiene $x^2 - y^2 = 0$ dunque $x = y$ oppure $x = -y$.
Si osserva che si poteva pervenire alla medesima conclusione attraverso il seguente ragionamento: sommando membro a membro le prime due equazioni si deduce

$$4(x+y) - 2\lambda(x+y) = 0$$

dunque, dalla legge di annullamento del prodotto si ottiene o $x+y=0$ cioè $x=-y$ oppure $\lambda=2$ che sostituita in una delle due equazioni dà $x=y$. L'importante è non semplificare senza aver prima verificato che ciò che si semplifica porti a soluzioni!
Quindi riassumendo, sostituendo $x=y$ oppure $x=-y$ nella terza equazione si ottengono di nuovo i punti

$$(4,4) \qquad (-4,4) \qquad (-4,-4) \qquad (4,-4).$$

e pertanto di nuovo

$$\max_C f = 64 \qquad \min_E f = 0$$

i punti di massimo sono $(4,4)$ e $(-4,-4)$ e i punti di minimo sono $(-4,4)$ e $(4,-4)$.

<u>Terzo modo:</u> con il metodo delle curve di livello. Le curve di livello di f sono $(x+y)^2 = C$ con $C \geq 0$ dunque $x+y=\pm\sqrt{C}$, cioè $y=-x\pm\sqrt{C}$. Vediamo a cosa corrispondono al crescere della costante C.
Se $C=0$ si tratta della bisettrice del secondo e quarto quadrante, che interseca il vincolo nei punti $(-4,4)$ e $(4,-4)$. Il valore $C=0$ rappresenta il minimo valore di $f(x,y)$ e pertanto questi punti trovati sono punti di minimo assoluto della funzione.
Ora lasciamo che C cresca. Al crescere di C (quindi cresce la quota del piano $z=C$ parallelo al piano $xy=0$ che va a intersecare la nostra superficie) la generica curva di livello è costituita da una coppia di rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante e che stanno da parti opposte rispetto a tale bisettrice. Entrambe queste rette intersecano il vincolo fino ad una coppia di rette che sono *tangenti* al vincolo stesso. Questa è l'ultima coppia di rette che toccano in vincolo. Coppie di rette per valori maggiori di C non intersecano più il vincolo e pertanto questo significa che il corrispondente piano $z=C$ non interseca più la superficie. Pertanto queste rette corrispondono ai punti $(4,4)$ e $(-4,-4)$ che per questo motivo sono punti di massimo assoluto per f.

✍ **Esercizio 1.5.3.**

Si può affermare, senza fare conti, che $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$ ha un massimo e un minimo sulla circonferenza $x^2+y^2=1$?
Determinarli con l'uso dei moltiplicatori di Lagrange.
Tracciare qualche curva di livello e dare un'interpretazione geometrica del procedimento.
Determinarli riducendo $f(x,y)$ sul vincolo ad una funzione della sola x o della sola y.

Hint: diamo allo studente il compito di risolvere l'esercizio usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange o ricavando una parametrizzazione della circonferenza, per esempio in

coordinate polari. Qui illustriamo un metodo alternativo, più veloce. Osserviamo che sono verificate le ipotesi del Teorema di Weierstrass, dunque il massimo e il minimo assoluti di f esistono.
Sostituendo direttamente l'espressione del vincolo nell'esponente dell'esponenziale si ottiene

$$f(x,y) = e^{2x^2-1} =: g(x) \qquad x \in [0,1]$$

dove la limitazione sulla x possiamo prenderla su $[0,1]$ e non su $[-1,1]$ perché la funzione x^2 è pari. A questo punto nell'intervallo considerato la funzione data è sempre crescente (composizione di funzioni crescenti; nota bene: x^2 è crescente su $[0,1]$, non su $[-1,1]$!), quindi punti candidati ad essere estremo assoluto sono (ora va considerata l'intera limitazione su $[-1,1]$)

$$(0,\pm 1) \qquad (\pm 1, 0).$$

Quindi

$$\max_C f = f(\pm 1, 0) = e \qquad \min_C f = f(0,\pm 1) = e^{-1}.$$

Cerchiamo ora di ottenere lo stesso risultato attraverso il *metodo delle curve di livello*. Consideriamo le curve di livello di f, cioè

$$e^{x^2-y^2} = C > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 = \log C = K.$$

Ora si osservi la figura che indica l'andamento delle linee di livello di f al crescere di C (o equivalentemente al crescere di K).
Per $K < 0$ le curve sono iperboli che intersecano l'asse delle y e man mano si avvicinano verso l'origine; per $K = 0$ si tratta della coppia di bisettrici, per $K > 0$ si tratta di iperboli che intersecano l'asse delle x e che si allontanano dall'origine man mano che K cresce.
Dunque il primo valore di K per cui l'iperbole interseca il vincolo è $K = -1$, che corrisponde ai punti $(0,\pm 1)$ (che saranno pertanto per il significato geometrico punti di minimo assoluto), poi le iperboli intersecano il vincolo e l'ultima iperbole che interseca il vincolo corrisponde al valore $K = 1$ che corrisponde ai punti $(\pm 1, 0)$, che saranno pertanto punti di massimo assoluto.

1.6. Metodo dei minimi quadrati

Illustriamo ora un'interessante applicazione della teoria sviluppata fino ad ora. Supponiamo di avere n osservazioni sperimentali di due variabili su un certo insieme di individui (per esempio le coppie altezza/peso per n persone); esse possono essere rappresentate come n punti nel piano, $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$.
Supponiamo di ritenere che tra le due variabili esista, nei limiti dell'errore sperimentale, una

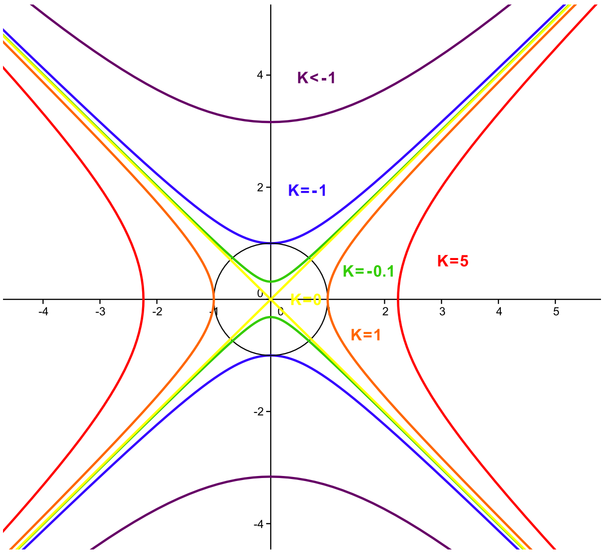

Figura 1.2: Alcune curve di livello di f.

relazione lineare che vogliamo determinare; questo significa che, pur non essendo i punti esattamente allineati, noi cerchiamo la retta $y = ax + b$ che "meno si discosta dal passare per gli n punti", ovvero che meglio ne approssima l'andamento.
Per determinare tale retta introduciamo l'errore quadratico medio. Se ci mettiamo nel punto P_i, l'errore che commettiamo nell'approssimare l'insieme di punti con la retta è dato da $ax_i + b - y_i$; definiamo perciò l'*errore quadratico medio* come

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 .$$

Trovare la retta che meglio approssima i dati significa quindi minimizzare $E(a,b)$ determinando a e b ottimali. Tale retta è detta *retta di regressione*.
Cerchiamo quindi i punti critici di $E(a,b)$. Essi sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i (ax_i + b - y_i) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2 (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} .$$

Possiamo riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è quindi $n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$.
Osservando che valgono le relazioni

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j,$$

$$(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i<j} x_i x_{=} \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2,$$

possiamo dire che il determinante è positivo se $n > 2$ e $x_1, \ldots, x_n$ sono distinti (cosa che assumiamo).
Questo ci permette di dire che il sistema ha un'unica soluzione, dunque $E(a,b)$ ha un unico punto critico, dato da

$$\bar{a} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad , \quad \bar{b} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}.$$

Resta da vedere che sia effettivamente un minimo. La matrice Hessiana di E è

$$HE(a,b) = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già visto che $n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 > 0$, inoltre abbiamo $\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$; quindi la forma quadratica associata è definita positiva e $\left(\bar{a}, \bar{b}\right)$ è un punto di minimo.

Esempio Supponiamo di aver raccolto i seguenti dati su altezza e peso di 5 persone:

altezza	170	175	178	185	190
peso	72	73	74	81	83

Allora abbiamo

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 161534 \ , \ \sum_{i=1}^5 x_i = 898 \ , \ \sum_{i=1}^5 y_i = 383 \ , \ \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 68942.$$

Quindi

$$\bar{a} = \frac{5 \cdot 68942 - 898 \cdot 383}{5 \cdot 161534 - 898^2} = \frac{776}{1266} = 0.613$$
$$\bar{b} = \frac{161534 \cdot 383 - 68942 \cdot 898}{1266} = -\frac{42394}{1266} = -33.486,$$

dunque la retta cercata è $y = 0.613x - 33.486$. Questa equazione può essere utilizzata come relazione ottimale tra peso e altezza.

1.7. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 1.7.1.**

Determinare, se esistono, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 2x - 2y + 2$$

nel triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

La funzione data è continua, il triangolo T è un insieme chiuso e limitato, dunque dal teorema di Weierstrass sappiamo che il massimo e il minimo assoluti di f su T esistono.
Analizziamo la parte interna di T. Eventuali punti candidati di massimo o minimo si troveranno tra i punti che annullano il gradiente di f. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (8x - 2, 8y - 2) = (0, 0) \iff (x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

e questo punto appartiene alla parte interna di T.
La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi non ci sono eventuali punti di non differenziabilità.
Infine per quanto riguarda il bordo di T (che coincide con il perimetro del triangolo T) si ha $\partial T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ dove

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(x, y) : y = 0,\ 0 \le x \le 1\} \\ T_2 &= \{(x, y) : y = 1 - x,\ 0 \le x \le 1\} \\ T_3 &= \{(x, y) : x = 0,\ 0 \le y \le 1\}. \end{aligned}$$

Si ha

$$f_{T_1}(x, y) = 4x^2 - 2x + 2 =: g_1(x).$$

Dunque $g_1'(x) = 8x - 2 = 0$ se e solo se $x = 1/4$.
Quindi eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono

$$\left(\frac{1}{4}, 0\right) \qquad (0, 0) \qquad (1, 0).$$

Inoltre si ha

$$f_{T_2}(x, y) = 4x^2 + 4(1 - x)^2 - 2x - 2(1 - x) + 2 = 8x^2 - 8x + 4 =: g_2(x).$$

Dunque $g_2'(x) = 16x - 8 = 0$ se e solo se $x = 1/2$.

Quindi eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad (1,0) \qquad (0,1).$$

Infine

$$f_{T_3}(x,y) = 4y^2 - 2y + 2 =: g_3(y).$$

Dunque $g_3'(y) = 8y - 2 = 0$ se e solo se $y = 1/4$.
Quindi eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono

$$\left(0, \frac{1}{4}\right) \qquad (0,0) \qquad (0,1).$$

<u>Analisi finale:</u> confrontiamo i valori assunti dalla funzione f nei punti candidati che abbiamo trovato dall'analisi precedente. Si ha

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} && f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 \\ &f\left(\frac{1}{4}, 0\right) = f\left(0, \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4} && \\ &f(0,0) = 2 && f(1,0) = f(0,1) = 4 \end{aligned}$$

Quindi

$$\max_T f = 4 \qquad \min_T f = \frac{3}{2};$$

i punti di massimo sono $(1,0)$ e $(0,1)$; il punto di minimo è $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

✍ **Esercizio 1.7.2.**

Calcolare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + x^2y + 2$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 2\}.$$

La funzione data è continua, l'insieme D (che è un rettangolo) è un insieme chiuso e limitato, dunque dal teorema di Weierstrass sappiamo che il massimo e il minimo assoluti di f su D esistono.
Analizziamo la parte interna di D. Eventuali punti candidati di massimo o minimo si troveranno tra i punti che annullano il gradiente di f. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (4x+2xy, 2y+x^2) = (0,0) \ \Leftrightarrow\ (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = (2,-2) \vee (x,y) = (-2,-2).$$

Dei tre, l'origine è l'unico punto che appartiene alla parte interna di D; gli altri stanno fuori da D.
La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi non ci sono eventuali punti di non differenziabilità.
Infine per quanto riguarda il bordo di D (che coincide con il perimetro del rettangolo D) si ha $\partial D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ dove

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x, y) : x = 1, \ -2 \le y \le 2\} \\
D_2 &= \{(x, y) : y = 2, \ -1 \le x \le 1\} \\
D_3 &= \{(x, y) : x = -1, \ -2 \le y \le 2\} \\
D_4 &= \{(x, y) : y = -2 \ -1 \le x \le 1\}.
\end{aligned}$$

Si ha

$$f_{D_1}(x, y) = f_{D_3}(x, y) = 2 + y^2 + y + 2 =: g(y).$$

Dunque $g(y) = 2y + 1 = 0$ se e solo se $y = -1/2$.
Quindi eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono

$$(1, -2) \qquad (-1, -2) \qquad (1, -1/2) \qquad (-1, -1/2) \qquad (1, 2) \qquad (-1, 2).$$

Inoltre si ha

$$f_{D_2}(x, y) = 4x^2 + 6 = h(x)$$

la cui derivata si annulla per $x = 0$.
Quindi eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono

$$(-1, 2) \qquad (0, 2) \qquad (1, 2).$$

Infine

$$f_{D_4}(x, y) = 6.$$

Quindi tutti i punti del tipo $(x, -2)$ con $-1 \le x \le 1$ sono tutti eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto.
<u>Analisi finale:</u> confrontiamo i valori assunti dalla funzione f nei punti candidati che abbiamo trovato dall'analisi precedente. Si ha

$$\begin{array}{ll}
f(0, 0) = 2 & f(1, -2) = f(-1, -2) = 6 \\
f(1, -1/2) = f(-1, -1/2) = 15/4 & f(1, 2) = f(-1, 2) = 10 \\
f(0, 2) = 6 & f(x, -2) = 6.
\end{array}$$

Quindi

$$\max_T f = 10 \qquad \min_T f = 2;$$

i punti di massimo sono $(\pm 1, 2)$; il punto di minimo è $(0, 0)$.

✍ **Esercizio 1.7.3.**

Trovare gli estremi della funzione

$$f(x,y) = (x^2y + y)e^{-x^2y}$$

nel quadrato

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

La funzione data è continua, l'insieme Q (che è un quadrato) è un insieme chiuso e limitato, dunque dal teorema di Weierstrass sappiamo che il massimo e il minimo assoluti di f su Q esistono.
Analizziamo la parte interna di Q. Eventuali punti candidati di massimo o minimo si troveranno tra i punti che annullano il gradiente di f. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (e^{-x^2y}2xy[1 - x^2y - y], e^{-x^2y}(x^2+1)[1 - x^2y])$$

che non si annulla mai. Quindi non esistono punti stazionari interni a Q.
La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi non ci sono eventuali punti di non differenziabilità.
Infine per quanto riguarda il bordo di Q (che coincide con il perimetro del quadrato Q) si ha $\partial Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$ dove

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{(x,y) : x = 1,\ 0 \leq y \leq 1\} \\
Q_2 &= \{(x,y) : y = 1,\ 0 \leq x \leq 1\} \\
Q_3 &= \{(x,y) : x = 0,\ 0 \leq y \leq 1\} \\
Q_4 &= \{(x,y) : y = 0,\ 0 \leq x \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Si ha

$$f_{Q_1}(x,y) = 2ye^{-y} =: g_1(y)$$

la cui derivata si annulla per $y = 1$ (sul bordo). Quindi candidati punti di massimo o minimo assoluto sono

$$(1,0) \qquad (1,1).$$

D'altra parte

$$f_{Q_2}(x,y) = (x^2+1)e^{-x^2} =: g_2(x)$$

la cui derivata si annulla per $x = 0$ (di nuovo sul bordo). Quindi candidati punti di massimo o minimo assoluto sono

$$(0,1) \qquad (1,1).$$

Inoltre si ha

$$f_{Q_3}(x,y) = y$$

che nell'intervallo considerato è sempre crescente. Si trovano i punti candidati

$$(0,0) \qquad (0,1).$$

Infine

$$f_{Q_4}(x,y) = 0.$$

Quindi tutti i punti del tipo $(x,0)$ con $0 \le x \le 1$ sono tutti eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto.
Analisi finale: confrontiamo i valori assunti dalla funzione f nei punti candidati che abbiamo trovato dall'analisi precedente. Si ha

$$\begin{array}{ll} f(1,0) = 0 \qquad & f(1,1) = 2/e < 1 \\ f(0,1) = 1 \qquad & f(x,0) = 0. \end{array}$$

Quindi

$$\max_T f = 1 \qquad \min_T f = 0;$$

il punto di massimo è $(0,1)$; i punti di minimo sono del tipo $(x,0)$, con $0 \le x \le 1$.

✍ **Esercizio 1.7.4.**

> Tra tutti i cilindri (circolari retti) di volume V fissato, trovare quello di area superficiale minima (incluse le due facce circolari del cilindro).

Sia x il raggio e y l'altezza del cilindro. Cerchiamo di risolvere il problema di minimo richiesto attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
L'equazione del vincolo traduce il fatto di avere volume V fissato, dunque

$$V = \pi x^2 y.$$

La funzione da minimizzare è l'area superficiale del cilindro

$$f(x,y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy.$$

La Lagrangiana del sistema diventa dunque

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 2\pi x(x+y) - \lambda(\pi x^2 y - V).$$

Si osserva che non ci sono punti singolari per il vincolo. Si osserva anche che il vincolo è un chiuso (controimmagine di un chiuso tramite una funzione continua) ma non è limitato dunque

il massimo e/o il minimo di f sul vincolo non è detto che esistano (non si può applicare il Teorema di Weierstrass).
Ad ogni modo, i candidati punti di estremo si trovano tra i punti critici della funzione Lagrangiana cioè tra i punti che sono soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 4\pi x + 2\pi y - 2\lambda\pi xy = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 2\pi x - \lambda\pi x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\big(\pi x^2 y - V\big) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava ad esempio $\pi x[2-\lambda x] = 0$ quindi dalla legge di annullamento del prodotto si ha $x = 0$ (che sostituita nell'ultima equazione porta a un assurdo) oppure $\lambda = 2/x$ che sostituita nella seconda equazione porta a $y = 2x$ cioè il cilindro di area superficiale minima è quello di altezza uguale al diametro.
In funzione di V fissato si ha

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad y = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

e l'area minima diventa

$$A = \sqrt[3]{54\pi V}.$$

Si noti che questo valore trovato corrisponde a un punto di minimo (assoluto) e per altro non di massimo perché se $x \to 0$ allora l'area tende a $+\infty$ perché dall'equazione del vincolo $y \to +\infty$.

✍ **Esercizio 1.7.5.**

Un punto di massa m si muove lungo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ collegato al punto $(1,0)$ mediante una molla. Trovare la posizione di equilibrio stabile del punto sotto l'azione della forza di gravità e la forza elastica. Equivalentemente: trovare il minimo dell'energia potenziale

$$E = mgy + \frac{1}{2}[(x-1)^2 + y^2]$$

sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$. Si faccia l'ipotesi che la costante elastica della molla sia $k = 1$.

La funzione da minimizzare è continua, il vincolo è chiuso e limitato pertanto il massimo e il minimo di f sul vincolo esistono per il Teorema di Weierstrass. Proviamo ad applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del sistema diventa

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = mgy + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

quindi i punti di estremo assoluto sono le soluzioni del seguente sistema (punti critici per la Lagrangiana)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = (x-1) - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = mg + y - 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\big(x^2+y^2-1\big) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ad esempio si ottiene

$$x[1-2\lambda] - 1 = 0$$

che dalla legge di annullamento del prodotto porta a $\lambda = 1/2$ la quale sostituita nella seconda equazione porta a un assurdo oppure $x = \frac{1}{1-2\lambda}$; allo stesso ricavando y dalla seconda equazione si ottiene $y = -\frac{mg}{1-2\lambda}$. A questo punto sostituendo i valori trovati nella terza equazione si deduce

$$\frac{1}{(1-2\lambda)^2} + \frac{m^2g^2}{(1-2\lambda)^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; 1-2\lambda = \pm\sqrt{1+m^2g^2}$$

e quindi sostituendo questa quantità nell'espressione di x e y si deduce

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2g^2}} \\ y = \mp\dfrac{mg}{\sqrt{1+m^2g^2}}. \end{cases}$$

Dunque, sostituendo i valori trovati nell'espressione dell'energia potenziale si ha

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2g^2}}, -\frac{mg}{\sqrt{1+m^2g^2}}\right) = -\frac{m^2g^2}{\sqrt{1+m^2g^2}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2g^2}} - 1\right)\right]^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{1+m^2g^2} = 1 - \sqrt{1+m^2g^2} = \min f$$

e

$$E\left(-\frac{1}{\sqrt{1+m^2g^2}}, \frac{mg}{\sqrt{1+m^2g^2}}\right) = \frac{m^2g^2}{\sqrt{1+m^2g^2}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2g^2}} + 1\right)\right]^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{1+m^2g^2} = 1 + \sqrt{1+m^2g^2} = \max f.$$

✍ **Esercizio 1.7.6.**

Determinare gli estremi di
$$f(x,y) = x^2 + 3y$$
con il vincolo
$$g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$
sia esplicitando il vincolo, sia usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

La funzione data è continua, il vincolo è un insieme chiuso e limitato (ellisse) dunque il massimo e il minimo di f sul vincolo esistono dal teorema di Weiestrass.
Il vincolo è descritto da un'equazione dunque l'insieme $g(x,y) = 0$ è un chiuso. Denotiamo con E questo insieme. Pertanto la parte interna di E è vuota, quindi non ci sono punti stazionari interni (da calcolare annullando il gradiente di f). Inoltre la funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ pertanto non ci sono eventuali punti di non differenziabilità. Il massimo e il minimo di f su E andranno trovati tra i punti del bordo cioè sull'insieme $g(x,y) = 0$ stesso.
Primo modo: esplicitiamo il vincolo. Un modo è cercare una parametrizzazione dell'ellisse. In generale, se un'ellisse è data in forma canonica
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
una parametrizzazione per descrivere tale curva la si ottiene ponendo
$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi),$$
dove a e b sono i semiassi dell'ellisse. Nel nostro caso si ha dunque
$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$
Pertanto sostituendo nella funzione si ottiene
$$\tilde{f}(\theta) = f(x(\theta), y(\theta)) = 4\cos^2\theta + 9\sin\theta.$$
Da cui
$$\tilde{f}'(\theta) = -8\cos\theta\sin\theta + 9\cos\theta = \cos\theta[-8\sin\theta + 9] = 0$$
che si annulla se $\cos\theta = 0$ oppure $\sin\theta = 9/8 > 1$ (quindi la seconda possibilità non dà soluzioni reali).
I punti del bordo corrispondono al valore $\theta = 0$, pertanto i punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto sono i punti (x,y) che corrispondono ai valori di $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ oppure $\theta = (3/2)\pi$.

Sostituendo i valori di θ trovati nella parametrizzazione scelta per descrivere l'ellisse si ottengono i seguenti punti candidati ad essere massimo o minimo assoluto per f su E

$$(2,0) \qquad (0,3) \qquad (0,-3).$$

Analisi finale: confrontando i valori della f sui punti candidati trovati si ottiene

$$f(2,0)=4 \qquad f(0,3)=9 \qquad f(0,-3)=-9.$$

Quindi

$$\max_E f = 9 \qquad \min_E f = -9$$

il punto di massimo è $(0,3)$ e il punto di minimo è $(0,-3)$.

Secondo modo: usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del sistema risulta

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + 3y - \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right).$$

Si osserva facilmente che nel vincolo tutti i punti sono regolari. Per cui i candidati punti di massimo e minimo si trovano tra i punti critici della Lagrangiana cioè tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2x - \dfrac{\lambda}{2}x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 3 - \dfrac{2}{9}y\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1\right) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, sfruttando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene $x = 0$ oppure $\lambda = 4$ e non ci sono altre possibiltà. Se $x = 0$, sostituendo nell'ultima equazione si ottiene $y = \pm 3$. Se invece $\lambda = 4$, sostituendo nella seconda equazione si ottiene $y = 27/8$ che a sua volta inserito nell'ultima equazione porta a $x^2 + \frac{17}{16} = 0$ che non porta soluzioni reali. Dunque la conclusione rimane la stessa del punto precedente:

$$\max_E f = 9 \qquad \min_E f = -9$$

il punto di massimo è $(0,3)$ e il punto di minimo è $(0,-3)$.

✍ **Esercizio 1.7.7.**

Risolvendo un opportuno problema di minimizzazione, trovare il più piccolo cerchio di centro l'origine che ha intersezione non vuota con la curva di equazione $xy = \dfrac{8}{9}$.

La funzione da minimizzare è $f(x, y) = x^2 + y^2$ che è una funzione continua; d'altra parte in questo caso il vincolo è un chiuso (controimmagine di un chiuso tramite una funzione continua) ma non è limitato (si tratta di un'iperbole equilatera) pertanto non sono verificate le ipotesi per applicare il teorema di Weierstrass e il massimo e il minimo assoluti della funzione f sul vincolo non è detto che esistano.
Proviamo comunque ad applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del sistema diventa

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\left(xy - \frac{8}{9}\right).$$

Si osserva facilmente che nel vincolo tutti i punti sono regolari. Per cui i candidati punti di estremo (se esistono) si trovano tra i punti critici della Lagrangiana cioè tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - \lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - \lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -\left(xy - \dfrac{8}{9}\right) = 0. \end{cases}$$

Se fosse $y = 0$ si avrebbe anche $\lambda x = 0$ quindi o $\lambda = 0$ che porterebbe a $x = 0$, assurdo dall'ultima equazione, oppure direttamente a $x = 0$, assurdo. Quindi deve essere $y \neq 0$ e pertanto esplicitando λ dalla prima equazione si ottiene

$$\lambda = \frac{2x}{y}$$

che sostituita nella seconda equazione porta a

$$2y - \frac{2x^2}{y} = 0 \;\Leftrightarrow\; y^2 = x^2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm y.$$

Se $y = -x$ non si hanno soluzioni reali; se invece $y = x$ si ottiene $y^2 = 8/9$ e

$$y = x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Si dovrebbe poi effettivamente verificare che questi sono effettivamente dei punti di minimo (per esempio con il metodo delle curve di livello).
Pertanto il cerchio che risolve il problema di minimo richiesto ha raggio

$$r = \sqrt{f\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)} = \frac{4}{3}.$$

✍ **Esercizio 1.7.8.**

Determinare tutti i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

soggetta al vincolo

$$x^{3/2} + y^{3/2} = 1.$$

La funzione data è continua, il vincolo è un insieme chiuso (luogo di zeri di una funzione continua) e limitato dunque il massimo e il minimo di f sul vincolo esistono dal teorema di Weiestrass.
Il vincolo è descritto da un'equazione dunque l'insieme $x^{3/2} + y^{3/2} = 1$ è un chiuso. Denotiamo con E questo insieme. Pertanto la parte interna di E è vuota, quindi non ci sono punti stazionari interni (da calcolare annullando il gradiente di f). Inoltre la funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ pertanto non ci sono eventuali punti di non differenziabilità. Il massimo e il minimo di f su E andranno trovati tra i punti del bordo cioè sull'insieme E stesso.
Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del sistema risulta

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^{3/2} + y^{3/2} - 1).$$

Si osserva facilmente che nel vincolo tutti i punti sono regolari. Per cui i candidati punti di massimo e minimo si trovano tra i punti critici della Lagrangiana cioè tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - \dfrac{3}{2}\lambda\sqrt{x} = \sqrt{x}\left[2\sqrt{x} - \dfrac{3}{2}\lambda\right] = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - \dfrac{3}{2}\lambda\sqrt{y} = \sqrt{y}\left[2\sqrt{y} - \dfrac{3}{2}\lambda\right] = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -\left(x^{3/2} + y^{3/2} - 1\right) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, sfruttando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene $x = 0$ oppure $\sqrt{x} = \frac{3}{4}\lambda$ e non ci sono altre possibilità. Inserendo $x = 0$ nell'ultima equazione si ottiene $y^{3/2} = 1$ e dunque un candidato punto di estremo assoluto è $(0, 1)$. D'altra parte se $\sqrt{x} = \frac{3}{4}\lambda$ allora dalla seconda equazione si ottiene $y = 0$ oppure (sostituendo il valore di λ) $\sqrt{x} = \sqrt{y}$. Nel primo caso si ottiene (sostituendo nell'ultima equazione) $x = 1$ mentre nel secondo caso si ottiene $y = x$ (con $x \geq 0$, $y \geq 0$) e sostituendo nell'ultima equazione si ha $x^{3/2} = 1$ dunque $x = y = \sqrt[3]{1/4}$.
Confrontando i valori assunti da f nei vari punti candidati estremo assoluto si ottiene

$$f(0, 1) = f(1, 0) = 1 \qquad f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Concludendo
$$\max_E f = 1 \qquad \min_E f = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$
i punti di massimo sono $(1, 0)$ e $(0, 1)$ e il punto di minimo è $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$.

✍ **Esercizio 1.7.9.**

Determinare tutti i punti di massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x, y) = x^2y + \frac{1}{5}y^5$$
soggetta al vincolo $x^2 + y^4 = 1$.

La funzione data è continua, il vincolo è un insieme chiuso (luogo di zeri di una funzione continua) e limitato dunque il massimo e il minimo di f sul vincolo esistono dal teorema di Weiestrass.
Il vincolo è descritto da un'equazione dunque l'insieme $x^2+y^4 = 1$ è un chiuso. Denotiamo con E questo insieme. Pertanto la parte interna di E è vuota, quindi non ci sono punti stazionari interni (da calcolare annullando il gradiente di f). Inoltre la funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ pertanto non ci sono eventuali punti di non differenziabilità. Il massimo e il minimo di f su E andranno trovati tra i punti del bordo cioè sull'insieme E stesso.
Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana del sistema risulta
$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2y + \frac{1}{5}y^5 - \lambda(x^2 + y^4 - 1).$$
Si osserva facilmente che nel vincolo tutti i punti sono regolari. Per cui i candidati punti di massimo e minimo si trovano tra i punti critici della Lagrangiana cioè tra le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2xy - 2x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = x^2 + y^4 - 4\lambda y^3 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -\left(x^2 + y^4 - 1\right) = 0. \end{cases}$$
Dalla prima equazione, sfruttando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene $x = 0$ oppure $y = \lambda$ e non ci sono altre possibilità. Inserendo $x = 0$ nell'ultima equazione si ottiene $y^4 = 1$ e dunque candidati punti di estremo assoluto sono $(0, \pm 1)$. D'altra parte se $y = \lambda$ allora osservo che nella seconda equazione posso direttamente sostituire la terza equazione e in questo modo si ottiene $1 - 4y^3\lambda = 0$; a questo punto sostituisco direttamente anche $y = \lambda$ e pertanto

si ottiene $y^4 = 1/4$. Di nuovo sostituendo nell'ultima equazione si deduce $x^2 + \frac{1}{4} = 1$, dunque ulteriori candidati punti di estremo assoluto sono

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Confrontando i valori assunti da f nei vari punti candidati estremo assoluto si ottiene

$$f(0,1) = \frac{1}{5} \qquad f(0,-1) = -\frac{1}{5} \qquad f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{61}{160} \qquad f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{61}{160}.$$

Concludendo

$$\max_E f = \frac{61}{160} \qquad \min_E f = -\frac{61}{160}$$

i punti di massimo sono $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e i punti di minimo sono $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

1.8. Esercizi proposti

N.B. *di alcuni di questi esercizi si propone solo un suggerimento della soluzione o semplicemente il risultato. Si rimanda lo studente alle sezioni precedenti per lo svolgimento completo degli esercizi come richiesto in sede d'esame.*

✍ **Esercizio 1.8.1.**

La funzione

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

possiede un massimo e un minimo sulla curva piana di equazione $xy + x + y + 4 = 0$? In caso affermativo, determinarli.

Hint: Il vincolo è un insieme chiuso ma non limitato (basta fare il limite per $x \to -1$). Quindi non si può applicare il teorema di Weierstrass e pertanto l'esistenza del massimo e del minimo assoluto di f sul vincolo non è detto che esistano. Però l'esercizio chiede se esiste UN massimo e UN minimo, non necessariamente IL massimo e IL minimo assoluto. Pertanto proviamo a cercarli usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si verifica che tutti i punti del vincolo sono regolari.
La Lagrangiana del sistema diventa

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \frac{x+y}{x-y} - \lambda(xy + x + y + 4).$$

I punti critici della Lagrangiana sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = -\dfrac{2y}{(x-y)^2} - \lambda(y+1) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = \dfrac{2x}{(x-y)^2} - \lambda(x+1) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -(xy+x+y+4) = 0. \end{cases}$$

A questo punto, se $y+1=0$ cioè se $y=-1$ allora sostituendo nell'ultima equazione si ottiene un assurdo, quindi $y \neq -1$ e pertanto è possibile ricavare λ dalla prima equazione

$$\lambda = -\frac{2y}{(x-y)^2(y+1)}$$

e sostituire il risultato nella seconda equazione, ottenendo

$$\frac{2x}{(x-y)^2} + \frac{2y(x+1)}{(x-y)^2(y+1)} = 0 \iff \frac{4xy+2x+2y}{(x-y)^2(y+1)} = 0 \iff 2xy+x+y=0.$$

Adesso se da questa equazione si va a sottrarre l'equazione del vincolo si deduce $xy=4$ e pertanto inserendo di nuovo questa informazione nell'equazione del vincolo si ha $x+y+8=0$. Dunque $y=-x-8$ da cui $x(-8-x)=4$ cioè $x^2+8x+4=0$ che porta a $x=-4\pm 2\sqrt{3}$ che corrispondono a $y=-4\mp 2\sqrt{3}$.
Dunque i punti candidati ad essere massimo o minimo sono

$$A=(-4+2\sqrt{3},-4-2\sqrt{3}) \qquad B=(-4-2\sqrt{3},-4+2\sqrt{3}).$$

A questo punto

$$f(A) = -\frac{8}{4\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad f(B) = \frac{8}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

quindi esiste un massimo e un minimo locale per f sulla curva data. L'analisi che riguarda il massimo e il minimo assoluto risulta difficile.

✍ **Esercizio 1.8.2.**

Trovare gli estremi della funzione $f(x,y)=x^2+y^3-3y+1$ nel cerchio chiuso $x^2+y^2=4$. Per studiare la restrizione di $f(x,y)$ alla circonferenza di contorno, utilizzare sia il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, sia una sostituzione che riduca lo studio a quello di una funzione di una variabile (verificando che si ottengono gli stessi risultati).

➾ **Hint:** Vale il teorema di Weierstrass che assicura l'esistenza del massimo e del minimo

assoluto di f sulla circonferenza. Non ci sono punti stazionari interni (il vincolo è solo la circonferenza e non il cerchio); non ci sono punti singolari per f.
metodo dei moltiplicatori di Lagrange: tutti i punti del vincolo sono regolari. Si ha

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^3 - 3y + 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

I punti critici della Lagrangiana sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2x - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 3y^2 - 3 - 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\left(x^2 + y^2 - 4\right) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene: $x = 0$ che porta a $y = \pm 2$ e $\lambda = 1$ che porta a $3y^2 - 2y - 3 = 0$. Quindi in quest'ultimo caso $y = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$ e di conseguenza

$$x^2 = 4 - y^2 = 4 - \frac{11}{9} \mp \frac{2}{9}\sqrt{10} = \frac{25}{9} \mp \frac{2}{9}\sqrt{10}.$$

Candidati punti di estremo assoluto sono pertanto

$$A = (0,2) \; B = (0,-2) \; C = \left(\sqrt{\frac{25}{9} - \frac{2}{9}\sqrt{10}}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) \; D = \left(-\sqrt{\frac{25}{9} - \frac{2}{9}\sqrt{10}}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$E = \left(\sqrt{\frac{25}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{10}}, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) \quad F = \left(-\sqrt{\frac{25}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{10}}, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$$

Si verifica che

$$f(A) = 3 \qquad f(B) = -1 \qquad f(C) = f(D) = \frac{98}{27} + \frac{8}{27}\sqrt{10} > 3 \qquad f(E) = f(F) = \frac{98}{27} - \frac{8}{27}\sqrt{10} > 0$$

da cui B è punto di minimo e C, D punti di massimo (assoluti).

vincolo esplicitabile: si usa il cambio di coordinate $x = 2\cos\theta$ e $y = 2\sin\theta$ da cui

$$\tilde{f}(\theta) = 4\cos^2\theta + 8\sin^3\theta - 6\sin\theta + 1$$

da cui

$$\tilde{f}(\theta) = -8\cos\theta\sin\theta + 24\sin^2\theta\cos\theta - 6\cos\theta$$

che si annulla se $\cos\theta = 0$ oppure se $\sin\theta$ risolve l'equazione $12\sin^2\theta - 4\sin\theta - 3 = 0$. Si ritrovano pertanto i punti dell'analisi precedente.

✍ **Esercizio 1.8.3.**

Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3y + 2$.
a) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1)$.
b) Calcolare la derivata direzionale di f in $(1,1)$ nella direzione del vettore $[1,1]$.
c) Trovare i punti estremanti di f soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 4$.
d) Determinare i punti estremanti di f nel cerchio chiuso $x^2 + y^2 \leq 4$.

Hint: a) Si ha $f_x(1,1) = 2$ e $f_y(1,1) = -1$ dunque il piano tangente risulta

$$z = 1 + 2(x-1) - (y-1)$$

cioè $z = 2x - y$.

b) Siccome f è differenziabile si può usare la formula del gradiente. Il versore dato dal vettore $[1,1]$ è $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ dunque

$$D_{\underline{v}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \underline{v} = (2,-1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) Vale il teorema di Weierstrass. Non ci sono punti singolari ($f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$); i punti stazionari interni sono quelli che annullano il gradiente di f

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y-2) = (0,0) \iff (x,y) = (0, 3/2).$$

Sul bordo invece $x^2+y^2 = 4$ si osserva che $f(x,y) = 4-3y+2 = 6-3y =: g(y)$ con $-2 \leq y \leq 2$ che è sempre decrescente nell'intervallo considerato quindi punti di estremo sono i punti del bordo dell'intervallo $y = \pm 2$ a cui corrisponde $x = 0$. Dunque

$$f(0,3/2) = -\frac{1}{4} \qquad f(0,2) = 0 \qquad f(0,-2) = 12$$

quindi

$$\max_C f = 12 \qquad \min_C f = -\frac{1}{4}$$

punto di massimo $(0,-2)$; punto di minimo $(0,3/2)$.

✍ **Esercizio 1.8.4.**

Sia data la funzione $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + \frac{1}{2}x$.
(i) Si determinino i suoi punti stazionari in $\mathbb{R}^2$, e se ne studi la natura.
(ii) Si dica se essa ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme (ellisse)

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + 4\,y^2 \leq \, 4\right\},$$

e in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

(i) I punti stazionari per una funzione sono quelli che annullano il gradiente della funzione stessa. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(2x + \frac{1}{2}, 6y\right)$$

da cui

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{4}, 0\right).$$

Quindi $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ è l'unico punto stazionario per f.
Proviamo a studiarne la natura con il test della matrice Hessiana. Si ha

$$f_{xx}(x,y) = 2 \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0 \qquad f_{yy}(x,y) = 6$$

da cui

$$Hf\left(-\frac{1}{4}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Poiché il determinante della matrice Hessiana uguale a $12 > 0$ e $f_{xx}\left(-\frac{1}{4}, 0\right) = 2 > 0$, si può senz'altro dire che $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ è un punto di minimo relativo per f.

(ii) La funzione data è continua, l'insieme dato (che è un'ellisse e che chiameremo d'ora in avanti E) è chiuso e limitato, quindi il massimo e il minimo assoluto della funzione su E esistono per il teorema di Weierstrass.
$\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ è l'unico punto che annulla il gradiente di f come visto al punto (i), ed appartiene ad E; la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e dunque non ci sono punti singolari; resta quindi da studiare il comportamento lungo il bordo dell'ellisse, che possiamo riscrivere come $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.
Per fare ciò parametrizziamo il bordo:

$$\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \end{cases}$$

Possiamo perciò riscrivere

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 4\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta + \cos\vartheta \\ &= 4\cos^2\vartheta + 3 - 3\cos^2\vartheta + \cos\vartheta \\ &= \cos^2\vartheta + \cos\vartheta + 3 \\ &= \tilde{f}(\vartheta) \end{aligned}$$

Allora $\tilde{f}'(\vartheta) = -2\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin\vartheta = -\sin\vartheta\,(2\cos\vartheta + 1)$, dunque la derivata sul bordo si annulla quando $\sin\vartheta = 0$ oppure $\cos\vartheta = -1/2$, dunque per

$$\vartheta = 0\ ,\ \pi\ ,\ \frac{2}{3}\pi\ ,\ \frac{4}{3}\pi.$$

Resta perciò da calcolare il valore della funzione nei punti corrispondenti a tali valori di ϑ:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(0) = 5 = f(2,0) \\ &\tilde{f}(\pi) = 3 = f(-2,0) \\ &\tilde{f}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{29}{4} = f\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\tilde{f}\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{29}{4} = f\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Inoltre sappiamo che $f\left(-\frac{1}{4}, 0\right) = -\frac{1}{16}$.
Possiamo concludere che il massimo assoluto di f su E vale $\frac{29}{4}$ ed è assunto nei punti $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, mentre il punto di minimo assoluto, in cui f vale $-\frac{1}{16}$, è $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

✍ **Esercizio 1.8.5.**

Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$$

sull'insieme $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$.

Prima di tutto osserviamo che la funzione data è continua, il vincolo proposto è un insieme chiuso e limitato quindi dal Teorema di Weierstrass esistono il massimo e il minimo assoluti di f su T. Osserviamo inoltre che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi non esistono punti di non differenziabilità. Cerchiamo i punti stazionari della funzione:

$$\nabla f(x,y) = \left(2xy + y^2 - y, x^2 + 2xy - x\right),$$

quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x+y-1) = 0 \\ x(x+2y-1) = 0 \end{cases}.$$

I punti che soddisfano questo sistema sono $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, e sono quindi i punti critici della funzione. I primi tre sono sulla frontiera di T, mentre il quarto è interno ad esso. In questo punto la funzione vale $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$. Invece, essendo $f(x,y) = xy(x+y-1)$, abbiamo che $f(x,y)$ è identicamente nulla sulla frontiera di T.
Quindi il punto di minimo assoluto è $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, mentre il massimo assoluto della funzione è zero e viene assunto sulla frontiera di T.

✍ **Esercizio 1.8.6.**

Determinare il dominio D della funzione

$$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2} + 4x$$

e dire se è aperto, chiuso, connesso, limitato. Verificare che la funzione è differenziabile nei punti interni di tale dominio. Calcolare massimi e minimi assoluti della funzione in D.

Hint: Si ha

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Si tratta di un'ellisse che è un insieme chiuso e limitato. f è continua pertanto il massimo e il minimo assoluti di f su D esistono per il Teorema di Weierstrass. Si ha

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}} + 4 \qquad f_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}}.$$

Si ha $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e soltanto se

$$(x,y) = \left(\frac{16}{\sqrt{65}}, 0\right) \in \mathring{D}.$$

f è differenziabile perché le derivate parziali esistono e sono continue in ogni punto interno a D, quindi non ci sono punti singolari per f. Sul bordo di D si ha inoltre $f(x,y) = 4x$ con $x \in [-2,2]$ che è una funzione crescente nell'intervallo considerato quindi candidati punti di estremo assoluto sono i punti $(\pm 2, 0)$. Visto che si ha

$$f(2,0) = 8 \qquad f(-2,0) = -8 \qquad f\left(\frac{16}{\sqrt{65}}, 0\right) = \sqrt{65} > 8$$

quindi

$$\max f_D = \sqrt{65} \qquad \min f_D = -8$$

e i punti di massimo e minimo assoluto sono rispettivamente $\left(\frac{16}{\sqrt{65}}, 0\right)$ e $(-2, 0)$.

✍ **Esercizio 1.8.7.**

Sia data la funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - x^3 - 4y^3.$$

a) Trovare i punti stazionari di f e determinarne la natura.
b) Trovare gli estremi assoluti di f nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$.

a) Si ha

$$f_x(x, y) = 2x + 2y - 3x^2 \qquad f_y(x, y) = 2x + 2y - 12y^2$$

quindi i punti stazionari sono

$$O = (0, 0) \qquad A = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) \qquad B = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Il test dell'Hessiana fallisce con l'origine ma studiando il segno dell'incremento si ha

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^2 + 2xy + y^2 - x^3 - 4y^3$$

e visto che si ha $f(x, -x) = 3x^3$ si vede facilmente che l'origine è un punto di sella. Studiando direttamente la matrice Hessiana si vede invece che A è un punto di sella e B è un punto di massimo.

b) Sono verificate le ipotesi del Teorema di Weierstrass. Non ci sono punti singolari né punti stazionari interni. Studiamo il bordo parametrizzandolo. Si ha:
1) $y = 0$ con $-1 \leq x \leq 0$, da cui $f(x, 0) = x^2 - x^3$ e candidati punti di estremo assoluto per f sono $(0, 0)$ e $(-1, 0)$ da cui $f(0, 0) = 0$ e $f(-1, 0) = 2$.
2) $x = -1$ con $0 \leq y \leq 1$, da cui $f(-1, y) = 1 - 2y + y^2 + 1 - 4y^3$ e pertanto candidati punti di estremo sono $(-1, 0)$ e $(-1, 1)$ da cui $f(-1, 0) = 2$ e $f(-1, 1) = -3$.
3) $y = -x$ con $-1 \leq x \leq 0$ da cui $f(x, -x) = 3x^3$ e pertanto candidati punti di estremo sono $(-1, 1)$ e $(0, 0)$ da cui $f(-1, 1) = -3$ e $f(0, 0) = 0$.
Concludendo si ha $\max_T f = 2$ e $\min_T f = -3$ e i punti di massimo e minimo assoluti sono rispettivamente $(-1, 0)$ e $(-1, 1)$.

✍ **Esercizio 1.8.8.**

Sia $\mathcal{U}(x, y) = x^3 - xy^2 - x$ una funzione di produzione dove x ed y rappresentano rispettivamente la variazione di capitale e di lavoro rispetto ad un livello preso come riferimento. Si trovino i valori di x e y che rispettivamente massimizzano e minimizzano la produzione nel rispetto della condizione di budget $g(x, y) = x^2 + 4y^2 \leq 4$. a) Trovare i massimi e minimi liberi interni al dominio $x^2 + 4y^2 < 4$.
b) Trovare i massimi e minimi vincolati alla linea $x^2 + 4y^2 = 4$ senza usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Hint: a) Si ha

$$\nabla\mathcal{U}(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases}$$

da cui troviamo due punti stazionari

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \qquad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Si ha inoltre

$$\mathcal{U}_{xx}(x, y) = 6x \qquad \mathcal{U}_{xy}(x, y) = \mathcal{U}_{yx}(x, y) = -2y \qquad \mathcal{U}_{yy}(x, y) = -2x$$

da cui si vede facilmente che entrambi i punti trovari sono punti di sella.

b) Dalla simmetria del vincolo e della $\mathcal{U}$ rispetto al lavoro y si deduce che la soluzione sarà simmetrica rispetto a cambiamenti di segno di y. Per trovare i massimi e i minimi vincolati possiamo esplicitare il vincolo $y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$ che chiameremo E e sostituirlo nell'equazione ottenendo

$$\mathcal{U}(x, 1 - x^2/4) =: g(x) = \frac{5}{4}x^3 - 2x \qquad x \in [-2, 2].$$

Andando ad annullare la derivata prima di g e considerando anche i punti di bordo dell'intervallo si ottengono i seguenti punti candidati punti di estremo assoluto

$$(-2, 0) \qquad \left(\sqrt{\frac{8}{15}}, \pm\sqrt{\frac{13}{15}}\right) \qquad \left(-\sqrt{\frac{8}{15}}, \pm\sqrt{\frac{13}{15}}\right) \qquad (2, 0)$$

quindi riassumendo si ha che

$$\max_E f = 6 \qquad \min_E f = -6$$

e i punti di massimo e minimo assoluti sono rispettivamente $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

✍ **Esercizio 1.8.9.**

Sia data la funzione
$$f(x,y) = x^3 + y^2 - x.$$
1) Calcolare gli estremi liberi di f.
2) Calcolare gli estremi assoluti di f nel cerchio $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Hint: 1) I punti stazionari sono le soluzioni del seguente sistema
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$
da cui i punti critici sono
$$P_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \qquad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right).$$
Si ha inoltre
$$f_{xx}(x,y) = 6x \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0 \qquad f_{yy}(x,y) = 2$$
quindi il punto P_1 è un punto di sella mentre P_2 è un punto di minimo locale.

2) Sono verificate le ipotesi del Teorema di Weierstrass quindi gli estremi assoluti di f su D esistono. L'unico punto stazionario interno è P_2 (perché P_1 è comunque interno ma è un punto di sella) e non ci sono punti singolari per f. Sul bordo possiamo parametrizzare il vincolo ponendo $y^2 = 1 - x^2$ e sostituendolo nell'espressione di f con la restrizione $x \in [-1,1]$. In alternativa possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (non ci sono punti singolari per il vincolo) dunque la Lagrangiana del sistema si scrive come
$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^3 + y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$
da cui i punti stazionari vincolari si possono trovare tra i punti critici della Lagrangiana cioè
$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 1 - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
Dalla seconda equazione si ottiene $y = 0$ che porta a (sostituendo nella terza equazione) $x = \pm 1$ oppure $\lambda = 1$ che porta a (sostituendo nella prima equazione) $x = 1$ e $x = 1/3$ che portano rispettivamente a $y = 0$ e $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Dall'analisi finale si ha che
$$\max_D f = \frac{32}{27} = f\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \qquad \min_D f = -\frac{2}{9}\sqrt{3} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

✍ **Esercizio 1.8.10.**

Data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ determinare gli estremi di f sull'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Hint: La funzione assegnata rappresenta il quadrato della distanza dall'origine al punto di coordinate (x, y); l'insieme assegnato è il cerchio di centro $(2, 0)$ passante per l'origine. I punti di massimo e minimo assoluti della funzione (esistenti a norma del teorema di Weierstrass) saranno quindi rispettivamente $(4, 0)$ e $(0, 0)$. Svolgendo i conti nei modi standard: per i punti interni, essendo f differenziabile, deve valere la condizione necessaria di stazionarietà (teorema di Fermat): e l'unico punto stazionario, $(0, 0)$ (che nell'intero $\mathbb{R}^2$ è punto di minimo), si trova sulla frontiera. Ricavando $y = y(x)$ dall'equazione della circonferenza e sostituendola in $f(x, y)$, troviamo $F(x) = f(x, y(x)) = 4x$ con $x \in [0, 4]$: questa funzione è crescente e perciò ha il minimo nel primo estremo e il massimo nel secondo. Altra sostituzione comoda (che porta ovviamente allo stesso risultato) può essere $x = 2 + 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. Volendo ricorrere ai moltiplicatori di Lagrange, la Lagrangiana risulta

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4x)$$

e dunque la condizione necessaria di stazionarietà si traduce nella risoluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x - \lambda(2x - 4) = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

e si ritrovano i punti precedenti.

✍ **Esercizio 1.8.11.**

Sia $f(x, y) = (x + 1)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.
Determinare gli estremi assoluti di f nel cerchio chiuso $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Hint: le derivate parziali valgono, se $(x, y) \neq (0, 0)$

$$f_x(x, y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x + 1)\right) \qquad f_y(x, y) = -(x + 1)e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

nel punto $O = (0, 0)$ invece non è garantita l'esistenza delle derivate parziali e pertanto il punto O verrà analizzato a parte. I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali: le soluzioni dell'equazione $f_y(x,y) = 0$ sono $x = -1$ e $y = 0$. Sostituendo $x = -1$ nell'equazione $f_x(x,y) = 0$ non si hanno soluzioni. Sostituendo $y = 0$ nell'equazione $f_x(x,y) = 0$ si trova l'equazione

$$1 - \frac{x}{|x|}(x+1) = 0$$

pertanto se $x > 0$ l'equazione porta a $x = 0$ a cui corrisponde l'origine; se $x < 0$ l'equazione porta a $x = -2$ a cui corrisponde il punto $P = (-2, 0)$ che non è interno al dominio. Pertanto all'interno del dominio l'unico candidato estremo è l'origine. Sulla frontiera di C si ha che

$$f(x,y)_{|C} = (x+1)e^{-2} \qquad x \in [-2, 2].$$

Tale funzione, essendo crescente, ha minimo in P e massimo in $Q = (2, 0)$. Per il teorema di Weierstrass, essendo f continua su un insieme chiuso e limitato, f avrà massimo e minimo assoluti in C. I candidati estremi sono i punti O, P, Q e confrontando $f(O) = 1$, $f(P) = -e^{-2}$, $f(Q) = 3e^{-2}$, si deduce che il minimo assoluto è $-e^{-2}$ raggiunto nel punto P e il massimo assoluto è 1 raggiunto nell'origine.

✍ **Esercizio 1.8.12.**

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinare il rettangolo di area massima inscritto nella curva di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Hint: si tratta di massimizzare la funzione $f(x,y) = xy$ con la condizione $x^2 + y^2 = 1$, sapendo che l'area massima richiesta vale $A = 4|xy|$. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ha $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2+y^2-1)$ da cui i punti critici vincolati sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Lavorando sulle prime due equazioni si ottiene $x^2 = y^2$ e sostituendo nell'equazione del vincolo si ottengono i punti

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

I punti concordi forniscono il massimo di f sul vincolo e i punti discordi il minimo. Il rettangolo di area massima è il quadrato che ha per veritici i 4 punti.

✍ **Esercizio 1.8.13.**

Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se le seguenti funzioni ammettono massimo assoluto e minimo assoluto negli insiemi chiusi e limitati rispettivamente indicati e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo e minimo assoluti.

1)$f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$ su $Q = [-1,1] \times [-1,1]$
2)$f(x,y) = x + y + xy$ su $S = \{(x,y) : x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$
3)$f(x,y) = 2x^2 - x^4 - 2y^2$ su $S = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
4)$f(x,y) = xy + y^2 - y\sqrt{x}$ su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
5)$f(x,y) = (x-1)^2 y + (y-2)^2 - 4$ su $E = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 9 - (x-1)^2\}$
6)$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y$ su $E = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ \ x - 5 \leq y \leq 0\}$
7)$g(x,y) = x^2 - y^2$ su $Q = [-1,1] \times [-1,1]$
8)$f(x,y) = (x-1)\, e^{x\,y}$ su $R = [0,3] \times [-1,0]$
9)$f(x,y) = 3\,y^2\,x - x^3 + y^2$ su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$
10)$f(x,y) = 4\,x\,y + 4\,x$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 5x^2 + 5\,y^2 - 6\,x\,y - 6\,x + 10\,y + 4\ \leq\ 0\}$

R.

1) $\min_Q f = -\frac{1}{8} = f\left(\frac{3}{4}, 1\right)$, $\max_Q f = 6 = f(-1,1)$
2) $\min f = f(0,0) = 0$ $\max f = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$.
3) $\max f = 1 = f(\pm 1, 0)$ $\min f = -2 = f(0, \pm 1)$
4) $\max_A f = 1 = f(1,1)$ $\min_A f = -\frac{1}{64} = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$
5) $\min_E f = -4 = f(1,2)$, $\max_E f = 45 = f(1,9)$
6) $\min_E f(x,y) = f(1,-3) = -10$ $\max_E f(x,y) = f(0,0) = f(2,0) = 0$
7) $\max_Q g = 1 = g(1,0) = g(-1,0)$ $\min_Q g = -1 = g(0,-1) = g(0,1)$
8) $\max_R f = 2 = f(3,0)$ $\min_R f = -1 = f(0,y),\ y \in [-1,0]$
9) $\min_R f = -8 = f(2,0)$ $\max_R f = 3 = f(1,1)$
10) $\max_E f = 1 = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ $\min_E f = -\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right) = f\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

Esercizio 1.8.14.

Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se le seguenti funzioni ammettono massimo assoluto e minimo assoluto negli insiemi chiusi e limitati rispettivamente indicati e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo e minimo assoluti.

11)$f(x,y) = \log(1+x^2-xy+2y^2)$ su triangolo chiuso di vertici $(-1,-1),(-1,1)$ e $(2,1)$
12)$f(x,y) = 2x^2+y^2+x$ su $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$
13)$f(x,y,z) = e^{x+y^2+z}$ su $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-x-z-1=0\}$
14)$f(x,y) = x-e^x(y^2+1)$ su $R = [-1,1]\times[-\sqrt{e-1},\sqrt{e-1}]$
15)$f(x,y) = 8x^2+2y^2+2xy-1$ su quadrato chiuso di centro l'origine degli assi e lato 2
16)$f(x,y) = \arctan(x^2+2\,y^2)$ su $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4,\ y\ge 2-x\}$
17)$f(x,y) = e^{x\,y}\,x\,y$ su $A = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$
18)$f(x,y) = x^4+y^4+x^2\,(y^2-5)+y^2\,(x^2-5)+6$ su $D = \left[-\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right]\times\left[-\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$.

R.

11) $\max_T f(x,y) = f(-1,1) = f(2,1) = \log 5$ $\quad$ $\min_T f(x,y) = f(0,0) = 0$
12) $\max_C f = 3 = f(1,0)$ $\quad$ $\min_C f = -1/8 = f(-1/4,0)$
13) $\max_S f = e^3 = f(1,1,1) = f(1,-1,1)$ $\quad$ $\min_S f = e^{1-\sqrt{3}} = f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},0,\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$
14) $\min_R f(x,y) = 1-e^2 = f(1,\pm\sqrt{e-1})$ $\quad$ $\max_R f(x,y) = -1 = f(0,0)$
15) $\min_Q f = -1 = f(0,0)$ $\quad$ $\max_Q f = 11 = f(-1,-1) = f(1,1)$
16) $\min_A f(x,y) = \arctan\frac{8}{3} = f\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ $\quad$ $\max_A f(x,y) = \arctan 8 = f(0,2)$
17) $\max_A f = \frac{1}{2}\,e^{1/2} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad$ $\min_A f = -\frac{1}{2}\,e^{-1/2} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
18) $\min_D f = -1/4 = f(\pm\sqrt{5/2},0) = f(0,\pm\sqrt{5/2})$,
$\max_D f = 6 = f(0,0)$
$= f(\pm\sqrt{5/2},\pm\sqrt{5/2}) = f(\mp\sqrt{5/2},\pm\sqrt{5/2})$

Esercizio 1.8.15.

Trovare, se esistono, i punti dell'insieme

$$M = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2-xy+y^2-z=1\ ,\ x^2+y^2=1\right\}$$

che hanno minima e massima distanza dall'origine $(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$. *(Suggerimento: poiché i punti che rendono minima/massima la distanza sono anche punti di minimo/massimo per il quadrato della distanza, si tratta di ottimizzare la funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ soggetta ai vincoli che definiscono M...)*

R. I punti che hanno massima distanza dall'origine (pari a 5/4) sono $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, -1/2)$ e $(\mp 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 1/2)$.
I punti che hanno minima distanza dall'origine sono $(\pm 1, 0, 0)$ e $(0, \pm 1, 0)$, e la distanza vale 1.

1.9. Esercizi proposti (senza soluzione)

N.B. *Sarò grata agli studenti che vorranno fornirmi copia della loro soluzione*

✍ **Esercizio 1.9.1.** *Trovare l'insieme di definizione E della funzione*

$$f(x, y) = \sqrt{2(x + 2y) - x^2 - 2y^2 - 1}.$$

Trovare inoltre, se esistono, il massimo e il minimo assoluti di f in E.

✍ **Esercizio 1.9.2.** *Dato l'insieme chiuso e limitato $Q = [0, 1] \times [0, 1] := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ determinare il massimo e il minimo su Q delle seguenti funzioni:*

$$\begin{aligned} &a) f(x, y) = x^2 + 3y^2 - xy - y \\ &b) f(x, y) = \frac{1}{2}x - y \\ &c) f(x, y) = e^{x+y} \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.9.3.** *Dato il triangolo chiuso T di vertici $P_1 = (1, 0), P_2 = (0, 1), P_3 = (-1, 0)$ determinare il massimo e il minimo su T delle seguenti funzioni:*

$$\begin{aligned} &a) f(x, y) = x^2 + 3y^2 - x \\ &b) f(x, y) = x^4 + 4xy - 2y^2 \\ &c) f(x, y) = x(x + y)e^{y-x} \\ &d) f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2) \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.9.4.** *Dato l'insieme chiuso e limitato* $A = \{(x, y) : |x|+|y| \leq 2\}$, *determinare massimo e minimo su* A *delle seguenti funzioni:*

$$
\begin{aligned}
&a)f(x,y) = x + xy^2 - x^2y\\
&b)f(x,y) = x^2 + \alpha y^2(\alpha \in \mathbb{R} \text{ fissato})\\
&c)f(x,y) = (y+1)e^{xy}\\
&d)f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)
\end{aligned}
$$

✍ **Esercizio 1.9.5.** *Dato l'insieme chiuso e limitato* $A = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 1\}$, *determinare massimo e minimo su* A *delle seguenti funzioni:*

$$
\begin{aligned}
&a)f(x,y) = x^4 + y^4\\
&b)f(x,y) = x^m y^n(m, n > 0 \text{ fissati})\\
&c)f(x,y) = e^{x+y}
\end{aligned}
$$

✍ **Esercizio 1.9.6.** *Dato gli insiemi chiusi e limitati* $V_1 = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$ *e* $V_2 = \{(x, y) : x^2-xy+y^2 \leq 1\}$ *ìdeterminare massimo e minimo su* V_1 *e* V_2 *delle seguenti funzioni:*

$$
\begin{aligned}
&a)f(x,y) = xy\\
&b)f(x,y) = x^2 + 3y
\end{aligned}
$$

✍ **Esercizio 1.9.7.** *Dato l'insieme chiuso e limitato* $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ *determinare massimo e minimo su* A *delle funzioni*

$$a) f(x, y, z) = xyz$$
$$b) f(x, y, z) = x + y - z$$

✍ **Esercizio 1.9.8.** *Trovare il massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x^2y^2z^2$$

nell'insieme chiuso e limitato $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

✍ **Esercizio 1.9.9.** *Trovare il massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = e^{-x^2+y-z^2}$$

nell'insieme chiuso e limitato $S = \{(x, y, z) : x^2/4 + y^2 + 3z^2 \le 1\}$.

✍ **Esercizio 1.9.10.** *Trovare il massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - \frac{1}{2}xy$$

nell'insieme chiuso e limitato $x^2 + 4y^2 - 4 \le 0$.

✍ **Esercizio 1.9.11.** *Si dimostri che la funzione*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

è dotata di massimo e di minimo. Si determinino tali valori.

✍ **Esercizio 1.9.12.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^2$$

sotto la condizione $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

✍ **Esercizio 1.9.13.** *Si determinino i punti della superficie*

$$f(x,y,z) = z^2 - xy - 1 = 0$$

più vicini all'origine.

✍ **Esercizio 1.9.14.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 + xy)^2$$

sotto la condizione $x^2 + y^2 = 1$.

✍ **Esercizio 1.9.15.** *Si dimostri che la funzione*

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{2x^2 + 3xy + 2y^2}$$

è dotata di massimo e di minimo. Si determinino tali valori.

✍ **Esercizio 1.9.16.** *Si determini il rettangolo con i lati paralleli agli assi, iscrivibile nell'ellisse di equazione*

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

che ha area massima.

✍ **Esercizio 1.9.17.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$$

nell'insieme chiuso e limitato $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 9\}$.

✍ **Esercizio 1.9.18.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y) = |y-1|(2-y-x^2)$$

nell'insieme chiuso e limitato $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2 - x^2 - y^2\}$.

✍ **Esercizio 1.9.19.** *Siano*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{4-x^2-y^2} & x^2+y^2 \neq 4 \\ 1 & x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

e $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \sqrt{2}\ \ a \in (0,\sqrt{2})\}$. *Si calcolino massimo e minimo di* f *in* D_a *e poi si determini estremo superiore e inferiore di* f *in* $D_{\sqrt{2}}$.

✍ **Esercizio 1.9.20.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y) = \log(1 + x + y + \sqrt{y^2 - x})$$

nell'insieme chiuso e limitato $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y < x < y^2,\ y \le 2\}$.

✍ **Esercizio 1.9.21.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} - \frac{1}{2}x^2 - y^2$$

nell'insieme chiuso e limitato $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \le 4,\ \ y \ge \frac{1}{2}\}$.

✍ **Esercizio 1.9.22.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y) = y^2(x^2+y^2-2x)$$

nell'insieme chiuso e limitato $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4,\ \ x^2+y^2-2x-2y < 0,\ \ y > 0\}$.

✍ **Esercizio 1.9.23.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y) = x^2(x^2+y^2+z^2-1)$$

nella sfera $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

✍ **Esercizio 1.9.24.** *Si determinino gli estremi della funzione*

$$f(x,y) = 4x(x^2-y^2) - 3x^2 + y^2$$

vincolati a

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{4}.$$

✍ **Esercizio 1.9.25.** *Siano* $f(x,y) = x$ *e* $g(x,y) = y^2 - x^3$. *Mostrare che* $(0,0)$ *è di minimo per* f *vincolato a* $g(x,y) = 0$, *ma che non è critico per* f *cioè non esiste alcun* λ *che verifichi l'uguaglianza*

$$\nabla f(0,0) = \lambda \nabla g(0,0).$$

✍ **Esercizio 1.9.26.** *Si determinino gli estremi della funzione*

$$f(x,y) = (y-x^2)^3$$

nella regione

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.27.** *In un riferimento cartesiano ortogonale si consideri l'ellisse γ intersezione dell'iperboloide di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ col piano di equazione $x + y + 2z = 0$; si determinino i punti di γ aventi quota minima e massima.*

✍ **Esercizio 1.9.28.** *Siano $f(x, y) = (y - x^2)(x - y^2)$ e $g(x, y) = y - x$. Si determinino i punti di estremo per f vincolati a $g = 0$. I punti trovati sono anche di estremo libero per f?*

✍ **Esercizio 1.9.29.** *Applicando il metodo delle curve di livello, si determinino gli estremi locali e globali della funzione*

$$f(x, y) = (1 - x^2 - 4y^2)^2$$

nel quadrato

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \ \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.30.** *Applicando il metodo delle curve di livello, si determinino gli estremi locali e globali della funzione*

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$$

nel dominio

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} - 1 \leq y \leq \frac{1 - |x|}{2}\right\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.31.** *Applicando il metodo delle curve di livello, si determinino gli estremi locali e globali della funzione*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

nel dominio

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.32.** *Si determinino, al variare di $m \in \mathbb{R}$, gli estremi della funzione*

$$f(x, y) = y - mx$$

nel dominio

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; y \leq 3 - x, \;\; y \leq 1 - \frac{x}{4}\right\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.33.** *Si verifichi che la funzione*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(2 + x^2 + y^2)^2}$$

è dotata di estremi assoluti nella striscia

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.34.** *Si verifichi che la funzione*

$$f(x, y) = e^{-x^2-2y} - e^{-2x^2-y}$$

è dotata di estremi assoluti nell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \;\; y \geq 0\}.$$

Si calcolino tali estremi.

✍ **Esercizio 1.9.35.** *Si determinino gli estremi della funzione*

$$f(x, y) = (x^3y^2 + xy)e^{-x^2y}$$

nel dominio

$$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.36.** *Studiare il campo scalare*

$$f(x,y) = \sin(x+y) - \cos(x-y)$$

su

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{\pi}{2},\ \ |y| \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.37.** *Determinare i valori di massimo e minimo della funzione*

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^4$$

nel dominio

$$D = \{(x,y) : 2x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.38.** *Determinare, se esistono, i massimi e i minimi assoluti della funzione*

$$f(x,y) = xye^{x-y}$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x,\ \ y > 0\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.39.** *Determinare il valore massimo e minimo del campo scalare*

$$f(x,y,z) = e^{-(x^2-z^2)}$$

sull'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + y^2 + 3z^2 \leq 1\right\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.40.** *Si studi la funzione:*

$$f(x,y) = (1-x^2)(x^2+y^2)$$

nel dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq x+2\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.41.** *Studiare la funzione:*

$$f(x,y) = |x-1|\sqrt{x^2+y^2}$$

nel dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x \leq 3\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.42.** *Studiare la funzione:*

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(2+x^2)^2}$$

sulla striscia

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.43.** *Sia $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale:*

$$G(x,y,z) = (G_1(x,y,z), G_2(x,y,z), G_3(x,y,z)) = (e^x + \arctan(y+z) - 1, y^3+y+z^3, e^z)$$

e $f : \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ il campo scalare:

$$h(x,y,z) = (f \circ G)(x,y,z) = f(G(x,y,z))$$

si provi che h è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ e che è non negativo. Si determini inoltre l'unico punto stazionario di h e si provi che è un minimo assoluto.

✍ **Esercizio 1.9.44.** *Si studi la funzione*

$$z = f(x, y) = |2x^2 - 4x + y^2|$$

sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.45.** *Determinare il valore massimo e il valore minimo della funzione:*

$$f(x, y) = 4x^2 - y^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^4$$

definita in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, \ \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.46.** *Determinare massimi e minimi assoluti della funzione:*

$$f(x, y) = 3 - x^2 - y^2 + 2x$$

definita in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2y - 3 \leq 0\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.47.** *Studiare la funzione:*

$$f(x, y) = |y + 1|\sqrt{x^2 + y^2}$$

definita in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2y \leq 3\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.48.** *Studiare la funzione:*

$$f(x,y) = 3x^2 + 3xy + y^3$$

definita in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, \ \ |y| \le 1\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.49.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (x,y) \in S \\ \arctan \dfrac{1}{(x^2+y^2-1)^2} & (x,y) \notin S \end{cases}$$

dove

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Provare che:
a) f *è differenziabile su tutto* $\mathbb{R}^2$*;*
b) f *è non negativa e limitata e determinare* $f(\mathbb{R}^2)$*;*
c) calcolare i punti stazionari di f *e determinarne la natura (si lascino in funzione di* $x, y, (x^2+y^2-1)$ *le derivate seconde;*
d) f *ha massimo assoluto e non ha minimo assoluto. Determinare* $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.

✍ **Esercizio 1.9.50.** *Dato il campo scalare* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \sqrt{|x| + y^2 + z^2}$$

a) determinare il dominio e il codominio di f*;*
b) determinare il massimo aperto $A \subset \mathbb{R}^3$ *dove* f *è differenziabile e gli eventuali punti critici;*
c) f *ammette massimo e minimo assoluti?*
Inoltre definita

$$\tilde{f}(x,y,z) = \min\{f(x,y,z), \sqrt{2}\}$$

ammette $\tilde{f}$ *massimo e minimo assoluti? In entrambi i casi, se la risposta è affermativa, determinarli.*

✍ **Esercizio 1.9.51.** *Dato il seguente campo scalare*

$$f(x,y,z) = \log x \log y + \log y \log z - \log z \log x$$

se ne determinino:

a) il dominio di definizione D;
b) i punti stazionari interni e la loro natura;
c) i valori di $\sup_D f$ e $\inf_D f$.

✍ **Esercizio 1.9.52.** *Sia f il campo scalare*

$$f(x,y,z) = 2xy + xz^2$$

e sia

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, \;\; x^2 + z^2 - y^2 \leq 1\}.$$

Si provi che f non ammette massimi o minimi relativi interni a D, mentre ammette massimo e minimo assoluti su D.

✍ **Esercizio 1.9.53.** *Studiare la continuità, la derivabilità, la differenziabiltà e determinare i punti di massimo e minimo relativi ed assoluti del campo scalare*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \in D, \;\; (x,y) \notin (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.54.** *Si determinino il massimo e il minimo del campo scalare*

$$f(x,y) = (x^2+y^2-4)^2 + 4x^2y^2 - 8$$

sul dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1\right\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.55.** *Si studi la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x+y & x > 0 \\ 2x + ye^{-x^2} & x \leq 0 \end{cases}$$

nel dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.56.** *Determinare i massimi e i minimi relativi ed assoluti del campo scalare*

$$f(x,y) = x(y^2-1) + z^2 + 2$$

sul dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + z^2 \leq 1\right\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.57.** *Studiare il campo scalare*

$$f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$$

sul dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + 32y^2 \leq \pi^2\right\}.$$

✍ **Esercizio 1.9.58.** *Calcolare il valore massimo della derivata direzionale della funzione*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{5}}{6}x^4 + \frac{\sqrt{5}}{12}y^4$$

secondo la direzione del vettore $\boldsymbol{v} = (1,2)$ *al variare di* (x,y) *sulla circonferenza* $x^2 + y^2 = 1$.

✍ **Esercizio 1.9.59.** *Determinare i massimi e i minimi della funzione*

$$f(x,y,z) = yz$$

per i punti (x,y,z) *che appartengono alla varietà unidimensionale definita dal sistema*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

✍ **Esercizio 1.9.60.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$$

per i punti che appartengono alla varietà bidimensionale

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1.$$

✍ **Esercizio 1.9.61.** *Determinare la minima distanza dal punto* $(0,0,1)$ *dei punti appartenenti alle superfici*

$$x^2 + (y-1)^2 + z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z + 1 = 0.$$

Determinare poi la massima distanza per i punti che in più soddisfano $x \in [-1,1]$.

✍ **Esercizio 1.9.62.** *Calcolare il valore massimo e minimo della funzione*

$$f(x,y,z) = (x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2$$

sulla superficie

$$g(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 + 2x - 2y + z = 0.$$

✍ **Esercizio 1.9.63.** *Determinare il valore massimo e minimo della derivata direzionale della funzione*

$$f(x,y,z) = x^3 + \frac{y^3}{2} + z^3$$

secondo la direzione del vettore $(2,2,1)$ *al variare di* (x,y,z) *sulla superficie* $x^2yz = 1$.

✍ **Esercizio 1.9.64.** *Determinare i punti dello spazio* $\mathbb{R}^3$ *che hanno massima e minima distanza dall'asse* z *e che inoltre appartengono alla varietà unidimensionale definita dalle equazioni*

$$x^2 + y^2 + 7z^2 = 1, \qquad x + y + z = 1.$$

✍ **Esercizio 1.9.65.** *Determinare massimo e minimo della funzione* $f(x,y) = y$ *per punti che soddisfano la condizione:*

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 4x^2 - 1 = 0.$$

✍ **Esercizio 1.9.66.** *Determinare il valore massimo e minimo della funzione*

$$f(x,y,z) = x^2 + y - 4z$$

nell'insieme G *varietà unidimensionale definita da:*

$$\begin{cases} 2x^2 + 2z^2 = y \\ \sqrt{2}x + 4z = y. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 1.9.67.** *Determinare i punti e i valori di massimo e minimo del campo scalare:*

$$f(x, y) = \int_0^{x+y^2} e^{-t^2}\, dt$$

quando il punto $P(x, y)$ appartiene alla curva

$$2x^2 + y^2 = 1.$$

✍ **Esercizio 1.9.68.** *Si determinino i massimi e i minimi assoluti del campo scalare*

$$f(x, y, z) = \arctan(x^2y^2z)$$

sulla curva γ determinata dall'intersezione delle superfici di equazione, rispettivamente

$$x^2 - z = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

✍ **Esercizio 1.9.69.** *Determinare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = x$ per punti che soddisfano alla condizione*

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 4y^2 - 1 = 0.$$

✍ **Esercizio 1.9.70.** *Determinare i punti e i valori di massimo e minimo del campo scalare*

$$f(x, y, z) = xy^2$$

per i punti $P(x, y, z)$ appartenenti alla varietà unidimensionale:

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad z = x + 2.$$

✍ **Esercizio 1.9.71.** *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *il campo scalare*

$$f(x, y, z) = 2xy - xz^2$$

a) si determinino il valore massimo e minimo che f *assume sulle curve di equazione rispettivamente:*

$$\gamma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

e

$$\gamma_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

b) si provi poi che le due curve γ_1, γ_2 *coincidono con l'intersezione delle due superfici*

$$\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 3, \qquad \sigma_2 : x^2 + z^2 - y^2 = 1.$$

✍ **Esercizio 1.9.72.** *Si determinino i massimi e minimi del campo scalare*

$$f(x, y, z) = 3x^2 + (y - 1)z^3 + xz[\arctan y - \sin y]$$

vincolati ad appartenere alla varietà unidimensionale γ *definita dall'intersezione delle due superfici di equazione, rispettivamente*

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, \qquad x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5.$$

✍ **Esercizio 1.9.73.** *Determinare il valore massimo e minimo del campo scalare*

$$f(x, y, z) = 1 - 4y - 4x^2$$

sulla varietà unidimensionale definita dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 2 \\ y(1 + x^2) = 4. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 1.9.74.** *Determinare il valore massimo e minimo del campo scalare*

$$f(x, y, z) = z^2 - x$$

sulla varietà unidimensionale definita dal sistema

$$\begin{cases} 2y^2 + z^2 = 1 \\ x(1 + z^2) = 4. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 1.9.75.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = x - x^2 + y^2$$

nel rettangolo

$$0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1.$$

✍ **Esercizio 1.9.76.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = xy - 2x$$

nel rettangolo

$$-1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$$

✍ **Esercizio 1.9.77.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = xy - y^2$$

nel disco

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

✍ **Esercizio 1.9.78.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = x + 2y$$

nel disco

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

✍ **Esercizio 1.9.79.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = xy - x^3y^2$$

nel quadrato

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

✍ **Esercizio 1.9.80.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

nel triangolo con vertici $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.

✍ **Esercizio 1.9.81.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = \sin x \cos y$$

nella regione triangolare chiusa delimitata dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = 2\pi$.

✍ **Esercizio 1.9.82.** *Determinare il valore massimo di*

$$f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$$

nel triangolo delimitato dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = \pi$.

✍ **Esercizio 1.9.83.** *La temperatura in tutti i punti del disco* $x^2 + y^2 \leq 1$ *è data da*

$$T = (x+y)e^{-x^2-y^2}.$$

Determinare la temperatura massima e la temperatura minima nel disco.

✍ **Esercizio 1.9.84.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$$

nel semipiano superiore $y \geq 0$.

✍ **Esercizio 1.9.85.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x,y) = xy^2 + yz^2$$

nella palla $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

✍ **Esercizio 1.9.86.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x,y) = xz + yz$$

nella palla $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

✍ **Esercizio 1.9.87.** *Usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per massimizzare* $f(x,y) = x^3y^5$ *soggetta al vincolo* $x + y = 8$.

✍ **Esercizio 1.9.88.** *Determinare la distanza minima del punto* $(3, 0)$ *dalla parabola* $y = x^2$ *riducendo il problema a un problema svincolato in una variabile e usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.*

✍ **Esercizio 1.9.89.** *Determinare la distanza dell'origine dal piano* $x+2y+2z = 3$ *mediante un ragionamento puramente geometrico, riducendo il problema a un problema senza vincoli in due variabili e usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.*

✍ **Esercizio 1.9.90.** *Determinare il valore massimo e il valore minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

sulla superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

✍ **Esercizio 1.9.91.** *Usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per determinare la distanza massima e quella minima del punto* $(2, 1, -2)$ *dalla superficie sferica di equazione* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

✍ **Esercizio 1.9.92.** *Determinare la distanza minima dell'origine dalla superficie* $xyz^2 = 2$.

✍ **Esercizio 1.9.93.** *Determinare* a, b, c *in modo che il volume* $V = 4\pi abc/3$ *di un ellissoide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

passante per il punto $(1, 2, 1)$ *sia il più piccolo possibile.*

✍ **Esercizio 1.9.94.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = xyz$$

sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

✍ **Esercizio 1.9.95.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x + 2y - 3z$$

sull'ellissoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 108$.

✍ **Esercizio 1.9.96.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x$$

sulla curva di intersezione del piano $z = x + y$ *con l'ellissoide* $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$.

✍ **Esercizio 1.9.97.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sull'ellisse che risulta dall'intersezione del cono $z^2 = x^2 + y^2$ *con il piano* $x - 2z = 3$.

✍ **Esercizio 1.9.98.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = 4 - z$$

sull'ellisse che risulta dall'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 8$ *con il piano* $x + y + z = 1$.

✍ **Esercizio 1.9.99.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x + y^2 z$$

soggetta ai vincoli $y^2 + z^2 = 2$ *e* $z = x$.

✍ **Esercizio 1.9.100.** *Determinare i punti critici di*

$$f(x, y) = (x - 1)^2 y + (y - 2)^2 - 4$$

per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *e studiarne la natura. Disegnare quindi l'insieme*

$$E = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 9 - (x - 1)^2\}$$

e determinare i punti di minimo e di massimo assoluto di f *in* E *dopo averne dimostrato l'esistenza.*

✍ **Esercizio 1.9.101.** *Determinare i punti critici di*

$$f(x, y) = (x - 2)^2 y + (y - 2)^2 - 4$$

per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *e studiarne la natura. Disegnare quindi l'insieme*

$$E = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 9 - (x - 2)^2\}$$

e determinare i punti di minimo e di massimo assoluto di f *in* E *dopo averne dimostrato l'esistenza.*

✍ **Esercizio 1.9.102.** *Sia* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y$. *Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di* f *sopra il punto* $(3, -1)$ *e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti di* f *sull'insieme* $E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ \ x - 5 \leq y \leq 0\}$.

✍ **Esercizio 1.9.103.** *Sia* $f(x,y) = x^2+y^2+2x-6y$. *Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di* f *sopra il punto* $(-2,4)$ *e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti di* f *sull'insieme* $E = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 0,\ \ 0 \leq y \leq x+5\}$.

✍ **Eserci**
su $Q = [-$

✍ **Esercizio 1.9.105.** *Disegnate l'insieme* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$; *calcolate poi il minimo su* S *della funzione* $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-3)^2$.

✍ **Esercizio 1.9.106.** *Determinate il massimo e il minimo della funzione* $x + y + xy$ *sulla parte del cerchio di raggio 1 centrato in* $(0,0)$ *contenuta nel primo quadrante.*

✍ **Esercizio 1.9.107.** *Determinare il massimo e il minimo della funzione* $2x^2 - x^4 - 2y^2$ *sul cerchio di raggio 1 centrato in* $(0,0)$.

✍ **Esercizio 1.9.108.** *Dopo aver disegnato l'insieme* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, *determinate massimo e minimo su* A *della funzione* $f(x,y) = xy + y^2 - y\sqrt{x}$.