Michela Eleuteri

ANALISI MATEMATICA

Funzioni di più variabili reali

Funzioni convesse. Teorema del Dini.

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Funzioni convesse in n variabili

Ci occupiamo ora brevemente di una classe di funzioni importanti, soprattutto per quanto riguarda i problemi di ottimizzazione: le *funzioni convesse*.

❒ **Definizione 1.0.1.** Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CONVESSO se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ si ha che $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in \Omega$ per ogni $\lambda \in [0,1]$ (cioè se presi comunque due punti di Ω il segmento che li unisce è ancora tutto contenuto in Ω). L'insieme Ω si dice STRETTAMENTE CONVESSO se se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ si ha che $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in \Omega$ per ogni $\lambda \in (0,1)$ (cioè se presi comunque due punti di Ω il segmento che li unisce privato degli estremi è ancora tutto contenuto in Ω).

❒ **Definizione 1.0.2.** Si dice EPIGRAFICO di una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'insieme

$$\mathrm{epi} f = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z \geq f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}.$$

Si dice che una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è CONVESSA (risp. STRETTAMENTE CONVESSA) se l'epigrafico di f è un insieme convesso (risp. strettamente convesso) di $\mathbb{R}^{n+1}$; si dice che f è CONCAVA se $-f$ è convessa.

Osservando che se Ω non è un insieme convesso, l'epigrafico di f non sarà mai convesso, d'ora in avanti assumeremo Ω convesso. Si ha la seguente proposizione.

Proposizione 1.0.3. *Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso) è convessa se e soltanto se per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ e per ogni $t \in [0,1]$ vale la condizione*

$$f(t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) \leq t f(\mathbf{x}_1) + (1-t) f(\mathbf{x}_2);$$

se la precedente vale con il segno di disuguaglianza stretta per ogni $t \in (0,1)$ allora f è strettamente convessa.

Vale anche il seguente teorema che mostra che la condizione di convessità implica una certa regolarità per f.

Teorema 1.0.4. (REGOLARITÀ DELLE FUNZIONI CONVESSE) *Sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *(con* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *convesso). Se* f *è convessa allora:*

1) f *è continua;*
2) f *ha derivate parziali destre e sinistre in ogni punto;*
3) *nei punti in cui è derivabile* f *è differenziabile.*

Inoltre vale il seguente importante risultato che è l'analogo in più dimensioni del fatto che una funzione reale di una variabile reale convessa sta sopra la retta tangente in ogni suo punto.

Teorema 1.0.5. (FUNZIONI CONVESSE E PIANO TANGENTE) *Sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *(con* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *convesso), differenziabile in* Ω*. Allora* f *è convessa in* Ω *se e soltanto se per ogni coppia di punti* $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$ *si ha:*

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

In due dimensioni il significato geometrico è molto chiaro: infatti si ha

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

che equivale a dire che il piano tangente in (x_0, y_0) sta sotto il grafico di f.
Per funzioni di più variabili si può enunciare un criterio che è dato dallo studio del segno della forma quadratica data dal differenziale secondo, in analogia al fatto che in una variabile il segno della derivata seconda fornisce un criterio per studiare la convessità di una funzione.

Teorema 1.0.6. (CONVESSITÀ E MATRICE HESSIANA) *Sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *(con* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto convesso),* $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$*. Se per ogni* $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ *la forma quadratica* $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ *è semidefinita positiva allora* f *è convessa in* Ω*.*

Concludiamo enunciando il legame tra funzioni convesse e problemi di ottimizzazione. Come abbiamo sottolineato nei precedenti paragrafi, per individuare i massimi o i minimi per una funzione occorre prima di tutto andare ad individuare i punti stazionari cioè i punti che annullano il gradiente, grazie al Teorema di Fermat (condizioni del primo ordine) e successivamente andare a studiare la natura di tali punti attraverso la matrice Hessiana (condizioni del secondo ordine). Nel caso di funzioni convesse le condizioni del primo ordine risultano sufficienti per la ricerca dei massimi o minimi. Infatti per funzioni convesse (e/o naturalmente concave) i punti stazionari, se esistono, sono punti di estremo globale.

Proposizione 1.0.7. *Sia Ω un aperto convesso e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione convessa (risp. concava) e differenziabile in Ω; sia $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Se $\mathbf{x}_0$ è punto critico per f allora $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo (risp. massimo) globale. Inoltre se f è strettamente convessa (risp. concava), allora $\mathbf{x}_0$ è punto di mimino (risp. massimo) globale forte quindi in particolare il punto di minimo (risp. massimo) globale è unico.*

CAPITOLO 2

Funzioni definite implicitamente

2.1. Funzione implicita di una variabile

Quando abbiamo parlato di insiemi di livello, abbiamo detto che l'insieme $f(x,y) = c$ è dato da curve, dette appunto curve di livello. In realtà, anche se f è molto regolare, l'insieme definito da $f(x,y) = c$ con c costante generica può non essere una curva regolare o può non essere addirittura una curva.

✎ **Esempio 2.1.1.** *L'insieme $x^3 - y^2 = 0$ rappresenta una curva non regolare; l'insieme $x^2 - y^2 = 0$ rappresenta l'unione di due rette; l'insieme $x^2 + y^2 = 0$ rappresenta un solo punto; infine l'insieme $x^2 + y^2 = -1$ rappresenta l'insieme vuoto.*

Obiettivo di questo paragrafo è dunque il seguente: data una funzione $f(x,y)$ definita almeno in un aperto e ivi regolare (almeno di classe $\mathcal{C}^1$ precisare le condizioni sotto le quali l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce *implicitamente* una funzione $y = g(x)$.

❐ **Definizione 2.1.2.** Una funzione $g : I \to \mathbb{R}$ (con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo) tale che

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

si dice DEFINITA IMPLICITAMENTE dall'equazione $f(x,y) = 0$ o più brevemente si dice FUNZIONE IMPLICITA

Per chiarire: l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione g se esiste un intervallo I tale per cui per ogni $x \in I$ *esiste unico* $y \in g(I)$ tale che $f(x, g(x)) = 0$. L'unicità di y è dovuta alla richiesta di definire implicitamente una *funzione* che è caratterizzata dalla univocità della corrispondenza input-output.

✎ **Esempio 2.1.3.** *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y - 3y^2.$$

L'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione f_1 definita sull'intervallo $I_1 = (-\infty, -\sqrt{3})$. Infatti se $x < -\sqrt{3}$ la funzione $y \mapsto F(x,y)$ è strettamente crescente. Come si dimostra questo? Prima di tutto si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + x^2 - 6y > 3y^2 - 6y + 3 = 3(y-1)^2 \geq 0$$

visto che $x < -\sqrt{3} \Rightarrow x^2 > 3$. Dato inoltre che

$$\lim_{y \to \pm\infty} F(x,y) = \pm\infty,$$

allora $\forall x < -\sqrt{3}$ esiste unico $y = f_1(x)$ tale che

$$F(x, f_1(x)) = 0.$$

Infatti essendo $\dfrac{\partial F}{\partial y} > 0$, si ha che la funzione $y \mapsto F(x,y)$ con x fissato, è strettamente crescente, quindi intersecherà l'asse delle x una volta sola, cioè si annulla una sola volta. Dunque per ogni x_0 fissato esiste un solo y_0 tale che $F(x_0, y_0) = 0$. Ne segue che per ogni $x < -\sqrt{3}$ esiste un unico valore di y che è funzione di x (cioè $y = f_1(x)$) tale che

$$F(x, f_1(x)) = 0.$$

Analogamente si prova che

$$F(x,y) = 0$$

definisce implicitamente un'unica funzione f_2 nell'intervallo $I_2 = (\sqrt{3}, +\infty)$. In entrambi i casi, le funzioni f_1 e f_2 sono perfettamente determinate dalla condizione di soddisfare l'equazione $F(x,y) = 0$ rispettivamente per $x \in I_1$ e $x \in I_2$. Si noti invece che se $x \notin I_1 \vee x \notin I_2$ per esempio per $x = 0$ si ha

$$F(0,y) = y^3 - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 3$$

e quindi l'equazione $F(0,y) = 0$ ammette due soluzioni. Nel caso $x = 1$ si ha

$$F(1,y) = 1 + y^3 + y - 3y^2 = (y-1)(y^2 - 2y - 1)$$

e dunque l'equazione $F(x,y) = 0$ ha tre soluzioni:

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = 1 - \sqrt{2}, \qquad y_3 = 1 + \sqrt{2}.$$

Affinché una tale funzione esista, è necessario che l'equazione $f(x, y) = 0$ sia soddisfatta almeno in un punto (x_0, y_0) e in tal caso sarà $y_0 = g(x_0)$; poi vorremmo che g fosse definita almeno in un intorno I di x_0 e ivi regolare (quanto meno derivabile).
Ragioniamo a rovescio. Se una tale funzione $g(x)$ esiste ed è derivabile in I, siccome anche f è differenziabile, possiamo andare a derivare rispetto a x l'identità

$$f(x, g(x)) = 0,$$

ottenendo, per il teorema delle funzioni composte

$$f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x))\, g'(x) = 0$$

da cui si ricava

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

per ogni $x \in I$ in cui il denominatore non si annulla.
Quindi questa idea giustifica il seguente importantissimo teorema.

Teorema 2.1.4. (teorema di Dini o della funzione implicita) *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto) una funzione di classe $\mathcal{C}^1(A)$. Supponiamo che in un punto $(x_0, y_0) \in A$ si abbia*

$$f(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esiste un intorno I di x_0 in $\mathbb{R}$ e un'unica funzione $g : I \to \mathbb{R}$ tale che

$$y_0 = g(x_0) \qquad \text{e} \qquad f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Inoltre $g \in \mathcal{C}^1(I)$ e si ha

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \qquad \forall x \in I.$$

☞ **Osservazione 2.1.5.** Se $f(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ ma $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ allora si può applicare il teorema scambiando i ruoli tra x e y, ossia affermare che esiste un intorno J di y_0 e un'unica funzione $x = h(y)$ definita in J tale che $x_0 = h(y_0)$ e $f(h(y), y) = 0$ per ogni $y \in J$. Inoltre $h \in \mathcal{C}^1(J)$ e si ha

$$h'(y) = -\frac{f_y(h(y), y)}{f_x(h(y), y)} \qquad \forall y \in J.$$

In sostanza i punti in cui il teorema del Dini non è applicabile sono quelli in cui il gradiente di f si annulla, cioè i punti critici di f.

✎ **Esempio 2.1.6.** *Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. L'equazione $x^2 + y^2 = 1$ com'è noto rappresenta la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, che è una ben nota curva (regolare) ma non è una funzione. Ci chiediamo se essa definisce implicitamente una funzione delle variabili x o y e per quali punti. Il gradiente di f si annulla solo nell'origine che non appartiene alla curva, quindi il Teorema del Dini è applicabile in ogni punto. Si ha tuttavia che $f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$: quindi se $y \neq 0$, sicuramente si applica il Teorema del Dini e l'equazione data definisce implicitamente una funzione della sola variabile x (che possiamo anche ricavare esplicitamente: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ a seconda che si consideri $y > 0$ o $y < 0$. Invece nei punti $(\pm 1, 0)$ non è possibile definire implicitamente una funzione della sola variabile x. Questo è giustificabile vedendo che comunque preso un intorno, per ogni x appartenente a quell'intorno ci sono sempre due valori di y che vi appartengono: venendo a cadere l'univocità della corrispondenza input-output, non si tratta mai di una funzione. Però il Teorema del Dini ci invita a osservare cosa succede alla f_x: ci accorgiamo che $f_x(\pm 1, 0) = \pm 2 \neq 0$. Quindi applicando il teorema si deduce che l'equazione data definisce implicitamente una funzione stavolta della sola variabile y (che esplicitata ha la forma $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ a seconda che si consideri $x > 0$ o $x < 0$.*

✎ **Esempio 2.1.7.** *Verificare che per il teorema del Dini, l'equazione*

$$(x-1)\,\log(\sin y) + (y-1)\,\tan(x^2) = 0$$

permette di rappresentare y come funzione di x, ovvero $y = y(x)$, in un intorno del punto $(1,1)$. Si calcoli $y'(1)$.

Verifichiamo che effettivamente si possa applicare il teorema del Dini. Poniamo

$$f(x,y) = (x-1)\,\log(\sin y) + (y-1)\,\tan(x^2);$$

si ha che f è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $(1,1)$. Poi si ha $f(1,1) = 0$ e infine

$$f_y(x,y) = (x-1)\,\frac{\cos y}{\sin y} + \tan(x^2)$$

da cui $f_y(1,1) = \tan 1 \neq 0$.
Allora il teorema del Dini ci assicura che esiste un intorno I di $x = 1$ ed esiste $y = y(x)$ definita su I a valori reali tale che $f(x, y(x)) = 0$. Si ha inoltre

$$y'(x) = -\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))} \qquad \forall\, x \in I$$

da cui

$$f_x(x,y) = \log(\sin y) + (y-1)\,(1+\tan^2(x^2))\,2\,x$$

e quindi

$$y'(1) = -\frac{\log(\sin 1)}{\tan 1}.$$

✎ **Esempio 2.1.8.** *Sia ora*

$$F(x,y) = x^2 - y^2.$$

Consideriamo l'origine. Si ha $F(0,0) = F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0$. *Le ipotesi del teorema del Dini con punto iniziale* $(0,0)$ *non sono soddisfatte e anche la tesi non è soddisfatta, infatti non esiste alcun intorno dell'origine in cui l'equazione definisca implicitamente un'unica funzione della* x *o della* y.

2.2. Derivate successive

Dall'identità

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

derivando entrambi i membri si ottiene (al secondo membro ho applicato la regola di derivazione di una funzione composta)

$$f''(x) = -\frac{(F_{xx} + F_{xy} f'(x))F_y - (F_{yx} + F_{yy} f'(x))F_x}{(F_y)^2}$$

da cui, sostituendo l'espressione di $f'(x)$ in funzione di F_x e F_y si ottiene

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}(F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}(F_x)^2}{(F_y)^3}.$$

A questo punto ricordiamo che *condizione sufficiente affinché* x_0 *sia un massimo (risp. minimo) relativo* per f è che

$$f'(x_0) = 0 \qquad f''(x_0) < 0 \qquad (\text{risp. } > 0).$$

A questo punto, supponiamo che $F(x_0, y_0) = 0$ (il punto (x_0, y_0) con $y_0 = f(x_0)$ deve soddisfare l'equazione $F(x,y) = 0$ visto che questa equazione definisce la funzione implicita f) e $F_x(x_0, y_0) = 0$ $(\Leftrightarrow f'(x_0) = 0)$; inseriamo queste informazioni nell'espressione di f'' : otteniamo

$$f''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

dunque dalla seconda parte data dalla condizione sufficiente si ha che

$$\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} > 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di massimo relativo per } f$$

mentre

$$\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} < 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di minimo relativo per } f.$$

2.3. Funzione implicita di n variabili

Naturalmente tutti i discorsi fatti fino ad ora relativamente alle funzioni definite implicitamente da un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ si possono generalizzare al caso di funzioni di n variabili. Per esempio, supponiamo di considerare l'equazione

$$f(x, y, z) = 0$$

con f di classe $\mathcal{C}^1$ e supponiamo che essa sia soddisfatta in un certo punto (x_0, y_0, z_0). Ci chiediamo se esistono un intorno U di (x_0, y_0) e una funzione $z = g(x, y)$ definita e regolare in U tale che risulti

$$f(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in U.$$

In questo caso diremo che g è definita implicitamente dall'equazione $f(x, y, z) = 0$. Se questo è vero, derivando rispetto a x l'identità precedente, si avrà

$$f_x(x, y, g(x, y)) + f_z(x, y, g(x, y))\, g_x(x, y) = 0$$

quindi

$$g_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))} \qquad \text{e} \qquad g_x(x_0, y_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{f_z(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}.$$

Analogamente

$$g_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))} \qquad \text{e} \qquad g_y(x_0, y_0) = -\frac{f_y(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{f_z(x_0, y_0, g(x_0, y_0))},$$

a patto che sia $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$; se tale derivata si annulla, basta che almeno una delle altre due nel punto considerato non si annulli. Si comprende quindi come si arriva alla seguente generalizzazione del Teorema del Dini.

Teorema 2.3.1. (TEOREMA DI DINI O DELLA FUNZIONE IMPLICITA: CASO n DIMENSIONALE) *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto) una funzione di classe $\mathcal{C}^1(A)$. Supponiamo che*

$$f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$$

per un certo punto $(\mathbf{x}_0, y_0) \in A$ (dove $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}$). Allora esistono un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^n$ di $\mathbf{x}_0$ e un'unica funzione $g : U \to \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{C}^1(U)$ tale che

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U; \quad g_{x_j}(\mathbf{x}) = -\frac{f_{x_j}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{f_y(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))} \ \forall \mathbf{x} \in U, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

✎ **Esempio 2.3.2.** *Verificare che l'equazione*

$$x^4 + 2y^3 + z^3 - yz - 2y = 0$$

definisce implicitamente $z = g(x, y)$ *in un intorno di* $(0, 1, 0)$. *Scrivere poi l'equazione del piano tangente in* $(0, 1, 0)$ *alla superficie di equazione* $z - g(x, y) = 0$.

L'idea è quella di applicare il teorema del Dini. Verifichiamo che questo teorema è applicabile nell'intorno del punto $P = (0, 1, 0)$. Si ha $f(x, y, z) := x^4 + 2y^3 + z^3 - yz - 2y$. Abbiamo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $f(0, 1, 0) = 0$ e $f_z(x, y, z) = 3z^2 - y$ da cui $f_z(0, 1, 0) = -1 \neq 0$. Dunque dal teorema del Dini ho che esiste un intorno I del punto $(0, 1)$ e una funzione $g : I \to \mathbb{R}$ tale che $f(x, y, g(x, y)) = 0$ per ogni $(x, y) \in I$. Si ha inoltre $g(0, 1) = 0$ e che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1,0)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,1,0)} = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,0)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,1,0)} = 4.$$

L'equazione del piano tangente è

$$z = g(0,1) + \frac{\partial g}{\partial x}(0,1)\,(x-0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,1)\,(y-1)$$

cioè $z = 4(y - 1)$.

2.4. Esercizi di ricapitolazione svolti

✍ **Esercizio 2.4.1.**

Dimostrare che l'equazione $y^3 = 2xy - x^2$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $(1, 1)$, una funzione $y = y(x)$, e stabilire se il punto $x_0 = 1$ è di estremo locale per $y(x)$. La funzione $y(x)$ è invertibile in un intorno di $x_0 = 1$?

Poniamo $F(x, y) = y^3 - 2xy + x^2$.
Le tre ipotesi da verificare per vedere se si può applicare il teorema del Dini o della funzione implicita sono:
➜ $F \in \mathcal{C}^1$: Ok.
➜ $F(1, 1) = 0$: Ok.
➜ $F_y(1, 1) \neq 0$. Infatti $F_y(x, y) = 3y^2 - 2x$ dunque $F_y(1, 1) = 3 - 2 = 1 \neq 0$.
Dunque il teorema del Dini ci assicura che l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente

un'unica funzione $y = y(x)$ definita in un intorno di $x = 1$. Si ha $y(1) = 1$ perché $y = y(x)$ è la funzione implicita, in un intorno di $(1, 1)$, e per definizione $F(1, y(1)) = 0$.
Per stabilire se $x_0 = 1$ è estremo locale per y proviamo a studiare il segno delle derivate prima e seconda in $x = 1$. Dalla relazione $F(x, y) = 0$ si ottiene

$$[y(x)]^3 - 2xy(x) + x^2 = 0$$

da cui inserendo le informazioni $x = 1$ e $y(1) = 1$ si ottiene $y'(1) = 0$.
Andando a derivate di nuovo la precedente espressione rispetto a x si ottiene

$$3[y(x)]^2 y'(x) - 2y(x) - 2xy'(x) + 2x = 0.$$

Ripetiamo l'operazione:

$$6y(x)y'(x) + 3(y(x))^2 y''(x) - 2y'(x) - 2y'(x) - 2xy''(x) + 2 = 0.$$

A questo punto, andando a sostituire $x = 1$ si ha $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ e si può ricavare il valore di $y''(1)$

$$3y''(1) - 2y''(1) + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y''(1) = -2.$$

Dunque $x = 1$ è punto di massimo locale per $y(x)$.

Per vedere se $y(x)$ è invertibile, è sufficiente vedere se è strettamente monotona, e quindi basta studiare il segno di $y'(x)$. Ma

$$y'(x) = \frac{2(y(x) - x)}{3[y(x)]^2 - 2x}.$$

Il denominatore in un intorno di $(1, 1)$ è positivo ma il numeratore cambia di segno, quindi in ogni intorno di $(1, 1)$ ci sono punti in cui $y' > 0$ e punti in cui $y' < 0$. Quindi la funzione non è strettamente monotona e pertanto non è invertibile.

✍ **Esercizio 2.4.2.**

Sia $F(x, y) = xy - 2 + \sin(x - 1)$, verificare che in un intorno di $x = 1$, l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = y(x)$. Calcolare $y_0 = y(1)$ e disegnare il grafico locale di y in un intorno del punto $(1, y_0)$.

Poniamo $F(x, y) = xy - 2 + \sin(x - 1)$.
Le tre ipotesi da verificare per vedere se si può applicare il teorema del Dini o della funzione implicita sono:

➜ $F \in \mathcal{C}^1$: Ok.
➜ $F(1,2) = 0$: Ok.
➜ $F_y(1,2) \neq 0$. Infatti $F_y(x,y) = x$ dunque $F_y(1,2) = 1 \neq 0$.
Dunque il teorema del Dini ci assicura che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = y(x)$ definita in un intorno di $x = 1$.
Si ha $y(1) = 2$ perché $y = y(x)$ è la funzione implicita, in un intorno di $(1,2)$, e per definizione $F(1, y(1)) = 0$.
Per disegnare il grafico locale di y in un intorno di $(1,2)$, dobbiamo avere informazioni sul segno delle derivate prima e seconda in $x = 1$. Dalla relazione $F(x,y) = 0$ si ottiene

$$xy(x) - 2 + \sin(x-1) = 0.$$

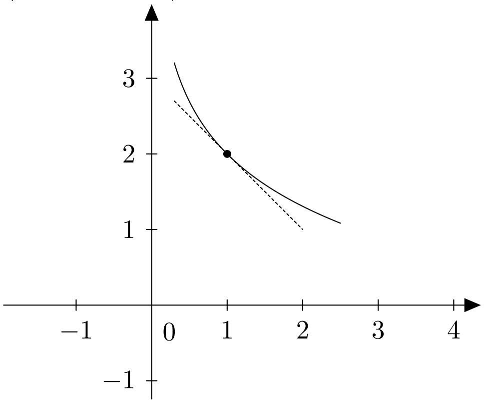
Andiamo a derivare ambo i membri rispetto a x. Si ottiene

$$y(x) + xy'(x) + \cos(x-1) = 0.$$

Ripetiamo l'operazione:

$$y'(x) + y'(x) + xy''(x) - \sin(x-1) = 0.$$

A questo punto, andando a sostituire le informazioni $x = 1$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -3$, si può ricavare che $y'(1) = -3$ e $y''(1) = 6$. Quindi il coefficiente angolare della retta tangente a y in $x = 1$ è negativo e in un intorno di $x = 1$ $y = y(x)$ ha concavità verso l'alto. Il grafico (qualitativo!) è quello illustrato in figura.



✍ **Esercizio 2.4.3.**

a) Verificare che la relazione $x^5 + 4xy + y^4 = 1$ definisce implicitamente in un intorno del punto $(0,1)$ una funzione $y = y(x)$.
b) Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin arrestato al secondo grado della funzione $y = y(x)$ definita sopra.

a) Poniamo $F(x,y) = x^5 + 4xy + y^4 - 1$.
Le tre ipotesi da verificare per vedere se si può applicare il teorema del Dini o della funzione implicita sono:
➜ $F \in \mathcal{C}^1$: Ok.
➜ $F(0,1) = 0$: Ok.
➜ $F_y(0,1) \neq 0$. Infatti $F_y(x,y) = 4x + 4y^3$ dunque $F_y(0,1) = 4 \neq 0$.
Dunque il teorema del Dini ci assicura che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = y(x)$ definita in un intorno di $x = 0$.
b) Lo sviluppo di Mac Laurin arrestato al secondo grado di $y = y(x)$ è

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Dobbiamo dunque ricavare i valori di $y'(0)$ e $y''(0)$. Dalla relazione $F(x,y) = 0$ si ottiene

$$x^5 + 4xy(x) + [y(x)]^4 - 1 = 0.$$

Andiamo a derivare ambo i membri rispetto a x. Si ottiene

$$5x^4 + 4y(x) + 4xy'(x) + 4[y(x)]^3 y'(x) = 0.$$

Ripetiamo l'operazione:

$$20x^3 + 4y'(x) + 4y'(x) + 4xy''(x) + 12[y(x)]^2[y'(x)]^2 + 4[y(x)]^3 y''(x) = 0$$

A questo punto, andando a sostituire $x = 0$ si ha $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ e si può ricavare il valore di $y''(0)$

$$-8 + 12 + 4y''(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; y''(0) = -1.$$

Quindi lo sviluppo richiesto vale

$$y(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

✍ **Esercizio 2.4.4.**

> Verificare che in un intorno del punto $(1,1)$ il luogo di zeri della funzione $f(x,y) = x\sin x - y\sin y$ coincide con la bisettrice del primo quadrante.

Assodato che per f valgano le ipotesi del teorema del Dini (verificare!!), basta dimostrare che (almeno localmente) $y'(1) = 1$ e $y''(1) = 0$. Dalla relazione $f(x,y) = 0$ si ottiene

$$x\sin x - y(x)\sin y(x) = 0$$

da cui, derivando entrambi i membri rispetto a x

$$\sin x + x\cos x - y'(x)\sin y(x) - y(x)y'(x)\cos y(x) = 0$$

e ripetendo l'operazione

$$\begin{aligned}&\cos x + \cos x - x\sin x - y''(x)\sin y(x) - [y'(x)]^2\cos y(x) - [y'(x)]^2\cos y(x)\\&-y(x)y''(x)\cos y(x) + y(x)[y'(x)]^2\sin y(x) = 0\end{aligned}$$

da cui sostituendo le informazioni $x = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, si può ricavare il valore di $y''(1)$ ottenendo

$$2\cos 1 - \sin 1 - y''(1)\sin 1 - \cos 1 - \cos 1 - y''(1)\cos 1 + \sin 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; y''(1) = 0$$

che è quello che volevamo dimostrare.

✍ **Esercizio 2.4.5.**

Dimostrare che l'equazione $3y^3 = 6xy - 3x^2$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $(1, 1)$, una funzione $y = y(x)$. Stabilire se il punto $x_0 = 1$ è un estremo locale di $y(x)$ e se la funzione $y = y(x)$ è invertibile in un intorno di $x_0 = 1$.

Le tre ipotesi da verificare per vedere se si può applicare il teorema del Dini o della funzione implicita sono:

➜ $F \in \mathcal{C}^1$: Ok.

➜ $F(1, 1) = 0$: Ok.

➜ $F_y(1, 1) \neq 0$. Infatti $F_y(x, y) = 9y^2 - 6x$ dunque $F_y(1, 1) = 3 \neq 0$.

Dunque il teorema del Dini ci assicura che l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = y(x)$ definita in un intorno di $x = 1$. Si ha che $y(1) = 1$ perché $y = y(x)$ è la funzione implicita in un intorno di $(1, 1)$ e per definizione $F(1, y(1)) = 0$.

Per stabilire se $x_0 = 1$ è estremo locale per y studiamo il segno delle derivate prima e seconda in $x = 1$. Dalla relazione $F(x, y) = 0$ si ottiene

$$3[y(x)]^3 - 6xy(x) + 3x^2 = 0.$$

Andiamo a derivare ambo i membri rispetto a x. Si ottiene

$$9[y(x)]^2y'(x) - 6y(x) - 6xy'(x) + 6x = 0$$

da cui, sostituendo $x = 1$ e $y(1) = 1$ si ottiene $y'(1) = 0$.

Ripetiamo l'operazione:

$$18y(x)y'(x) + 9(y(x))^2y''(x) - 6y'(x) - 6y'(x) - 6xy''(x) + 6 = 0.$$

A questo punto, andando a sostituire $x = 1$ si ha $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ e si può ricavare i valoro di $y''(1)$

$$9y''(1) - 6y''(1) + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; y''(1) = -2.$$

Dunque $x = 1$ è punto di massimo locale per $y(x)$.

Per vedere se $y(x)$ è invertibile, è sufficiente vedere se è strettamente monotona, e quindi basta studiare il segno di $y'(x)$. Ma

$$y'(x) = \frac{6(y(x) - x)}{9[y(x)]^2 - 6x}.$$

Il denominatore in un intorno di $(1, 1)$ è positivo ma il numeratore cambia di segno, quindi in ogni intorno di $(1, 1)$ ci sono punti in cui $y' > 0$ e punti in cui $y' < 0$. Quindi la funzione non è strettamente monotona e pertanto non è invertibile.

✍ **Esercizio 2.4.6.** *Verificare che l'equazione*

$$2x^3 + y^4 + z^3 - xz - 2x = 0$$

definisce implicitamente $z = g(x, y)$ *in un intorno di* $(1, 0, 0)$. *Scrivere poi l'equazione del piano tangente in* $(1, 0, 0)$ *alla superficie di equazione* $z - g(x, y) = 0$.

L'idea è quella di applicare il teorema del Dini. Verifichiamo che questo teorema è applicabile nell'intorno del punto $P = (1, 0, 0)$. Si ha $f(x, y, z) := 2x^3 + y^4 + z^3 - xz - 2x$. Abbiamo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $f(1, 0, 0) = 0$ e $f_z(x, y, z) = 3z^2 - x$ da cui $f_z(1, 0, 0) = -1 \neq 0$. Dunque dal teorema del Dini ho che esiste un intorno I del punto $(1, 0)$ e una funzione $g : I \to \mathbb{R}$ tale che $f(x, y, g(x, y)) = 0$ per ogni $(x, y) \in I$. Si ha inoltre $g(1, 0) = 0$ e che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0)} = 4 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0)} = 0.$$

L'equazione del piano tangente è

$$z = g(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial x}(1, 0)\,(x - 1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0)\,(y - 0)$$

cioè $z = 4(x - 1)$.

✍ **Esercizio 2.4.7.** *Si consideri l'equazione*

$$\frac{x^2}{2} + xy - \log\left(1 + x^2 + y^2\right) + y = 0.$$

Provare che $(0,0)$ *soddisfa l'equazione e che esiste una funzione* $\varphi : I \to J$*, con* I *e* J *intorni di zero, tale che* $\varphi(0) = 0$ *e* $\frac{x^2}{2} + x\varphi(x) - \log\left(1 + x^2 + \varphi^2(x)\right) + \varphi(x) = 0$ *per ogni* $x \in I$*.*

Per verificare che $(0,0)$ soddisfa l'equazione basta sostituire il punto in essa.
Posto

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \log\left(1 + x^2 + y^2\right) + y$$

l'equazione data è, ovviamente, $f(x,y) = 0$. Tale f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$.
Verifichiamo le ipotesi del teorema di Dini:

$$\begin{aligned}
&f(0,0) = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + y - \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} + 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.
\end{aligned}$$

Le ipotesi sono verificate, dunque posso esplicitare y in funzione di x in un intorno di $x_0 = 0$.
La funzione implicita $\varphi : I \to J$ è quella richiesta (ovvero quella che verifica le richieste fatte).
Per quanto riguarda l'andamento di φ, osserviamo che

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = 0.$$

Inoltre, dalla formula

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

si ha

$$\varphi''(x) = -\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\varphi(x))\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^2}.$$

Quindi

$$\varphi''(0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 1 - \frac{2\,(1+x^2+y^2) - 4x^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1,$$

abbiamo che $\varphi''(0) = -(-1) = 1 > 0$, quindi 0 è un punto di minimo per φ.

2.5. Esercizi proposti

N.B. *Per questi esercizi si dà solo un suggerimento della soluzione; lo studente tenga conto che non si tratta della traccia completa che si presuppone venga presentata in un compito ma solamente alcune indicazioni utili per la risoluzione.*

✍ **Esercizio 2.5.1.** *Utilizzando il teorema di Dini mostrare che, nei casi sotto riportati, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione derivabile $y = \varphi(x)$ in un intorno di x_0 tale che $\varphi(x_0) = y_0$. Calcolare poi $\varphi'(x_0)$.*

(a) $f(x,y) = x + 2y + x\sin y, \quad (x_0, y_0) = (0,0);$
(b) $f(x,y) = xe^y + y + 2, \quad (x_0, y_0) = (0,-2);$
(c) $f(x,y) = xy + \log(xy) - 1, \quad (x_0, y_0) = (1,1);$
(d) $f(x,y) = y^5 + \log\left(\frac{x+y}{2}\right) - xy, \quad (x_0, y_0) = (1,1).$

R. a) $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$; b) $\varphi'(0) = -\frac{1}{e^2}$; c) $\varphi'(0) = -1$; d) $\varphi'(0) = \frac{1}{9}$

✍ **Esercizio 2.5.2.** *Applicare il teorema di Dini all'equazione $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$ e discutere nell'intorno di quali punti essa definisce una funzione implicita rispetto all'una o all'altra variabile.*

R. $f_x(x,y) = 2x - 2$ e $f_y(x,y) = -2y + 2$; per altro se $x = 1$ allora $f(1,y) = 0$ per $y = 1$, quindi si può definire una funzione implicita rispetto all'una o all'altra variabile nell'intorno di tutti i punti tranne $(1,1)$

✍ **Esercizio 2.5.3.** *Data la funzione $y = y(x)$ definita implicitamente da*

$$x^2y^2 + y^3 + x + y = 0,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)+x}{x^2}.$$

➻ **R.** Si ha $y(0) = 0$. Inoltre il limite proposto si presenta in una forma di indecisione, quindi, con l'idea di usare il Teorema di De l'Hospital, derivando l'equazione si ha

$$2x[y(x)]^2 + 2x^2y(x)y'(x) + 3[y(x)]^2y'(x) + 1 + y'(x) = 0$$

da cui $y'(0) = -1$. Il limite rimane in una forma di indecisione. Derivando un'altra volta l'equazione si ottiene

$$\begin{aligned}&4xy(x)y'(x) + 2[y(x)]^2 + 4xy(x)y'(x) + 2x^2[y'(x)]^2\\&+2x^2y(x)y''(x) + 6y(x)[y'(x)]^2 + 3[y(x)]^2y''(x) + y''(x) = 0\end{aligned}$$

da cui $y''(0) = 0$. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)+x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{y'(x)+1}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{y''(x)}{2} = 0.$$

✍ **Esercizio 2.5.4.** *Verificare che l'equazione*

$$y\log\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 - x = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di $(1,1)$. Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x)-1}{(x-1)^2}.$$

➻ **R.** Si ha $y(1) = 1$. Inoltre il limite proposto si presenta in una forma di indecisione, quindi, con l'idea di usare il Teorema di De l'Hospital, derivando l'equazione si ha

$$y'(x)\log\frac{x}{y(x)} + y(x)\frac{y(x)}{x}\frac{y(x)-y'(x)x}{[y(x)]^2} + 2y(x)y'(x) - 1 = 0$$

da cui $y'(1) = 0$. Il limite rimane in una forma di indecisione. Derivando un'altra volta l'equazione si ottiene

$$y''(x)\log\frac{x}{y(x)} + y'(x)\frac{y(x)}{x}\frac{y(x)-xy'(x)}{[y(x)]^2} + \frac{y'(x)x-y(x)}{x^2}$$
$$-y''(x) + 2[y'(x)]^2 + 2y(x)y''(x) = 0$$

da cui $y''(1) = 1$. Quindi

$$\lim_{x\to 1}\frac{y(x)-1}{(x-1)^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{y'(x)}{2(x-1)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{y''(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

✍ **Esercizio 2.5.5.** *Verificare che l'equazione*

$$x\cos(xy) = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Calcolare

$$\lim_{x\to 1}\frac{2y(x)-\pi(2-x)}{(x-1)^2}.$$

R. Si ha $y(1) = \pi/2$. Inoltre il limite proposto si presenta in una forma di indecisione, quindi, con l'idea di usare il Teorema di De l'Hospital, derivando l'equazione si ha

$$\cos(xy(x)) - x\sin(xy(x))[y(x)+xy'(x)] = 0$$

da cui $y'(1) = -\frac{\pi}{2}$ e quindi il limite dato si presenta di nuovo in una forma di indecisione. Derivando una seconda volta si ottiene

$$-2\sin(xy(x))[y(x)+xy'(x)] - x\cos(xy(x))[y(x)+xy'(x)]^2 - x\sin(xy(x))[2y'(x)+xy''(x)] = 0$$

da cui $y''(1) = -\pi$ e

$$\lim_{x\to 1}\frac{2y(x)-\pi(2-x)}{(x-1)^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2y'(x)+\pi}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} y''(x) = -\pi.$$

✍ **Esercizio 2.5.6.** *Verificato che l'equazione*

$$x^2 + x(y^2-1) + y(y^2+1) = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-x}{x^2}.$$

➼ **R.** Si ha $y(0) = 0$. Inoltre il limite proposto si presenta in una forma di indecisione, quindi, con l'idea di usare il Teorema di De l'Hospital, derivando l'equazione si ha

$$2x + ([y(x)]^2 - 1) + 2xy(x)y'(x) + y'(x)([y(x)]^2 - 1) + 2[y(x)]^2 y'(x) = 0$$

da cui $y'(0) = 1$. Il limite rimane in una forma di indecisione. Derivando un'altra volta l'equazione si ottiene

$$\begin{aligned}&2 + 2y(x)y'(x) + 2y(x)y'(x) + 2x[y'(x)]^2 + 2xy(x)y''(x) + y''(x)([y(x)]^2 + 1)\\&+2y(x)[y'(x)]^2 + 4yy(x)[y'(x)]^2 + 2[y(x)]^2 y''(x) = 0\end{aligned}$$

da cui $y''(0) = -2$. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{y'(x) - 1}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{y''(x)}{2} = -1.$$

✍ **Esercizio 2.5.7.** *Verificato che l'equazione*

$$x^3 + y^3 + x^2 - xy + x + y = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) + x}{x^2}.$$

➼ **R.** Si ha $y(0) = 0$. Inoltre il limite proposto si presenta in una forma di indecisione, quindi, con l'idea di usare il Teorema di De l'Hospital, derivando l'equazione si ha

$$3x^2 + 3[y(x)]^2 y'(x) + 2x - y(x) - xy'(x) + 1 + y'(x) = 0$$

da cui $y'(0) = -1$. Il limite rimane in una forma di indecisione. Derivando un'altra volta l'equazione si ottiene

$$\begin{aligned}&6x + 6y(x)[y'(x)]^2 + 3[y(x)]^2 y''(x) + 2 - y'(x)\\&-y'(x) - xy''(x) + y''(x) = 0\end{aligned}$$

da cui $y''(0) = -4$. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) + x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{y'(x) + 1}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{y''(x)}{2} = -2.$$

✍ **Esercizio 2.5.8.** *Verificare che l'equazione*

$$x\sin(xy) = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *in un intorno di* $(1, 0)$. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x)}{(x-1)^2}.$$

➻ **R.** Si ha $y(1) = 0$. Inoltre il limite proposto si presenta in una forma di indecisione, quindi, con l'idea di usare il Teorema di De l'Hospital, derivando l'equazione si ha

$$\sin(xy(x)) + x\cos(xy(x))[y(x) + xy'(x)] = 0$$

da cui $y'(1) = 0$ e quindi il limite si presenta di nuovo in una forma di indecisione. Derivando una seconda volta si ottiene

$$2\cos(xy(x))[y(x) + xy'(x)] - x\sin(xy(x))[y(x) + xy'(x)]^2 + x\cos(xy(x))[2y'(x) + xy''(x)] = 0$$

da cui $y''(1) = 0$ e

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x)}{(x-1)^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{y'(x)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{y''(x)}{2} = 0.$$

✍ **Esercizio 2.5.9.** *Dato il campo scalare*

$$f(x, y) = \log x \log y - 1 \qquad (x, y) \in (1, +\infty) \times (1, +\infty),$$

si provi che l'equazione $f(x, y) = 0$ *definisce implicitamente un'unica funzione* $y = y(x)$ *per ogni* $x \in (1, +\infty)$. *Si calcoli inoltre*

$$\lim_{x\to e} \frac{y(x) - x}{4(x-e)^2}.$$

➻ **R.** Si ha

$$f_y(x, y) = \frac{\log x}{y} \neq 0 \qquad \text{se } x \in (1, +\infty)$$

pertanto (si verifica facilmente che le altre ipotesi del teorema del Dini sono verificate) l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce un'unica funzione $y = y(x)$ per ogni $x \in (1, +\infty)$. Si ha inoltre $y(e) = e$ dunque il limite proposto si presenta in una forma di indecisione. Con l'idea di usare il Teorema di De l'Hospital, derivando l'equazione si ha

$$\frac{1}{x}\log(y(x)) + \log x \frac{1}{y(x)} y'(x) = 0$$

da cui $y'(e) = 1$ e il limite rimane in una forma di indecisione. Derivando un'altra volta l'equazione si ottiene

$$\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{y(x)}y'(x)x - \log(y(x))\right] + \frac{1}{(y(x))^2}\left[(y''(x)\log x + \frac{1}{x}y'(x))y(x) - y'(x)\left[y'(x)\log x\right]\right] = 0$$

da cui $y''(e) = 0$. Quindi

$$\lim_{x\to e}\frac{y(x)-x}{4(x-e)^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to e}\frac{y'(x)-1}{8(x-e)} \overset{\mathrm{H}}{=} \frac{y''(x)}{8} = 0.$$

✍ **Esercizio 2.5.10.** *Verificare che l'equazione*

$$x^4 + 2y^3 + z^3 - yz - 2y = 0$$

definisce implicitamente $z = g(x, y)$ *in un intorno di* $(0, 1, 0)$. *Scrivere poi l'equazione del piano tangente in* $(0, 1, 0)$ *alla superficie di equazione* $z - g(x, y) = 0$.

➻ **R.** $z = 4(y-1)$.

✍ **Esercizio 2.5.11.** *Verificare che l'equazione*

$$x^4 + 2y^3 + z^3 - yz - 2y = 1$$

definisce implicitamente $z = g(x, y)$ *in un intorno di* $(0, 0, 1)$. *Scrivere poi l'equazione del piano tangente in* $(0, 0, 1)$ *alla superficie di equazione* $z - g(x, y) = 0$.

➻ **R.** $z = 1 + \dfrac{1}{3}y$.

✍ **Esercizio 2.5.12.** *Verificare che l'equazione*

$$-2x^2 + 2y^3 + z^3 - yx - 2y = 1$$

definisce implicitamente $z = g(x, y)$ *in un intorno di* $(0, 0, 1)$. *Scrivere poi l'equazione del piano tangente in* $(0, 0, 1)$ *alla superficie di equazione* $z - g(x, y) = 0$.

➻ **R.** $z = 1 + \dfrac{2}{3}y$.

✍ **Esercizio 2.5.13.** *Per il teorema del Dini, l'equazione*

$$(x-1)\,\log(\cos y) + (y-1)\,e^{(x^2)} = 0$$

permette di rappresentare y come funzione di x, ovvero $y = y(x)$, in un intorno del punto $(1,1)$. Si calcoli $y'(1)$.

R.

$$y'(1) = -\frac{\log(\cos 1)}{e^1}.$$

✍ **Esercizio 2.5.14.** *Per il teorema del Dini, l'equazione*

$$(x-1)\,\sin(\sin y) + (y-1)\,\sin\left(x^2\right) = 0$$

permette di rappresentare y come funzione di x, ovvero $y = y(x)$, in un intorno del punto $(1,1)$. Si calcoli $y'(1)$.

R.

$$y'(1) = -\frac{\sin(\sin 1)}{\sin 1}.$$

✍ **Esercizio 2.5.15.** *Data la funzione $y = y(x)$ definita implicitamente da*

$$x^2 + x(y^2-1) + y(y^2+1) = 0$$

calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x)+x-1}{(x-1)^2}.$$

R. Si ha $y(1) = 0$. Inoltre il limite proposto si presenta in una forma di indecisione, quindi, con l'idea di usare il Teorema di De l'Hospital, derivando l'equazione si ha

$$2x + ([y(x)]^2 - 1) + 2xy(x)y'(x) + y'(x)([y(x)]^2 - 1) + 2[y(x)]^2 y'(x) = 0$$

da cui $y'(1) = -1$. Il limite rimane in una forma di indecisione. Derivando un'altra volta l'equazione si ottiene

$$\begin{aligned}&2 + 2y(x)y'(x) + 2y(x)y'(x) + 2x[y'(x)]^2 + 2xy(x)y''(x) + y''(x)([y(x)]^2+1)\\&+2y(x)[y'(x)]^2 + 4yy(x)[y'(x)]^2 + 2[y(x)]^2 y''(x) = 0\end{aligned}$$

da cui $y''(1) = -4$. Quindi

$$\lim_{x \to 1} \frac{y(x) + x - 1}{(x-1)^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{y'(x) + 1}{2(x-1)} \overset{\text{H}}{=} \frac{y''(x)}{2} = -2.$$

✍ **Esercizio 2.5.16.**

Verificare che l'equazione $y^3 = 3x^2 - 2x^3 y$ definisce implicitamente nell'intorno di $x = 1$ una e una sola funzione $y = y(x)$, con $y(1) = 1$.
a) Scrivere la formula di Taylor per $y(x)$ centrata in $x = 1$, arrestata al secondo ordine.
b) Disegnare localmente il grafico approssimato della funzione.
c) Dire se, nell'intorno del punto $(1, 1)$, la curva definita dalla funzione proposta è grafico di una funzione $x = x(y)$, con $x(1) = 1$.

Hint: a) Si ha $f_y(1, 1) = -5$; inoltre derivando l'equazione una volta si ottiene

$$6x - 6x^2 y(x) - 2x^3 y'(x) - 3(y(x))^2 y'(x) = 0$$

da cui $y'(1) = 0$; derivando una seconda volta si ottiene

$$6 - 12xy(x) - 6x^2 y'(x) - 6x^2 y'(x) - 2x^3 y''(x) - 6y(x)(y'(x))^2 - 3(y(x))^2 y''(x) = 0$$

da cui $y''(1) = -\frac{6}{5}$. Concludendo

$$y(x) = 1 - \frac{3}{5}(x-1)^2.$$

b) Passa per $(1, 1)$, tangente orizzontale e concavità verso il basso.
c) No perché $f_x(1, 1) = 0$.

✍ **Esercizio 2.5.17.**

Si consideri la curva Γ di equazione $y^2 - 2x + x^4 - 3 = 0$.
a) Verificare che il punto $P = (1, 2)$ appartiene a Γ e che in un intorno di tale punto Γ è esplicitabile come $y = f(x)$.
b) Scrivere l'equazione della retta tangente a Γ in P.
c) Scrivere l'equazione della parabola che approssima Γ in P.

Hint: a) Sono verificate le ipotesi del Teorema del Dini
b) Derivando una volta si ha

$$2y(x)y'(x) - 2 + 4x^3 = 0$$

da cui $y'(1) = -\frac{1}{2}$ e la retta tangente richiesta è

$$y(x) = 2 - \frac{1}{2}(x-1).$$

c) Derivando una seconda volta si ha

$$2(y'(x))^2 + 2y(x)y''(X) + 12x^2 = 0$$

da cui $y''(1) = -\frac{25}{8}$ e pertanto la parabola richiesta vale

$$y(x) = 2 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{25}{16}(x-1)^2.$$

✍ **Esercizio 2.5.18.**

Verificare che l'equazione $2x^2 + y^2 - e^{2xy} = 0$ definisce, nell'intorno di $x = 0$, una funzione $y = f(x)$ tale che $f(0) = 1$.
Calcolare $f'(0)$ e $f''(0)$.

Hint: sono verificate le ipotesi del Teorema del Dini. Derivando due volte si ha prima di tutto

$$4x + 2y(x)y'(x) - e^{2xy}[2y(x) + 2xy'(x)] = 0$$

da cui $y'(0) = 1$ e poi

$$4 + 2(y'(x))^2 + 2y(x)y''(x) - e^{2xy}[2y(x) + 2xy'(x)]^2 - e^{2xy}[2y'(x) + 2y'(x) + 2xy''(x)] = 0$$

e pertanto $y''(0) = 0$.

✍ **Esercizio 2.5.19.**

Stabilire per quale valore di y_0 l'equazione $e^{x^2y} + y - x = 0$ definisce implicitamente, in un intorno di $(0, y_0)$, una funzione $y = y(x)$ tale che $y(0) = y_0$. Disegnare un grafico di tale funzione in un intorno del punto $(0, y_0)$ per il valore di y_0 trovato.

Hint: Si ha $y_0 = -1$. Derivando una volta si ottiene

$$e^{x^2y(x)}[2xy(x) + x^2y'(x)] + y'(x) - 1 = 0$$

da cui $y'(1) = 1$; derivando un'altra volta si ha invece

$$e^{x^2y(x)}[2xy(x) + x^2y'(x)]^2 + e^{x^2y(x)}[2y(x) + 2xy'(x) + 2xy'(x) + x^2y''(x)] = 0$$

da cui $y''(1) = 2$. Quindi il grafico passa per il punto $(0, -1)$ ha per tangente la bisettrice del primo quadrante e ha concavità verso l'alto.

✍ **Esercizio 2.5.20.**

(a) Verificare che la curva piana γ di equazione $y^3 - y^2 + x - x^2 \ln(1+y) = 0$ passa per l'origine.
(b) Verificare se, nell'intorno dell'origine, γ è il grafico di una funzione $x = f(y)$ derivabile.
(c) Scrivere l'equazione della retta tangente a γ nell'origine.

Hint: Posto $F(x,y) = y^3 - y^2 + x - x^2 \log(1+y)$ si ha $F(0,0) = 0$, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ e $F_x(0,0) = 1 \neq 0$ quindi sono verificate le ipotesi del Teorema del Dini. L'equazione data diventa

$$y^3 - y^2 + x(y) - [x(y)]^2 \log(1+y) = 0$$

da cui derivando si ottiene

$$3y^2 - 2y + x'(y) - 2x(y)x'(y) \log(1+y) - [x(y)]^2 \frac{1}{1+y} = 0$$

da cui $x'(y) = 0$ e l'equazione della retta tangente a γ nell'origine risulta l'asse delle y.