Formulazione debole per le equazioni alle derivate parziali

<u>Spazio di Hilbert</u>: uno spazio X è uno spazio di Hilbert se normato e completa nella norma indotta dal prodotto scalare ovvero:

$$||x|| = \sqrt{(x,x)}$$

<u>Disuguaglianza di Schwartz</u>: $|(x,y)| \leq ||x||_H \cdot ||y||_H$

<u>Teorema di Lax-Milgramm</u>: se V è uno spazio di Hilbert e valgono i seguenti cinque punti allora esiste ed è unica la soluzione $u \in V$ del problema debole e vale che la norma della soluzione è minore o uguale alla costante coercitiva per la norma funzionale del duale ovvero:

$$||u||_V \leq \frac{1}{\alpha}||F||_{V'}$$

I cinque punti che devono valere sono:

i. $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare
ii. a è continua
iii. a è coerciva
iv. F è lineare
v. F è continua

(ricordiamo che F è il funzionare ovvero una funzione definita in H, nello spazio di Hilbert, e che va in $\mathbb{R}$. Ricondiamo inoltre che a è una forma ovvero un oggeto che prende valori da $H \times H$, ovvero da uno spazio di Hilbert per uno spazio di Hilbert, e li porta in $\mathbb{R}$. Riprendiamo ora i punti del teorema per spiegarli:

i.	Una forma è detta bilineare se	$a(u, \lambda v + \mu z) = \lambda a(u,v) + \mu a(u,z)$ $a(\lambda u + \mu z, v) = \lambda a(u,v) + \mu a(z,v)$	
ii.	Una forma è continua se	$\exists M > 0 : |a(u,v)| \leq M||u||_V||v||_V$	$\forall u, v \in V$
iii.	Una forma è coerciva se	$\exists \alpha > 0 : a(v,v) \geq \alpha||v||_V^2$	$\forall v \in V$
iv.	Un funzionale è lineare se	$F(v + \lambda w) = F(v) + \lambda F(w)$	$\forall v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
v.	Un funzionale è continuo se	$\exists C > 0 : |F(v)| \leq C||v||_V$	$\forall v \in V, C > 0$

Ricordiamoci che si ci venisse richiesto di applicare il teorema di Lax Milgramm occorre dimostrare, o meglio chiarire, oltre a questi 5 punti anche che lo spazio con cui si sta lavorando è uno spazio di Hilbert.

<u>Continuità:</u>

$$\int |w'v'| \leq ||w'||_{L^2}||v'||_{L^2} \leq ||w||_V||v||_V$$

$$\int |w'v| \leq ||w'||_{L^2}||v||_{L^2} \leq ||w||_V||v||_V$$

<u>Coercività:</u>

$$\int_a^b (w')^2 - \int_a^b w'w = ||w'||_{L^2}^2 - \int_a^b \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(w)^2 = ||w'||_{L^2}^2 - \frac{1}{2}w^2|_a^b = ||w'||_{L^2}^2 - \frac{1}{2}[w(a)^2 - w(b)^2] \geq ||w'||_{L^2}^2$$

$$||w'||_{L^2} C_\Omega \geq ||w||_{L^2}$$

$$||w'||_{L^2}^2 C_\Omega^2 \geq ||w||_V^2 - ||w'||_{L^2}^2$$

$$||w'||_{L^2}^2 (C_\Omega^2 + 1) \geq ||w||_V^2$$

$$\left|\left|w'\right|\right|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{C_\Omega^2 + 1}\left|\left|w\right|\right|_V^2$$

$$C_\Omega = \frac{a - b}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{1}{C_\Omega^2 + 1}$$