Michela Eleuteri

ANALISI MATEMATICA

Funzioni di più variabili reali

Ottimizzazione libera

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Ottimizzazione. Estremi liberi

1.1. Generalità

Il termine *ottimizzazione* si riferisce a un'ampia categoria di problemi che rivestono enorme importanza nelle scienze applicate. L'idea di fondo è quella di massimizzare o minimizzare una certa quantità sotto opportune condizioni, la cui modellizzazione matematica dipende dalla natura del problema e quindi presenta diversi gradi di complessità; ad esempio, in meccanica minimizzare l'energia potenziale di un sistema significa individuare le posizioni di equilibrio stabile, ma ci sono anche problemi di ottimizzazione che intervengono anche in campo economico (massimizzare un utile o un profitto o minimizzare i costi) in campo tecnologico (minimizzare l'attrito o le turbolenze...)
In questo corso andremo a lavorare con funzioni reali di n variabili reali, con particolare attenzione al caso $n = 2$. Ci occuperemo di due problemi fondamentali:
• ricerca di estremi assunti in punti interni al dominio A di f (si chiamano ESTREMI LIBERI se A è aperto);
• ricerca degli estremi di f assunti su un sottoinsieme A non necessariamente aperto o sulla frontiera di A (si chiamano ESTREMI VINCOLATI).
Cominciamo con alcune fondamentali definizioni.

❒ **Definizione 1.1.1.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_0 \in A$. Diciamo che:
(a) $\mathbf{x}_0$ *è* PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO *per* f *in* A *se* $\forall \mathbf{x} \in A$ *si ha* $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$. *In tal caso* $f(\mathbf{x}_0)$ *si dice* MASSIMO ASSOLUTO O GLOBALE *per* f *in* A.
(b) $\mathbf{x}_0$ *è* PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO *per* f *in* A *se* $\forall \mathbf{x} \in A$ *si ha* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$. *In tal caso* $f(\mathbf{x}_0)$ *si dice* MINIMO ASSOLUTO O GLOBALE *per* f *in* A.
(c) $\mathbf{x}_0$ *è* PUNTO DI MASSIMO RELATIVO O LOCALE *per* f *se esiste un intorno* U *di* $\mathbf{x}_0$ *tale che* $\forall \mathbf{x} \in U$ *si ha* $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$. *In tal caso* $f(\mathbf{x}_0)$ *si dice* MASSIMO RELATIVO O LOCALE *per* f.

(d) $\mathbf{x}_0$ è PUNTO DI MINIMO RELATIVO O LOCALE *per* f *se esiste un intorno* U *di* $\mathbf{x}_0$ *tale che* $\forall \mathbf{x} \in U$ *si ha* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$*. In tal caso* $f(\mathbf{x}_0)$ *si dice* MINIMO RELATIVO O LOCALE *per* f.

Le domande che ci poniamo sono: esistono effettivamente punti di massimo o minimo, locali o globali, per una data funzione f? Sono unici? Come si fa a determinarli?
Prima di andare a rispondere a questi quesiti, premettiamo alcuni esempi che riguardano il caso di funzioni reali di variabile reale.

✎ **Esempio 1.1.2.** *Sia* $f(x) = x^2$. $x = 0$ *è punto di minimo globale per* f *su* $\mathbb{R}$ *e* $f(0) = 0$ *è minimo globale: infatti* $x^2 \geq 0$ *per ogni* x *reale. Osserviamo per altro che* $f'(x) = 2x$ *che si annulla solo in* $x = 0$.

✎ **Esempio 1.1.3.** *Sia* $f(x) = x^3$*. Anche in questo caso la derivata prima di* f *si annulla solo in* $x = 0$ *ma* $x = 0$ *non è punto di minimo (o massimo) (né locale né globale). Quindi anche nel caso di funzioni reali di una variabile reale non tutti i punti che annullano la derivata prima sono effettivamente punti di massimo (o minimo).*

✎ **Esempio 1.1.4.** *Sia* $f(x) = |x|$*. Allora* $x = 0$ *è punto di minimo ma in* $x = 0$ *la* f *non è derivabile. Quindi anche in una variabile i punti di massimo/minimo globale o locale possono trovarsi tra i punti di non derivabilità per* f.

✎ **Esempio 1.1.5.** *Sia* $f(x) = x^2$ *per* $x \in [-1, 2]$*. Allora* $x = 0$ *è punto di minimo globale;* $x = -1$ *è punto di massimo locale;* $x = 2$ *è punto di massimo globale. Quindi anche nel caso di funzioni di una variabile reale a valori reali i punti di massimo o minimo, locale o globale, si possono trovare anche nei punti del bordo (dove si ha solo la nozione di derivata destra o sinistra) e in generale vanno analizzati a parte.*

Quindi il nostro obiettivo sarà quello di andare a studiare il caso di funzioni di n variabili cercando di recuperare tutti questi diversi comportamenti.

1.2. Proprietà topologiche delle funzioni continue

Premettiamo alcune proprietà fondamentali delle funzioni continue che hanno importanti ricadute nei problemi di ottimizzazione.

Teorema 1.2.1. (TEOREMA DI WEIERSTRASS) *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *un insieme chiuso e limitato e* $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* f *ammette massimo e minimo in* E *ossia esistono* $\mathbf{x}_m$, $\mathbf{x}_M$ *in* E *tali che*

$$f(\mathbf{x}_m) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_M) \qquad \forall \mathbf{x} \in E.$$

Questo risultato sarà spesso fondamentale nei problemi di ottimizzazione vincolata.

Teorema 1.2.2. (teorema degli zeri) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme connesso (per archi, cioè un insieme tale che presi comunque due punti dell'insieme, esiste un arco continuo che li congiunge tutto contenuto in E) di $\mathbb{R}^n$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due punti di E tali che $f(\mathbf{x}) > 0$ e $f(\mathbf{y}) < 0$ allora esiste un punto $\mathbf{z} \in E$ tale che $f(\mathbf{y}) = 0$.*

Quest'ultimo risultato è particolarmente significativo nello studio del segno di una funzione f: infatti se una funzione è continua su un dominio qualunque, l'insieme degli zeri di f spezza il dominio in un certo numero di insiemi connessi su ciascuno dei quali f ha segno costante; quindi è sufficiente valutare il segno di f in un solo punto di ogni componente connessa per conoscere il segno dappertutto il quella parte. Questo risultato verrà usato per studiare il segno di f nell'analisi della natura di punti critici (problemi di ottimizzazione libera).

1.3. Estremi liberi: condizioni necessarie del primo ordine

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto. Procedendo come nel caso unidimensionale, se f è sufficientemente regolare, cerchiamo di selezionare i candidati punti di estremo locale individuando una condizione necessaria. Vale il seguente teorema.

Teorema 1.3.1. (teorema di Fermat) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A aperto, e $\mathbf{x}_0 \in A$ un punto di massimo o minimo locale per f. Se f è derivabile in $\mathbf{x}_0$, allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.*

Supponiamo che $\mathbf{x}_0$ sia punto di minimo locale (l'altro caso è completamente analogo). Bisogna dimostrare che ogni derivata parziale di f si annulla in $\mathbf{x}_0$. Infatti sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base canonica in $\mathbb{R}^n$. Se ci si muove da $\mathbf{x}_0$ lungo l'asse x_j (cioè nella direzione data da $\mathbf{e}_j$), considerando la funzione della variabile reale t

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j)$$

si ha che g è ben definita in un intorno di $t = 0$ e, poiché $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo locale per f si deduce che $t = 0$ è punto di minimo locale per g. D'altra parte g è derivabile in $t = 0$ e per definizione di derivata parziale si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = g'(0).$$

Si conclude allora dal Teorema di Fermat in una variabile. Infatti deve essere $g'(0) = 0$ e pertanto

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Quindi se f è derivabile in A, i punti di massimo locale si trovano tra quelli che annullano il gradiente. Naturalmente nulla si può dire se f non è derivabile in qualche punto: tali eventuali punti di non derivabilità andranno esaminati a parte.

❒ **Definizione 1.3.2.** I punti che annullano il gradiente di f si dicono PUNTI STAZIONARI O PUNTI CRITICI.

✎ **Esempio 1.3.3.** *Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Questa funzione è chiaramente la controparte in due variabili della funzione $g(t) = |t|$ e infatti anche f non è derivabile in $(x, y) = (0, 0)$. Però $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quindi $(0, 0)$ è punto di minimo globale per f.*

✎ **Esempio 1.3.4.** *Sia $f(x, y) = x^2 - y^3$. Si nota subito che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi essendo derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ è possibile applicare il teorema di Fermat. Dunque $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ se e soltanto se $(2x, -3y) = (0, 0)$ se e soltanto se $(x, y) = (0, 0)$. Quindi l'origine è l'unico punto stazionario o critico per f. Bisognerebbe capire se si tratta di un massimo o di un minimo. Per capirlo, occorre studiare il segno dell'*INCREMENTO DI *f cioè della quantità $\triangle f(0, 0) = f(x, y) - f(0, 0)$. In realtà non è nessuno dei due. Infatti, restringendosi all'asse delle y, si ha $f(0, y) = -y^3$ e quindi $\triangle f(0, 0) > 0$ se $y < 0$ e viceversa. In particolare ogni intorno dell'origine contiene punti in cui l'incremento ha segno opposto, quindi il punto $(0, 0)$ non può essere né di massimo né di minimo: si dice pertanto che è un punto di* SELLA O COLLE

✎ **Esempio 1.3.5.** *Sia $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y$. Anche in questo caso si nota subito che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi essendo f derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, possiamo applicare il teorema di Fermat. Si ha*

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x - 2xy, 4y - x^2) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x(1 - y), 4y - x^2) = (0, 0)$$

da cui i punti critici sono

$$(x, y) = (0, 0) \qquad (x, y) = (2, 1) \qquad (x, y) = (-2, 1).$$

In questo caso però non è facile studiare la natura di tali punti passando attraverso lo studio dell'incremento. È chiaro quindi che si rende necessario stabilire dei criteri che aiutino a portare avanti in modo agevole questa analisi.

1.4. Dal segno dell'incremento alle forme quadratiche

Consideriamo il caso di una funzione di due variabili (i ragionamenti che seguono possono naturalmente essere generalizzati al caso di n variabili). Per studiare la natura dei punti critici o stazionari, cioè dei punti che annullano il gradiente, l'idea è quella di andare a considerare il segno dell'INCREMENTO di f, come già accennato negli esempi precedenti, il quale è definito come

$$\triangle f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Infatti per definizione, se $\triangle f(x_0, y_0) \geq 0$ almeno in un intorno di (x_0, y_0), allora (x_0, y_0) è punto di minimo locale; se $\triangle f(x_0, y_0) \leq 0$ allora (x_0, y_0) è punto di massimo locale; se invece l'incremento non ha un segno definito, allora (x_0, y_0) è punto di sella o colle.
Quindi per far vedere che un punto critico è sella o colle è sufficiente trovare due curve diverse lungo le quali la restrizione della f ammette in un caso un punto di massimo e nell'altro un punto di minimo (l'incremento corrispondente non ha segno definito).
Tuttavia come mostrato negli esempi precedenti, talvolta non è facile andare a studiare direttamente il segno dell'incremento. Ci vuole un criterio più immediato.
Ricordiamoci della formula di Taylor del secondo ordine con resto di Peano. Allora la possiamo riscrivere in questo modo

$$\begin{aligned}\triangle f(x_0, y_0) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)h^2 \\ &\quad + f_{xy}(x_0, y_0)hk + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)k^2 + o(h^2 + k^2).\end{aligned}$$

Naturalmente se (x_0, y_0) è punto critico, allora $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ quindi la relazione precedente si riscrive come

$$\begin{aligned}\triangle f(x_0, y_0) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + f_{xy}(x_0, y_0)hk + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)k^2 \\ &\quad + o(h^2 + k^2).\end{aligned}$$

Quindi la determinazione del segno dell'incremento di $\triangle f(x_0, y_0)$ conduce all'analisi del differenziale secondo di f in (x_0, y_0) e quindi all'analisi del polinomio omogeneo di secondo grado nelle componenti (h, k) dato da

$$\frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + f_{xy}(x_0, y_0)hk + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)k^2$$

che è un caso particolare di FORMA QUADRATICA. Quindi l'analisi della natura dei punti stazionari si riconduce ad un problema puramente algebrico: studiare il segno di una forma quadratica.

1.5. Classificazione delle forme quadratiche: il caso $n = 2$

❒ **Definizione 1.5.1.** Una FORMA QUADRATICA in $\mathbb{R}^2$ è una funzione $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$q(h,k) = a_{11}h^2 + a_{12}hk + a_{21}kh + a_{22}k^2$$

dove gli a_{ij} sono numeri reali detti COEFFICIENTI DELLA FORMA QUADRATICA. *Si può supporre senza perdita di generalità che $a_{12} = a_{21}$.*

Ogni forma quadratica risulta così associata biunivocamente a una matrice simmetrica

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

✎ **Esempio 1.5.2.** *La forma quadratica*

$$q(h,k) = h^2 - 2k^2 + 4hk$$

risulta associata alla matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

✎ **Esempio 1.5.3.** *La forma quadratica*

$$q(h,k) = h^2 + 2k^2 - 6hk$$

risulta associata alla matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

✎ **Esempio 1.5.4.** *La forma quadratica*

$$q(h,k) = f_{xx}(x,y)h^2 + 2f_{xy}(x,y)hk + f_{yy}(x,y)k^2$$

risulta associata alla matrice Hessiana.

Una prima osservazione riguardante le forme quadratiche è che q è sempre un polinomio omogeneo di secondo grado, quindi $q(th,tk) = t^2q(h,k)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, perciò $q(h,k)$ assume sempre segno costante su ogni retta passante per l'origine (con $q(0,0) = 0$).
Analizziamo quale può essere il comportamento di una forma quadratica attraverso semplici esempi.

- CASO (A) $q(h,k) = h^2 + k^2$. In questo caso $q(h,k) > 0$ per ogni $(h,k) \neq (0,0)$.
- CASO (B) $q(h,k) = -h^2 - k^2$. In questo caso $q(h,k) < 0$ per ogni $(h,k) \neq 0$

• caso (c) $q(h,k) = h^2$. In questo caso $q(h,k)$ è sempre positiva tranne che nei vettori del tipo $(0,k)$ in cui si annulla.
• caso (d) $q(h,k) = -h^2$. In questo caso $q(h,k)$ è sempre negativa tranne che nei vettori del tipo $(0,k)$ in cui si annulla.
• caso (e) $q(h,k) = -h^2 + k^2$. In questo caso $q(h,k) > 0$ se $(h,k) = (0,k)$ $(k \neq 0)$ e $q(h,k) < 0$ se $(h,k) = (h,0)$ $(h \neq 0)$.
Questi esempi suggeriscono la seguente classificazione che si applica sia alla forma quadratica che alla matrice ad essa associata.

❒ **Definizione 1.5.5.** Una forma quadratica $q(h,k)$ con $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ (o la matrice simmetrica corrispondente) si dice:
• caso (a) definita positiva se $q(h,k) > 0$ per ogni $(h,k) \neq (0,0)$
• caso (b) definita negativa se $q(h,k) < 0$ per ogni $(h,k) \neq (0,0)$
• caso (c) semidefinita positiva se per ogni $(h,k) \neq (0,0)$ si ha $q(h,k) \geq 0$ ed esiste $(h,k) \neq (0,0)$ tale che $q(h,k) = 0$
• caso (d) semidefinita negativa se per ogni $(h,k) \neq (0,0)$ si ha $q(h,k) \leq 0$ ed esiste $(h,k) \neq (0,0)$ tale che $q(h,k) = 0$
• caso (e) indefinita se esistono (h_1,k_1) e (h_2,k_2) tali che $q(h_1,k_1) > 0$ e $q(h_2,k_2) < 0$.

Si noti che le varie condizioni sono mutuamente esclusive.
Vale il seguente teorema.

Teorema 1.5.6. (segno delle forme quadratiche in 2 variabili) *Se $a \neq 0$, la forma quadratica $q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$ è:*

• caso (a) definita positiva *se e soltanto se* $\det \mathbf{M} > 0$ *e* $a > 0$
• caso (b) definita negativa *se e soltanto se* $\det \mathbf{M} > 0$ *e* $a < 0$
• caso (c) semidefinita positiva *se e soltanto se* $\det \mathbf{M} = 0$ *e* $a > 0$
• caso (d) semidefinita negativa *se e soltanto se* $\det \mathbf{M} = 0$ *e* $a < 0$
• caso (e) indefinita *se e soltanto se* $\det \mathbf{M} < 0$
Se $a = 0$ e $c \neq 0$ allora nelle affermazioni precedenti basta sostituire a con c.

Basta considerare l'equazione di secondo grado $ax^2+2bx+c = 0$ associata alla forma quadratica $q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$. Se si va a calcolare il discriminante di tale equazione di secondo grado si ha

$$\triangle = b^2 - ac = -\det \mathbf{M}$$

dove $\mathbf{M}$ è la matrice associata alla forma quadratica. Quindi ad esempio dire che la forma quadratica è definita positiva è equivalente ad avere $\triangle < 0$ (se $a > 0$, altrimenti se $a = 0$ basta considerare $c > 0$; se invece $a < 0$ si raccoglie un segno e la forma quadratica avrà segno opposto rispetto al caso precedente); gli altri casi seguono analogamente.

✎ **Esempio 1.5.7.** *Sia $q(h,k) = -2h^2 + 2hk - 3k^2$. Allora la matrice corrispondente è*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Allora $a_{11} = -2 < 0$; det $\mathbf{M} = 5 > 0$ quindi la forma quadratica è definita negativa

✎ **Esempio 1.5.8.** *Classificare le seguenti forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$:*

$$\begin{aligned} q_1(x,y) &= 2x^2 + 3xy - 5y^2 \\ q_2(x,y) &= 2x^2 + 4xy + 3y^2 \\ q_3(x,y) &= x^2 + 4xy + 4y^2 \\ q_4(x,y) &= 3xy \\ q_5(x,y) &= -2x^2 + 2xy - 5y^2. \end{aligned}$$

Hint. a) La matrice associata risulta

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -5 \end{bmatrix}$$

Siccome il determinante di $A = -\frac{49}{4} < 0$, la forma quadratica è INDEFINITA.
b) La matrice associata risulta

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Siccome il determinante di $A = 2 > 0$ e il primo elemento $a_{11} = 2 > 0$, la forma quadratica è DEFINITA POSITIVA.
c) Si vede immediatamente che $q_3(x,y) = (x+2y)^2 \geq 0$ e quindi subito si può concludere che è semidefinita positiva. Alternativamente, la matrice associata risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Siccome il determinante di $A = 0$ e il primo elemento $a_{11} = 1 > 0$, la forma quadratica è SEMIDEFINITA POSITIVA.
d) La matrice associata risulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Siccome il determinante di $A < 0$, la forma quadratica è INDEFINITA.
c) La matrice associata risulta

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Siccome il determinante di $A = 9 > 0$ e il primo elemento $a_{11} = -2 < 0$, la forma quadratica è DEFINITA NEGATIVA.

✎ **Esempio 1.5.9.** *Classificare, al variare del parametro reale α, la forma quadratica rappresentata dalla matrice:*

$$\begin{bmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ 1 & 2\alpha \end{bmatrix}.$$

Hint. Calcolando il determinante della matrice, esso risulta uguale a $\alpha[2\alpha + 1]$. Quindi:
1) se $\alpha = 0$ allora il determinante è nullo e la matrice risulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che si vede immediatamente essere semidefinita positiva.
2) Se $\alpha = -1/2$ allora il determinante è di nuovo nullo e la matrice risulta

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che di nuovo è semidefinita positiva.
3) se $\alpha < -1/2$ o $\alpha > 0$ allora il determinante della matrice è positivo. Quindi se siamo nel caso $1 + \alpha > 0$ allora il primo elemento è positivo e la matrice associata è definita positiva. Se $1 + \alpha < 0$ la matrice associata è definita negativa. Se $\alpha = -1$ la matrice associata risulta

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ed essendo $a_{22} = -2 < 0$ la matrice di nuovo è definita negativa.
4) se $-1/2 < \alpha < 0$ allora la matrice è indefinita.

Riassumendo:
a) $\alpha < -1$: DEFINITA NEGATIVA;
b) $\alpha = -1$: DEFINITA NEGATIVA;
c) $-1 < \alpha < -1/2$: DEFINITA POSITIVA;
d) $\alpha = -1/2$: SEMIDEFINITA POSITIVA;
e) $-1/2 < \alpha < 0$: INDEFINITA;
f) $\alpha = 0$: SEMIDEFINITA POSITIVA;
g) $\alpha > 0$: DEFINITA POSITIVA.

1.6. Classificazione delle forme quadratiche: il caso generale

❒ **Definizione 1.6.1.** Una FORMA QUADRATICA in $\mathbb{R}^n$ è una funzione $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$q(\mathbf{h}) = q(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

dove gli a_{ij} sono numeri reali detti COEFFICIENTI DELLA FORMA QUADRATICA. *Si può supporre senza perdita di generalità che $a_{ij} = a_{ji}$.*

Ogni forma quadratica risulta associata biunivocamente a una matrice simmetrica $\mathbf{M} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$.

✎ **Esempio 1.6.2.** *La forma quadratica*

$$q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + 2h_2^2 + h_3^2 - 6h_1h_2 + 3h_1h_3$$

risulta associata alla matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3/2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❒ **Definizione 1.6.3.** Una forma quadratica $q(\mathbf{h})$ con $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ (o la matrice simmetrica corrispondente) si dice:
- CASO (A) DEFINITA POSITIVA se $q(\mathbf{h}) > 0$ per ogni $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$
- CASO (B) DEFINITA NEGATIVA se $q(\mathbf{h}) < 0$ per ogni $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$
- CASO (C) SEMIDEFINITA POSITIVA se per ogni $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$ si ha $q(\mathbf{h}) \geq 0$ ed esiste $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$ tale che $q(\mathbf{h}) = 0$
- CASO (D) SEMIDEFINITA NEGATIVA se per ogni $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$ si ha $q(\mathbf{h}) \leq 0$ ed esiste $(\mathbf{h}) \neq (\mathbf{0})$ tale che $q(\mathbf{h}) = 0$
- CASO (E) INDEFINITA se esistono $(\mathbf{h}_1)$ e $(\mathbf{h}_2)$ tali che $q(\mathbf{h}_1) > 0$ e $q(\mathbf{h}_2) < 0$.

Vale il seguente teorema.

Teorema 1.6.4. (segno delle forme quadratiche in n variabili) *Sia $q(\mathbf{h})$ una forma quadratica con $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Sia $\mathbf{M}$ la matrice associata e siano $\mathbf{M}_k$ le* sottomatrici principali nord-ovest*, cioè le matrici composte dalle prime k righe e k colonne di $\mathbf{M}$*

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad \mathbf{M}_n = \mathbf{M}$$

Allora $q(\mathbf{h})$ è:

- caso (a) definita positiva *se e soltanto se det $\mathbf{M}_k > 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$*
- caso (b) definita negativa *se e soltanto se $(-1)^k$ det $\mathbf{M}_k > 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$.*

✎ **Esempio 1.6.5.** *Sia $q(h_1, h_2, h_3) = 5h_1^2 - 8h_1h_3 + 3h_2^2 + 4h_3^2$. Allora la matrice corrispondente è*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Allora $a_{11} = 5 > 0$; det $\mathbf{M}_2 = 15 > 0$; det $\mathbf{M} = 12 > 0$ quindi la forma quadratica è definita positiva.

1.7. Studio della natura dei punti critici

1.7.1. Il caso $n = 2$

Concludiamo la nostra analisi dando informazioni utili per determinare la natura di un punto stazionario per una funzione di classe almeno $\mathcal{C}^2$. Essendo il punto critico, il gradiente è nullo, dal Teorema di Fermat, quindi abbiamo visto dalla formula di Taylor che per estrarre informazioni sulla natura del punto critico, occorre studiare e classificare la forma quadratica corrispondente alla matrice Hessiana. Si perviene dunque al seguente teorema.

Teorema 1.7.1. (studio della natura dei punti critici - il caso $n = 2$) *Sia $f \in \mathcal{C}^2(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^2$, sia $(x_0, y_0) \in A$ un punto critico per f e sia*

$$\mathbf{H}_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

la matrice Hessiana di f nel punto critico. Allora:

- caso (a) se $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ allora la matrice Hessina è definita positiva e (x_0, y_0) è punto di minimo locale forte
- caso (b) se $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ allora la matrice Hessina è definita negativa e (x_0, y_0) è punto di massimo locale forte
- caso (c) e caso (d) se $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) = 0$ allora la matrice Hessina è semidefinita (positiva o negativa) e occorre un'analisi ulteriore
- caso (e) se $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) < 0$ allora la matrice Hessina è indefinita e (x_0, y_0) è un punto di sella o colle.

1.7.2. Il caso generale

Vale il seguente teorema.

Teorema 1.7.2. (studio della natura dei punti critici - il caso generale) *Sia $f \in \mathcal{C}^2(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^2$, sia $(\mathbf{x}_0) \in A$ un punto critico per f. Se la forma quadratica*

$$q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j$$

- caso (a) è definita positiva allora $(\mathbf{x}_0)$ è punto di minimo locale forte
- caso (b) è definita negativa allora $(\mathbf{x}_0)$ è punto di massimo locale forte

- caso (c) è non nulla e semidefinita positiva allora $(\mathbf{x}_0)$ è punto di minimo locale forte
- caso (d) è non nulla e semidefinita negativa allora $(\mathbf{x}_0)$ è punto di massimo locale forte
- caso (e) è indefinita allora $(\mathbf{x}_0)$ è un punto di sella o colle.

Torniamo agli esempi studiati in precedenza.

✎ **Esempio 1.7.3.** *Sia $f(x,y) = x^2 - y^3$. Studiando il segno dell'incremento, avevamo visto che l'origine è un punto di sella o colle. La matrice Hessiana nel generico punto è*

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$$

quindi nell'origine è

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è semindefinita positiva. Quindi dal teorema possiamo solo dedurre a priori che l'origine non è un punto di massimo relativo ma potrebbe essere minimo relativo o sella. La conclusione viene da un'analisi ulteriore come si è fatto in precedenza.

✎ **Esempio 1.7.4.** *Sia $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$. Avevamo trovato che i punti critici erano*

$$(x,y) = (0,0) \qquad (x,y) = (2,1) \qquad (x,y) = (-2,1).$$

Andiamo ora a studiarne la natura attraverso lo studio della corrispondente matrice Hessiana. Si ha che la matrice Hessiana di f nel generico punto vale

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1-y) & -2x \\ -2x & 4 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice Hessiana nei tre punti critici vale rispettivamente

$$\mathbf{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H}_f(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H}_f(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Quindi riassumendo

$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \qquad \det\mathbf{H}_f(0,0) = 8 < 0$$

quindi la matrice Hessiana relativa all'origine è definita positiva: allora l'origine è un punto di minimo assoluto (si poteva pervenire già a tale conclusione mostrando che la funzione è data dalla somma della funzione $g(x,y) = x^2 + 2y^2$ per cui l'origine è chiaramente un punto di minimo assoluto più una perturbazione $-x^2y$ di terzo grado (quindi di grado superiore)). D'altro canto

$$\det\mathbf{H}_f(2,1) = \det\mathbf{H}_f(-2,1) = -16 < 0$$

quindi la matrice Hessiana relativa ai punti stazionari $(\pm 2, 1)$ è indefinita e perciò entrambi questi punti sono punti di sella.

1.8. Forme quadratiche: il test degli autovalori

Rimandiamo a un testo di algebra lineare per le proprietà delle matrici simmetriche e il legame con gli autovalori (riduzione a forma canonica di una forma quadratica). Ci limitiamo in questa sede a enunciare un criterio alternativo che si basa sugli autovalori di una matrice per avere una classificazione delle forme quadratiche.

❒ **Definizione 1.8.1.** Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Allora λ si dice AUTOVALORE e $\mathbf{v}$ AUTOVETTORE di una matrice quadrata $\mathbf{M}$ di ordine n se soddisfano la relazione $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$ o equivalentemente $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{I}_n$ è la matrice identità in $\mathbb{R}^n$.

La precedente equazione ha soluzioni $\mathbf{v}$ non nulle se e solo se a matrice dei coefficienti è singolare cioè se e soltanto se λ è soluzione dell'EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0.$$

Il primo membro è un polinomio di grado n in λ pertanto dal teorema fondamentale dell'algebra esistono esattamente n autovalori di $\mathbf{M}$ contati con la loro molteplicità. Quindi si può dimostrare che vale il seguente teorema.

Teorema 1.8.2. (TEST DEGLI AUTOVALORI) *La forma quadratica* $q(\mathbf{h})$ *è:*

- CASO (A) DEFINITA POSITIVA *se e soltanto se tutti gli autovalori di* $\mathbf{M}$ *sono positivi*
- CASO (B) DEFINITA NEGATIVA *se e soltanto se tutti gli autovalori di* $\mathbf{M}$ *sono negativi*
- CASO (C) SEMIDEFINITA POSITIVA *se e soltanto se tutti gli autovalori di* $\mathbf{M}$ *sono non negativi (quindi* ≥ 0*) e almeno uno di essi è nullo*
- CASO (D) SEMIDEFINITA NEGATIVA *se e soltanto se tutti gli autovalori di* $\mathbf{M}$ *sono non positivi (quindi* ≤ 0*) e almeno uno di essi è nullo*
- CASO (E) INDEFINITA *se e soltanto se* $\mathbf{M}$ *ha almeno un autovalore positivo e uno negativo.*

La classificazione delle forme quadratiche quindi si può basare sullo studio del segno degli autovalori.

✎ **Esempio 1.8.3.** *Determinare gli estremi liberi delle seguenti funzioni:*

$$a) f(x,y,z) = y^2 + z^2 - 2x^2 + 2xy - 2xz - 4x$$
$$b) f(x,y,z) = xyze^{-x^2-2y^2-3z^2}$$

➻ **Hint:** a)

$$\nabla f(x,y,z) = (-4x+2y-2z-4, 2y+2x, 2z-2x)$$

da cui l'unico punto critico che si ottiene risolvendo il sistema $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ è

$$A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Derivate seconde:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y,z) &= -4 \qquad & f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 2 \\ f_{yy}(x,y,z) &= 2 \qquad & f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = -2 \\ f_{zz}(x,y,z) &= 2 \qquad & f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) = 0. \end{aligned}$$

Dunque l'Hessiana nel punto A diventa

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Andiamo a calcolare gli autovalori di questa matrice. Si ha

$$H_f(A) - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -4-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \det(H_f(A) - \lambda \mathbf{I}) &= (2-\lambda)^2(-4-\lambda) - 4(2-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)[\lambda^2 + 2\lambda - 16]. \end{aligned}$$

In ogni caso gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1-\sqrt{17} \qquad \lambda = -1+\sqrt{17}$$

quindi si ha la presenza di almeno un autovalore positivo e almeno un autovalore negativo. Il punto critico considerato è dunque un punto di sella.

b) Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= yze^{-x^2-2y^2-3z^2}(1-2x^2) \\ f_y(x,y,z) &= xze^{-x^2-2y^2-3z^2}(1-4y^2) \\ f_z(x,y,z) &= xye^{-x^2-2y^2-3z^2}(1-6z^2). \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si legge $y = 0$ oppure $z = 0$ oppure $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e non ci sono altre possibilità.
Se $y = 0$ abbiamo due possibiità: $x = 0$ oppure $z = 0$. Analogamente se $z = 0$ abbiamo $x = 0$ oppure $y = 0$. Quindi prima di tutto punti critici sono i 3 assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

D'altra parte gli altri punti critici si ottengono annullando le quantità tra parentesi e dunque i rimanenti punti critici sono

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) & B &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\
C &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) & D &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\
E &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) & F &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\
G &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) & H &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).
\end{aligned}$$

Derivate seconde:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y,z) &= -2xyze^{-x^2-2y^2-3z^2}[3-2x^2] \\
f_{xy}(x,y,z) &= f_{yx}(x,y,z) = (1-2x^2)(1-4y^2)ze^{-x^2-2y^2-3z^2} \\
f_{yy}(x,y,z) &= -4xyze^{-x^2-2y^2-3z^2}[5-4y^2] \\
f_{xz}(x,y,z) &= f_{zx}(x,y,z) = (1-2x^2)(1-6z^2)ye^{-x^2-2y^2-3z^2} \\
f_{zz}(x,y,z) &= -6xyze^{-x^2-2y^2-3z^2}[7-6z^2] \\
f_{yz}(x,y,z) &= f_{zy}(x,y,z) = (1-4y^2)(1-6z^2)xe^{-x^2-2y^2-3z^2}
\end{aligned}$$

Quindi sull'asse z ($x = 0$ e $y = 0$)

$$H_f(A) = \begin{bmatrix} 0 & ze^{-3z^2} & 0 \\ ze^{-3z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolando gli autovalori si ottiene che

$$\det(H_f - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + \lambda z^2 e^{-6z^2}$$

quindi c'è almeno un autovalore positivo e uno negativo. Pertanto tutti i punti dell'asse z sono punti di sella, cosa che si poteva osservare facilmente visto che la funzione cambia segno nei vari ottanti. Analogamente si dimostra che anche i punti degli altri due assi sono punti di sella.

D'altra parte

$$H_f(A) = H_f(D) = H_f(F) = H_f(G) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-3/2} & 0 & \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{\sqrt{3}}e^{-3/2} \end{bmatrix}$$

che è una matrice diagonale, quindi gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale. Essendo tutti negativi, la matrice Hessiana è definita negativa e quindi i punti A, D, F, G sono punti di massimo locale. Infine

$$H_f(B) = H_f(C) = H_f(F) = H_f(G) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-3/2} & 0 & \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{\sqrt{3}}e^{-3/2} \end{bmatrix}$$

che è una matrice diagonale, quindi gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale. Essendo tutti positivi, la matrice Hessiana è definita positiva e quindi i punti B, C, F, G sono punti di minimo locale.

1.9. Esercizi di ricapitolazione riguardanti estremi liberi

✍ **Esercizio 1.9.1.**

Studiare, al variare di k, le forme quadratiche

$$(a) q_1(x, y) = k^2x^2 + (k+1)y^2 + 12xy,$$
$$(b) q_2(x, y, z) = -x^2 + y^2 + 2z^2 + 2kxz + 2yz$$

(a) La matrice associata alla forma quadratica risulta

$$A = \begin{bmatrix} k^2 & 6 \\ 6 & (k+1) \end{bmatrix}.$$

Mettiamoci nel caso $k \neq 0$, dunque $a = k^2 > 0$ per ogni k. Abbiamo $\det A = (k-3)(k^2+4k+12)$. Quindi per $k > 3$ si ha $\det A > 0$, mentre per $k < 3$ si ha $\det A < 0$. Di conseguenza:
a) $k > 3$: forma quadratica definita positiva

b) $k < 3$: forma quadratica indefinita
c) $k = 3$: $\det A = 0$, $a > 0$, quindi forma quadratica semidefinita positiva
d) $k = 0$: La matrice diventa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

dunque $c = 1 > 0$ e $\det A = -36 < 0$, quindi per $k = 0$ la forma quadratica è indefinita.
Si può far vedere che la forma quadratica non è mai definita negativa.
(b) La matrice associata alla forma quadratica risulta

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si ha $\det A = -1 - k^2 < 0$ per ogni k, $a_{11} < 0$ e $\det A_{22} < 0$ dove A_{22} è il minore formato dalle prime due righe e due colonne della matrice associata, quindi non si può concludere nulla dal criterio dei minori nord-ovest.
PRIMO MODO: se consideriamo l'asse y (cioè $x = z = 0$) allora $q_2(0, y, 0) = y^2 \geq 0$ mentre se consideriamo l'asse x (cioè $y = z = 0$) allora $q_2(x, 0, 0) = -x^2 \leq 0$ quindi a patto di scartare l'origine, esistono punti in cui la forma quadratica ha segno strettamente negativo e punti in cui ha segno strettamente positivo per cui la forma quadratica è indefinita.
SECONDO MODO: usiamo il criterio degli autovalori e andiamo a scrivere il polinomio caratteristico associato alla matrice A. Si ha

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (-1 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) - k^2(1 - \lambda) + 1 + \lambda \\ &= 2\lambda^2 - 2 - \lambda^3 + \lambda - k^2 + k^2\lambda + 1 + \lambda \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + (2 + k^2)\lambda - 1 - k^2 =: P(\lambda). \end{aligned}$$

A questo punto occorre determinare gli zeri di $P(\lambda)$ o quanto meno il loro segno. Innanzitutto si osserva che $P(0) < 0$ e anche $\lim_{\lambda \to -\infty} P(\lambda) = +\infty$ quindi esiste $M < 0$ tale che $P(M) > 0$; quindi dal teorema di esistenza degli zeri esiste $\lambda_1 \in [M, 0]$ tale che $P(\lambda_1) = 0$.
D'altra parte $P(1) > 0$ quindi di nuovo dal teorema di esistenza degli zeri esiste $\lambda_2 \in [0, 1]$ tale che $P(\lambda_2) = 0$.
Quindi ho trovato due autovalori λ_1, λ_2 di segno opposto; la forma quadratica in esame è dunque indefinita.

✍ **Esercizio 1.9.2.**

Si determini, al variare del parametro reale k, il segno della forma quadratica: $q(x, y, z) = x^2 + 2kxy + y^2 + 2kyz + z^2$.

Alla forma quadratica q è associata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & k & 1. \end{pmatrix}$$

(Notiamo che da $2kxy$ si ottiene che l'elemento della matrice $a_{12} = k$ e coincide con l'elemento della matrice a_{21} perché la matrice è simmetrica). I determinanti dei minori principali nord-ovest sono:

$$A_1 = 1 \qquad A_2 = 1 - k^2 \qquad A_3 = \text{ Det } A = 1 - 2k^2.$$

A questo punto:
$|k| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ allora $A_3 < 0$ e siccome $A_1 > 0$ si ha che la forma quadratica è indefinita;
$|k| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ allora tutti gli A_i sono positivi e dunque la forma quadratica è definita positiva;
$|k| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ allora la forma quadratica è

$$q(x, y, z) = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y + z\right)^2$$

e dunque è semidefinita positiva, cioè $q(x, y, z) \geq 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n$ e $q(x, y, z) = 0$ nei punti $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}h, h, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}h\right)$.

✍ **Esercizio 1.9.3.**

Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 2.$$

Siccome la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, gli eventuali punti di estremo libero di f devono anche essere punti critici, cioè punti che annullano il gradiente di f. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 2(x - y)2 = 4x^3 - 4x + 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)$$

dunque per trovare i punti critici occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x - y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x - y) = 0. \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni si ottiene $x^3 + y^3 = 0$ che ci dà $x = -y$. Sostituendo quanto trovato nella seconda equazione si ottiene facilmente

$$4y^3 - 8y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y[y^2 - 2] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \vee y = \pm\sqrt{2}.$$

Dunque i punti critici sono

$$(0,0) \qquad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \qquad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Per determinare la natura dei punti critici proviamo a calcolare la matrice Hessiana nei punti suddetti. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4.$$

Dunque

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 24-4 & 4 \\ 4 & 24-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) =$ Det $H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 400 - 16 > 0$ e $f_{xx} > 0$. Questo implica che i punti $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sono di minimo locale. D'altra parte

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_f(0,0) = 0$ e il test della matrice Hessiana si rivela inefficace per il punto $(0,0)$. Per determinare la natura di questo punto critico occorre cambiare metodo. Proviamo a studiare il segno dell'incremento della funzione, cioè studiamo il segno di

$$\triangle f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Ora, se $x = y$ allora

$$\triangle f = x^4 + x^4 = 2x^4 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

mentre se consideriamo la curva $y = -x$ si ha

$$\triangle f = 2x^4 - 8x^2 \leq 0 \qquad \text{se} |x| \leq 2.$$

Questo ci dice che in ogni intorno dell'origine ci sono sia punti in cui f ha valori maggiori di $2 = f(0,0)$ e sia punti in cui f ha valori minori di 2 e dunque il punto $(0,0)$ è un punto di sella.

✍ **Esercizio 1.9.4.** *Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione*

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

La funzione f è a simmetria radiale, cioè è funzione solo della distanza dall'origine $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Come conseguenza, le curve di livello di f sono circonferenze con centro nell'origine. In casi come questo si può semplificare la ricerca degli estremi studiando la funzione di una sola variabile

$$g(r) = r^2 e^{-r^2} \qquad r \geq 0.$$

Si ha $g(0) = 0$ e anche $g(r) \geq 0$ per ogni r anzi più precisamente $g(r) > 0$ per ogni $r \neq 0$. Inoltre

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = 0$$

e dunque $r = 0$ è punto di minimo globale. D'altra parte

$$g'(r) = 2r(1-r^2)e^{-r^2}$$

e dunque $g'(r) = 0$ se $r = 1$. Perciò se $r = 1$ è punto di massimo globale.
Per trasferire i risultati ottenuti per g a f basta osservare che $r = 0$ corrisponde all'origine $(0,0)$ mentre $r = 1$ corrisponde alla circonferenza unitaria centrata in $(0,0)$. Di conseguenza il valore minimo è assunto in $(0,0)$ mentre il valore massimo è assunto in tutti i punti della circonferenza unitaria.

✍ **Esercizio 1.9.5.** *Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione*

$$f(x,y) = x\sqrt[3]{(y-x)^2}.$$

La funzione f è definita e continua in $\mathbb{R}^2$. Dimostriamo che in tutti i punti dell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ tranne l'origine si ha che f non è differenziabile. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} x h^{-1/3} + \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{h^2}.$$

Il limite del primo addendo, per $x \neq 0$ non esiste e quindi sicuramente f non è differenziabile nei punti (x,x) con $x \neq 0$. nell'origine invece si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt[3]{(-h)^2}}{h} = 0$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

dunque

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\sqrt[3]{(k-h)^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

e questo limite esiste e fa 0, dunque in $(0,0)$ f è differenziabile. I punti di estremo andranno cercati tra i punti critici, cioè i punti che annullano il gradiente, tra cui l'origine, e i punti della bisettrice del primo e terzo quadrante (origine esclusa). Allora

$$f_x(x,y) = \frac{3y-5x}{3\sqrt[3]{y-x}} \qquad f_y(x,y) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{y-x}}$$

e dunque il gradiente di f è diverso da zero in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = x\}$. Pertanto possono essere punti di estremo solo i punti della retta $y = x$ (origine esclusa). Su tale retta si ha $f(x,y) = 0$. Studiando il segno di $f(x,y)$ si ricava che i punti della bisettrice del primo quadrante sono di minimo locale mentre i punti della bisettrice del terzo quadrante sono di massimo locale. Infatti $f(x,y) \geq 0$ per $x > 0$ e $f(x,y) \leq 0$ per $x < 0$. Per curiosità l'origine è punto di sella. Non ci sono estremi globali perché la funzione è illimitata superiormente e inferiormente. Ad esempio:

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,0)} f(x,y) = +\infty$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(-\infty,0)} f(x,y) = -\infty.$$

✍ **Esercizio 1.9.6.** *Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione*

$$f(x,y) = x^2\log(1+y) + x^2y^2$$

nel suo dominio.

Il dominio di f è l'insieme aperto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}.$$

In questo insieme f è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Gli eventuali punti di estremo locale devono perciò essere soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x(\log(1+y) + y^2) = 0 \\ f_y(x,y) = x^2\left(\dfrac{1}{1+y} + 2y\right) = 0. \end{cases}$$

Si ha sicuramente $x = 0$; inoltre deve aversi

$$\log(1 + y) + y^2 = 0$$

e

$$\frac{1}{1+y} + 2y = 0.$$

La prima equazione ci dà come soluzione $y = 0$ mentre dalla seconda equazione deriviamo $2y^2 + 2y + 1 = 0$ che non ci dà soluzioni reali. Quindi il sistema ammette come soluzioni gli infiniti punti $(0, k)$ con $k > -1$. Su tali punti si ha $f(x, y) = 0$. Proviamo il test della matrice Hessiana.

$$f_{xx}(x, y) = 2(\log(1 + y) + y^2) \qquad f_{yy}(x, y) = x^2 \left(2 - \frac{1}{(1+y)^2}\right)$$

e

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2x \left(\frac{1}{1+y} + 2y\right);$$

dunque

$$H_f(0, k) = \begin{pmatrix} 2(\log(1 + k) + k^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque il test della matrice Hessiana si rivela inefficace.
Proviamo a valutare

$$\triangle f(x, y) = f(x, y) - f(0, k) = f(x, y) = x^2 \log(1 + y) + x^2y^2 = x^2[\log(1 + y) + y^2].$$

Studiamo il segno del termine $\log(1 + y) + y^2 =: g(y)$. È immediato verificare che

$$g(y) < 0 \Leftrightarrow -1 < y < 0, \qquad g(y) \Leftrightarrow y = 0, \qquad g(y) > 0 \Leftrightarrow y > 0.$$

Da questo è possibile concludere che:
se $k > 0$ allora i punti $(0, k)$ sono punti di minimo locale;
se $k = 0$ allora l'origine è un punto di sella;
se $-1 < k < 0$ allora i punti $(0, k)$ sono punti di massimo locale.
Osserviamo infine che f non ha punti di estremo globale in quanto

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,y_0)} f(x, y) = \begin{cases} +\infty & y_0 > 0 \\ -\infty & -1 < y_0 < 0 \end{cases}$$

e perciò

$$\sup f(x, y) = +\infty \qquad \inf f(x, y) = -\infty.$$

✍ **Esercizio 1.9.7.**

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = 3y^2x + x^3 - 3y^2 - 3x^2$$

e stabilirne la natura.

Osserviamo prima di tutto che la funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi ha senso calcolare il gradiente. Il teorema di Fermat ci assicura che i punti estremanti si trovano tra i punti critici o stazionari, cioè tra i punti che annullano il gradiente di f. Si ha dunque

$$\nabla f(x, y) = (3y^2 + 3x^2 - 6x, 6xy - 6y) = (0, 0) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 3y^2 + 3x^2 - 6x = 0 \\ 6y[x - 1] = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, dalla legge di annullamento del prodotto, si legge $y = 0$ o $x = 1$ e non ci sono altre possibilità.
Se dunque $y = 0$ allora inserendo nella prima equazione si ottiene $3x(x - 2) = 0$ dunque $x = 0$ oppure $x = 2$. Se invece $x = 1$ inserendo nella prima equazione si ottiene $y = \pm 1$ e non ci sono altre possibilità.
I punti critici sono dunque i seguenti

$$O = (0, 0) \quad A = (2, 0) \quad B = (1, 1) \quad C = (1, -1).$$

Andiamo a studiare la natura di questi punti con il test della matrice Hessiana (visto che la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ quindi ha senso calcolare tutte le derivate seconde. Per altro, in particolare la funzione è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ quindi il teorema di Schwarz ci assicura che le derivate parziali seconde miste sono uguali).
Si ha:

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 6 \qquad f_{xy}(xy) = 6y \qquad f_{yy}(x, y) = 6(x - 1).$$

Pertanto

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

quindi il determinante di questa matrice è $36 > 0$ e il primo elemento è $-6 < 0$ pertanto la matrice Hessiana in $(0, 0)$ è definita negativa e $(0, 0)$ è PUNTO DI MASSIMO (LOCALE) per f. Il VALORE MASSIMO (LOCALE) di f risulta $f(0, 0) = 0$. Si noti la differenza tra punto di massimo e valore massimo per f.
D'altra parte

$$H_f(2, 0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

quindi il determinante di questa matrice è $36 > 0$ e il primo elemento è $6 > 0$ pertanto la matrice Hessiana in $(2,0)$ è definita positiva e $(2,0)$ è PUNTO DI MINIMO (LOCALE) per f. Il VALORE MINIMO (LOCALE) di f risulta $f(2,0) = -4$.
Inoltre

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi il determinante di questa matrice è $-36 < 0$ pertanto la matrice Hessiana in $(1,1)$ è indefinita e $(1,1)$ è PUNTO DI SELLA per f. Il valore di f corrispondente risulta $f(1,1) = -2$.
Infine

$$H_f(1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi il determinante di questa matrice è $-36 < 0$ pertanto la matrice Hessiana in $(-1,-1)$ è indefinita e $(-1,-1)$ è PUNTO DI SELLA per f. Il valore di f corrispondente risulta $f(-1,-1) = -2$.
Osserviamo che non ci sono massimi o minimi globali per f. Per dimostrarlo, basta osservare ad esempio che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$$

quindi f non è limitata né superiormente né inferiormente.

✍ **Esercizio 1.9.8.**

Determinate i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - \log\left(1 + 3x^2 + 4y^2\right).$$

Dire se l'origine è estremante per f.

Osserviamo prima di tutto che la funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi ha senso calcolare il gradiente. Il teorema di Fermat ci assicura che i punti estremanti si trovano tra i punti critici o stazionari, cioè tra i punti che annullano il gradiente di f. Si ha dunque

$$\nabla f(x,y) = \left(6x - \frac{6x}{1+3x^2+4y^2}, 8y - \frac{8y}{1+3x^2+4y^2}\right) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 6x\left[\dfrac{3x^2+4y^2}{1+3x^2+4y^2}\right] = 0 \\ 8y\left[\dfrac{3x^2+4y^2}{1+3x^2+4y^2}\right] = 0. \end{cases}$$

Prendendo una qualunque delle due equazioni e applicando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene solamente il punto $(0,0)$ che è l'unico punto critico per f.

Vediamo se si riesce a studiarne la natura con il test della matrice Hessiana (visto che la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ quindi ha senso calcolare tutte le derivate seconde. Per altro, in particolare la funzione è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ quindi il teorema di Schwarz ci assicura che le derivate parziali seconde miste sono uguali).
Si ha

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 6 - \frac{6(1-3x^2+4y^2)}{1+3x^2+4y^2} \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = \frac{48xy}{1+3x^2+4y^2} \\ f_{yy}(x,y) &= 8 - \frac{8(1+3x^2-4y^2)}{1+3x^2+4y^2} \end{aligned}$$

ma

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi per l'origine il test della matrice Hessiana fallisce.
A questo punto occorre studiare la natura dell'origine andando a studiare il segno dell'incremento, dove

$$\triangle f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$$

quindi è sufficiente studiare il segno di f in un intorno dell'origine.
Ponendo $t := 3x^2+4y^2$ si può studiare la funzione $g(t) = t - \log(1+t)$ per $t \geq 0$ e si scopre, da un breve studio di funzione, che si tratta di una funzione nulla nell'origine, sempre strettamente crescente, con concavità verso l'alto e che ha limite $+\infty$ se $t \to +\infty$. Quindi in particolare g è sempre positiva e lo stesso vale per f; quindi l'origine è un punto di minimo assoluto per f. In particolare f non ha massimi assoluti su $\mathbb{R}^2$.

✍ **Esercizio 1.9.9.**

Determinare gli estremi liberi della funzione

$$f(x,y) = x^2y - y^2 + 1.$$

Osserviamo prima di tutto che la funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi ha senso calcolare il gradiente. Il teorema di Fermat ci assicura che i punti estremanti si trovano tra i punti critici o stazionari, cioè tra i punti che annullano il gradiente di f. Si ha dunque

$$\nabla f(x,y) = (2xy, x^2-2y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 - 2y = 0. \end{cases}$$

Quindi l'unico punto critico è l'origine. Anche in questo caso si vede che il test della matrice Hessiana fallisce; infatti si ottiene rapidamente

$$f_{xx}(x,y) = 2y \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x \quad f_{yy}(x,y) = -2$$

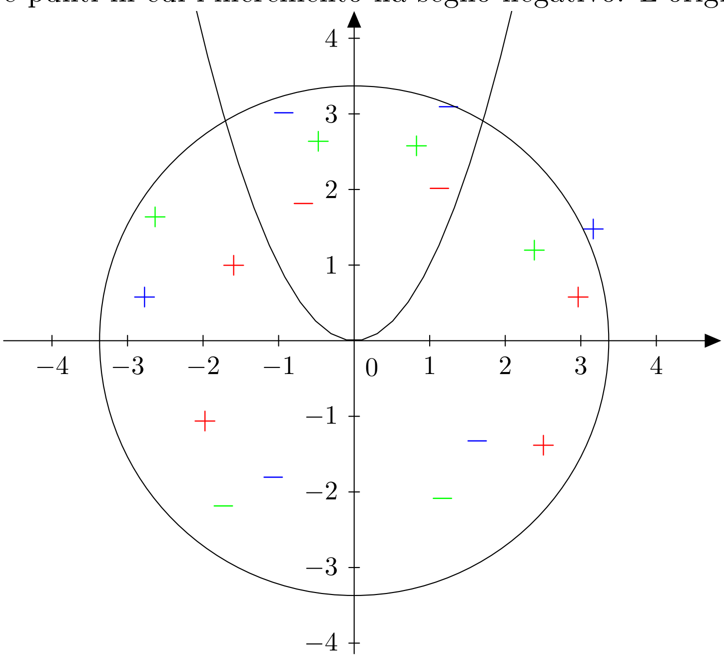
pertanto

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

che è una matrice semidefinita negativa. Allora proviamo a studiare il segno dell'incremento della funzione, cioè

$$\triangle f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = x^2y - y^2 = y(x^2 - y).$$

In figura è riportato il grafico dell'incremento con il suo segno: i segni in verde evidenziano il segno del termine y, i segni in rosso il segno del termine $x^2 - y$; in blu il segno complessivo del termine $y(x^2 - y)$; il cerchio rappresenta un tipico intorno dell'origine. Dal grafico si deduce quindi che in un generico intorno dell'origine cadono punti in cui l'incremento ha segno positivo e punti in cui l'incremento ha segno negativo. L'origine pertanto è un punto di sella.



✍ **Esercizio 1.9.10.**

Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione

$$f(x,y) = \sinh(x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2).$$

La funzione $f(x,y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ ed è composta dalle funzioni $\sinh t$ e $t = t(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2$. Poiché la funzione $\sinh t$ è strettamente crescente, i punti di estremo di $f(x,y)$ sono tutti e soli i punti di estremo di $t(x,y)$. (Notiamo che analoghe considerazioni possono essere fatte per funzioni del tipo $f(x,y) = e^{t(x,y)}$, $f(x,y) = (t(x,y))^3$ ecc...).
Si può studiare pertanto la funzione

$$t(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2.$$

La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e dunque gli eventuali punti di estremo libero di t devono anche essere punti critici, cioè punti che annullano il gradiente di t. Si ha

$$\frac{\partial t}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 8x \qquad \frac{\partial t}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 6y$$

dunque per trovare i punti critici devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 8x = 4x[x^2 - 2] = 0 \\ 3y^2 - 6y = 3y[y - 2] = 0. \end{cases}$$

Dunque i punti critici sono

$$(0,0) \qquad (0,2) \qquad (\pm\sqrt{2},0) \qquad (\pm\sqrt{2},2).$$

Per determinare la natura dei punti critici proviamo a calcolare la matrice Hessiana nei punti suddetti. Si ha

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 8 \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}(x,y) = 6y - 6.$$

Dunque

$$H_t(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_t(0,0) = 48 > 0$ mentre $t_{xx} < 0$. Questo implica che il punto $(0,0)$ è di massimo locale. D'altra parte

$$H_t(0,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_t(0,2) = -48 < 0$ e dunque $(0,2)$ è un punto di sella. Inoltre

$$H_t(\pm\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_t(\pm\sqrt{2}, 0) = -96 < 0$ e dunque anche $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sono punti di sella. Infine

$$H_t(\pm\sqrt{2}, 2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_t(\pm\sqrt{2}, 2) = 96 > 0$ mentre $t_{xx}(\pm\sqrt{2}, 2) = 16 > 0$ e dunque $(\pm\sqrt{2}, 2)$ sono punti di minimo locale.

✍ **Esercizio 1.9.11.**

Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione

$$f(x, y) = \sin(x + y) - \cos(x - y).$$

Si ha

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(x + y) - \cos(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y - \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ &= \sin x[\cos y - \sin y] - \cos x[\cos y - \sin y] = [\cos y - \sin y] \cdot [\sin x - \cos x] \\ &= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y - \sin y) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)\right] = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

A questo punto, visto che

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

si vede subito che il massimo di f è 2 ed è assunto in corrispondenza dei punti

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi h & h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

oppure in corrispondenza dei punti

$$\begin{cases} x = \frac{7}{4}\pi + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{3}{4}\pi + 2\pi h & h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Invece il minimo di f è -2 ed è assunto in corrispondenza dei punti

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{3}{4}\pi + 2\pi h & h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

oppure in corrispondenza dei punti

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{4}\pi + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi h & h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Per vedere se f non ha altri punti di estremo, si calcolano gli ulteriori punti critici di f risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ f_y(x,y) = -2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono i punti

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}\pi + \pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi h & h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

precedentemente trovati e i punti

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{3}{4}\pi + \pi h & h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

In tali punti f si annulla ed è facile vedere che cambia segno in ogni loro intorno. Questi punti sono perciò di sella.

✍ **Esercizio 1.9.12.**

Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione

$$f(x,y) = x^2(y-1)^3(z+2)^2.$$

La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 2x(y-1)^3(z+2)^2 = 0 \\ f_y(x,y,z) = 3x^2(y-1)^2(z+2)^2 = 0 \\ f_z(x,y,z) = 2x^2(y-1)^3(z+2) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono i punti dei piani $x = 0$, $y = 1$ e $z = -2$, cioè rispettivamente si ottengono i punti $(0,h,k), (l,1,k), (l,h,-2)$ con $l,h,k \in \mathbb{R}$. In tali punti f si annulla. Anziché ricorrere allo studio del differenziale secondo, è conveniente esaminare il segno di f in un intorno dei punti indicati. I punti $(l, 1, k)$ sono di sella in quanto attraversando il piano $y = 1$ f cambia segno. I punti $(0, h, k)$ e $(l, h, -2)$ sono di massimo locale per $h < 1$ in quanto f è negativa per $h < 1$ e di minimo locale per $h > 1$ in quanto f è positiva per $h > 1$.

✍ **Esercizio 1.9.13.**

Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$$

La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x = 0,\ y = 0,\ z = 0\})$.
I punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = -\dfrac{1}{x^2} + yz = 0 \\ f_y(x, y, z) = -\dfrac{1}{y^2} + xz = 0 \\ f_z(x, y, z) = -\dfrac{1}{z^2} + xy = 0. \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per x, la seconda equazione per y e sottraiamo. Si ottiene

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 0 \qquad \Rightarrow x - y = 0;$$

analogamente, se moltiplichiamo la seconda equazione per y, la terza equazione per z e sottraiamo, si ha

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0 \qquad \Rightarrow x = y = z.$$

Allora sostituendo questo risultato in una qualunque delle equazioni si ha rapidamente

$$-\frac{1}{x^2} + x^2 = 0 \qquad x^4 = 1.$$

Allora in definitiva i punti critici sono $(1, 1, 1)$ e $(-1, -1, -1)$. Per stabilire la natura di questi due punti critici proviamo il test della matrice Hessiana:

$$f_{xx}(x, y, z) = \frac{2}{x^3} \qquad f_{xy}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z) = z \qquad f_{yy}(x, y, z) = \frac{2}{y^3}$$

$$f_{zz}(x, y, z) = \frac{2}{z^3} \qquad f_{xz}(x, y, z) = f_{zx}(x, y, z) = y \qquad f_{yz}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z) = x.$$

Allora

$$H_f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2. \end{pmatrix}$$

I determinanti dei minori principali di Nord-Ovest sono rispettivamente

$$H_1 = 2 > 0 \qquad H_2 = 3 > 0 \qquad H_3 = 4 > 0$$

quindi $(1,1,1)$ è punto di minimo locale per f. Invece

$$H_f(-1,-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2. \end{pmatrix}$$

I determinanti dei minori principali di Nord-Ovest sono rispettivamente

$$H_1 = -2 < 0 \qquad H_2 = 3 > 0 \qquad H_3 = -4 < 0$$

quindi $(-1,-1,-1)$ è punto di massimo locale per f. Questo risultato poteva essere previsto dato che $f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$.

✍ **Esercizio 1.9.14.**

Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione

$$f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3.$$

La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e dunque gli eventuali punti di estremo libero di f devono anche essere punti critici, cioè punti che annullano il gradiente di f. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - x^4 2y - x^3 3y^2$$

dunque per trovare i punti critici devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2y^2[3 - 4x - 3y] = 0 \\ x^3y[2 - 2x - 3y] = 0. \end{cases}$$

Dunque tra i punti critici ci sono sicuramente

$$(k,0) \qquad (0,h) \qquad \text{con } k,h \in \mathbb{R}.$$

Inoltre bisogna vedere se si può risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3 - 4x - 3y = 0 \\ 2 - 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ammette come soluzione il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. Alla fine i punti critici sono:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \qquad (k, 0) \qquad (0, h) \qquad \text{con } k, h \in \mathbb{R}.$$

Per determinare la natura dei punti critici proviamo a calcolare la matrice Hessiana nei punti suddetti. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial x}(x, y) = 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y.$$

Dunque

$$H_f(k, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k^3 - 2k^4 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_f(k, 0) = 0$ e il test della matrice Hessiana si rivela inefficace per studiare la natura di questi punti. Siccome $f(k, 0) = 0$, possiamo provare a studiare il segno di

$$\triangle f(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3 = x^3y^2[1 - x - y].$$

In figura in azzurro è evidenziata la regione in cui f ha segno positivo, in rosa la regione in cui f ha segno negativo. Da ciò si deduce immediatamente che i punti $(k, 0)$ per $k > 1 \vee k < 0$ sono punti di massimo locale visto che è sempre possibile trovare un intorno di questi punti in cui f sia sempre positiva. Allo stesso modo è facile vedere che se $0 < k < 1$ i punti $(k, 0)$ sono di minimo locale in quanto si riesce a trovare un intorno di questi punti in cui f è negativa. Analogamente si vede che i punti $(0, h)$ e $(1, 0)$ sono punti di sella visto che in ogni loro intorno ci sono sia punti in cui f è positiva che punti in cui f è negativa. Infine per il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ si può provare il test della matrice Hessiana. Si ha

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{72} \end{pmatrix}$$

e dunque essendo $f_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ e Det $H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) > 0$ si ha che il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ è un punto di massimo locale.

✍ **Esercizio 1.9.15.**

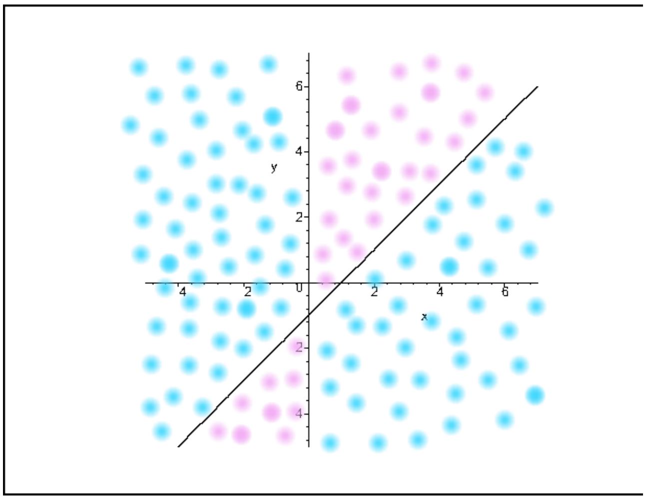


Figura 1.1: Grafico che evidenza il segno di f.

Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione

$$f(x,y) = |xy|(x+y-1).$$

Dimostriamo che f non è differenziabile nei punti $(0,h)$ e $(k,0)$ con $h,k \in \mathbb{R}$ (tranne che nei punti $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$ in cui invece è differenziabile). Infatti se ci troviamo nel primo o nel terzo quadrante (assi esclusi) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy - x$$

mentre se ci troviamo nel secondo o nel quarto quadrante (assi esclusi) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy - y^2 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2 - 2xy + x.$$

D'altra parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,h)-f(0,h)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|th|(t+h-1)}{t}$$

dunque se $h = 0$ oppure $h = 1$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = 0,$$

negli altri casi il limite precedente non esiste e dunque la derivata parziale rispetto a x non esiste. Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(k,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(k,t)-f(k,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|kt|(k+t-1)}{t}$$

dunque se $k = 0$ oppure $k = 1$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(k,0) = 0,$$

negli altri casi il limite precedente non esiste e dunque la derivata parziale rispetto a y non esiste. Quindi di sicuro i punti $(0,h)$ e $(k,0)$ con $k,h \neq 0,1$ sono punti di non differenziabilita' per f. Invece in $(0,0)$ si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|(h+k-1)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

La stessa cosa avviene nei punti $(1,0)$ e $(0,1)$ che dunque sono punti di differenziabilità per f. Dopo questa analisi passiamo a considerare i punti critici per f. Supponiamo di essere nel primo o nel terzo quadrante (compresi i punti degli assi cartesiani in cui f risulta differenziabile). I punti critici devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ x^2 + 2xy - x = 0 \end{cases}$$

che ci dà come soluzioni i punti $(0,0), (0,1), (1,0)$ e il punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Se invece ci troviamo nel secondo o nel quarto quadrante il sistema che dobbiamo risolvere è lo stesso quindi non riusciamo a trovare ulteriori punti critici.

Per l'ultimo punto si può applicare il test della matrice Hessiana e si ha

$$f_{xx}(x,y) = 2y \qquad f_{xy}(x.y) = 2x + 2y - 1 \qquad f_{yy}(x,y) = 2x$$

dunque

$$H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ed essendo $f_x x\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) > 0$ e Det $H_f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} > 0$ si ha che il punto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ è un punto di minimo locale.
Per i primi 3 punti non può essere applicato il test della matrice Hessiana perché bisognerebbe avere almeno f di classe $\mathcal{C}^2(A)$ con A intorno aperto di uno dei tre punti e ciò ovviamente non è vero. Allora per questi 3 punti e per gli altri punti degli assi cartesiani, che sono punti di non differenziabilità per f, occorre studiarne la natura osservando il segno dell'incremento di f, o meglio il segno di f visto che f sugli assi cartesiani vale 0. In figura la zona arancione

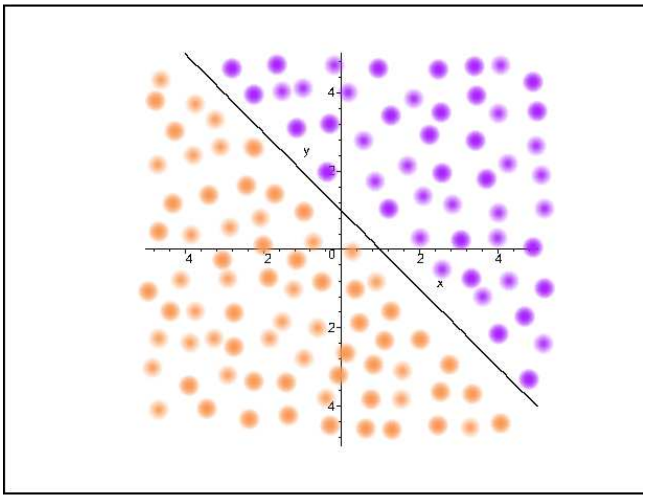


Figura 1.2: Grafico che evidenza il segno di f.

evidenzia la regione in cui f ha segno negativo mentre la zona viola evidenzia la regione in cui f ha segno positivo. Quindi questo implica che se $h > 1$ c'è un intorno del punto $(0,h)$ che sta tutto nel semipiano $y > -x+1$ dove f è positiva. Quindi tutti i punti $(0,h)$ sono tutti punti di minimo locale. Ragionando in modo analogo si trova che i punti $(0,h)$ con $h < 1$ sono tutti punti di massimo locale, i punti $(1,0)$ e $(0,1)$ sono punti di sella, i punti $(k,0)$ con $k > 1$ sono punti di minimo locale e infine i punti $(0,k)$ sono punti di massimo locale.

✍ **Esercizio 1.9.16.**

Si determinino gli eventuali punti di estremo locale e globale della funzione

$$f(x,y) = 4y^2 - 4x^2y^2 - y^4.$$

La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. I punti critici si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -8xy^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 8y - 8x^2y - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

che ci dà come soluzioni i punti $(k,0)$ con $k \in \mathbb{R}$ e i punti $(0, \pm\sqrt{2})$. Proviamo il test della matrice Hessiana. Si ha

$$f_{xx}(x,y) = -8y^2 \qquad f_{xy} = -16xy \qquad f_{yy}(x,y) = 8 - 8x^2 - 12y^2$$

ma per i punti $(k,0)$ si ha Det $H_f(k,0) = 0$ e quindi il test della matrice Hessiana è inefficace. Occorre studiare il segno di

$$\triangle f(x,y) = f(x,y) - f(k,0) = f(x,y) = y^2[4 - 4x^2 - y^2].$$

In figura la zona azzurra è la regione in cui f ha segno positivo mentre la zona verde è la regione in cui f ha segno negativo. Da ciò si deduce che se $|k| > 1$ i punti $(k,0)$ sono di massimo locale per f mentre se $|k| < 1$ i punti $(k,0)$ sono punti di minimo locale. Inoltre i punti $(\pm 1, 0)$ sono di sella.
Infine per i punti $(0, \pm\sqrt{2})$ si può provare il test della matrice Hessiana e si ottiene

$$H_f(0, \pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$$

e quindi i punti $(0, \pm\sqrt{2})$ sono punti di massimo locale. Vogliamo mostrare che sono anche punti di massimo globale per f. Basta far vedere che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$f(x,y) - 4 \leq 0$$

ma questo è vero perché

$$f(x,y) - 4 = 4y^2 - 4x^2y^2 - y^4 - 4 = -4x^2y^2 - (y^2 - 2)^2 \leq 0.$$

Dunque f è limitata superiormente. Invece

$$\lim_{(x,y)\to(-\infty,1)} f(x,y) = -\infty$$

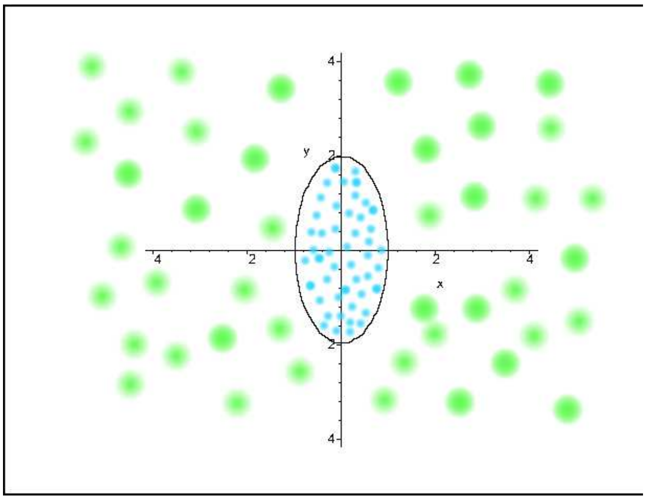


Figura 1.3: Grafico che evidenza il segno di f.

quindi

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty.$$

Quindi non ci sono punti di minimo globale ed f non è limitata inferiormente.

✍ **Esercizio 1.9.17.**

Si determinino gli eventuali punti di estremo locale e globale della funzione

$$f(x,y) = e^{x^4-4x^2y+3y^2}.$$

La funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ ed è data dalla composizione della funzione e^x con $g(x,y) = x^4 - 4x^2y + 3y^2$. Essendo la funzione esponenziale crescente, i punti stazionari di f sono tutti e soli quelli di g. Quindi occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 4x^3 - 8xy = 0 \\ g_y(x,y) = -4x^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

che ci dà come unica soluzione l'origine $(0,0)$. Studiamo il segno di

$$\triangle g(x,y) = g(x,y) - g(0,0) = x^4 - 4x^2y + 3y^2.$$

Se ci muoviamo lungo la curva $y = 2x^2$ si ha

$$g(x,2x^2) = x^4 - 8x^4 + 6x^4 = -x^4 \leq 0$$

mentre se ci spostiamo lungo la curva $y = \dfrac{x^2}{3}$ si ottiene

$$x^4 - \frac{4}{3}x^4 + x^4 = \frac{2}{3}x^4 > 0$$

e dunque l'origine è un punto di sella.
D'altra parte non ci sono estremi globali per f nel senso che ad esempio

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,0)} f(x,y) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,2x^2) = 0$$

quindi f non è limitata superiormente mentre è limitata inferiormente ma $0 = \inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$ e non è un minimo.

1.10. Esercizi proposti

N.B. *si presentano qui esercizi di cui, per brevità, si dà solo un suggerimento della soluzione o il risultato finale (la scritta "Hint" significa appunto "suggerimento"). Lo studente tenga presente che questo non è il modo di procedere che si pretende in sede d'esame e si rimanda alle sezioni precedenti per esempi di esercizi con svolgimento completo.*

✍ **Esercizio 1.10.1.**

Studiare, al variare di k, le forme quadratiche

$$(a) q_1(x,y) = k^2x^2 + (k+1)y^2 + 12xy,$$
$$(b) q_2(x,y,z) = -x^2 + y^2 + 2z^2 + 2kxz + 2yz$$

R. Hint: (a) Mi metto nel caso $k \neq 0$, dunque $a = k^2 > 0 \forall k$. Abbiamo $\det A =$

$(k-3)(k^2+4k+12)$. Quindi per $k>3$ ho $\det A>0$, mentre per $k<3$ ho $\det A<0$. Di conseguenza:
a) $k>3$: definita positiva
b) $k<3$: indefinita
c) $k=3$: $\det A=0$, $a>0$, quindi semidefinita positiva
d) $k=0$: La matrice è (per righe) $(0,6),(6,1)$, dunque $c=1>0$ e $\det A=-36<0$, quindi indefinita (vedi anche sopra).
La f.q. non è mai definita negativa.

✍ **Esercizio 1.10.2.**

Studiare i punti di massimo e minimo delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
&a) f(x,y)=yxe^{-x^2-y^2}\\
&b) f(x,y)=x^4+y^4-3(x-y)^2\\
&c) f(x,y)=x^2+y^2+x^3y\\
&d) f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)-3xy\\
&e) f(x,y)=e^{-2(x^2+y^2)}+x^2+y^2\\
&f) f(x,y)=xy^2e^{-x^4-y^2}\\
&g) f(x,y)=x^3-x^2y\\
&h) f(x,y)=(\sin x)^2+\cos y
\end{aligned}$$

Hint. a)

$$\nabla f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(y(1-2x^2),x(1-2y^2)).$$

Punti critici:

$$O=(0,0)\quad A=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad B=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad C=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad D=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Derivate seconde:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y)&=-2xye^{-x^2-y^2}(3-2x^2)\\
f_{xy}(x,y)&=f_{yx}(x,y)=(1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}\\
f_{yy}(x,y)&=-2xye^{-x^2-y^2}(3-2y^2)
\end{aligned}$$

Si ottiene

$$H_f(A)=H_f(D)=\begin{bmatrix}-2/e & 0\\ 0 & -2/e\end{bmatrix}$$

quindi A e D sono punti di massimo locale. Inoltre

$$H_f(B) = H_f(C) = \begin{bmatrix} 2/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{bmatrix}$$

quindi B e C sono punti di minimo locale.
Infine

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi l'origine è un punto di sella.
Curiosità (difficile): I massimi e minimi locali trovati sono anche assoluti. Infatti si può dimostrare che

$$f(B) = f(C) = -\frac{1}{2e} \leq f(x,y) \leq \frac{1}{2e} = f(A) = f(D).$$

Infatti si ottiene

$$e^x \geq x+1 \Rightarrow e^{t-1} \geq t \Rightarrow e^{x^2+y^2} \geq (x^2+y^2)e \geq 2xye \Rightarrow f(x,y) \leq \frac{1}{2e}$$

e analogamente per l'altra disuguaglianza.

b)

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 6(x-y), 4y^3 + 6(x-y)).$$

Punti critici (sommando le due equazioni m.a.m. si ottiene $x = -y$ che sostituita in una delle due equazioni dà i punti critici)

$$O = (0,0) \qquad A = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \qquad B = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

Derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 6 \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6 \qquad f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 6$$

quindi

$$H_f(A) = H_f(B) = \begin{bmatrix} 102 & 6 \\ 6 & 102 \end{bmatrix}$$

quindi i punti A e B sono punti di minimo locale. L'origine è un punto di sella (test della matrice Hessiana fallisce). Studio del segno dell'incremento:

$$\triangle f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - 3(x-y)^2.$$

Se $x = y$ allora $\triangle f(0,0) = 2x^4 \geq 0$; se $x = -y$ allora $\triangle f(x,y) = 2x^2[x^2 - 6]$ che ha segno negativo in un intorno dell'origine.

Curiosità (difficile): Non ci sono massimi assoluti (perché se ci fossero stati, li avremmo individuati annullando il gradiente) e comunque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = +\infty.$$

Invece i minimi locali trovati sono anche minimi assoluti. Infatti $f(A) = f(B) = -18$ e quindi è sufficiente dimostrare che $f(x,y) \geq -18$, fatto vero come mostra la seguente catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned} f(x,y)+18 &= x^4+y^4-3(x-y)^2+18 = x^4+y^4-6x^2+3x^2-6y^2+3y^2+6xy+9+9 \\ &= (x^4-6x^2+9)+(y^4-6y^2+9)+3(x^2+2xy+y^2) \\ &= (x^2-3)^2+(y^2-3)^2+3(x+y) \geq 0. \end{aligned}$$

c) $\nabla f(x,y) = (2x+3x^2y, 2y+x^3)$.
Uguagliando a zero, per trovare i punti critici si procede nel seguente modo: ricavando la y nella seconda equazione e sostituendo nella prima si ottiene $4x-3x^5=0$ da cui $x=0$ che corrisponde a $y=0$ oppure $x^4=4/3$ che corrisponde a $x^2=\pm\sqrt{4/3}$ di cui la soluzione con il meno non è accettabile e dunque $x=\pm\sqrt[4]{4/3}$ a cui corrisponde la $y=\mp\frac{1}{2}\sqrt[4]{(\frac{4}{3})^3}$.
Derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y)=2+6xy \qquad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=3x^2 \qquad f_{yy}(x,y)=2$$

da cui

$$H_f(0,0)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

per cui l'origine è un punto di minimo. D'altra parte, notando che in ogni caso $xy=-2/3$ e $x^2=\sqrt{4/3}$ si ottiene

$$H_f\left(\pm\sqrt[4]{\frac{4}{3}}, \mp\frac{1}{2}\sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

per cui entrambi i punti considerati sono di sella.
Si nota che ovviamente non ci sono massimi assoluti (per altro $\lim_{x\to+\infty} f(x,0)=+\infty$). Non ci sono nemmeno minimi assoluti: infatti ad esempio

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,-x) = \lim_{x\to+\infty}(2x^2-x^4) = -\infty.$$

d)

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}-3y, \frac{2y}{1+x^2+y^2}-3x\right) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2x-3y-3x^2y-3y^3=0 \\ 2y-3x-3x^3-3xy^2=0. \end{cases}$$

Sommando m.a.m. le due equazioni si ottiene

$$\begin{aligned} & 2x+2y-3y-3x-3x^2y-3x^3-3y^3-3xy^2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & -(x+y)-(x+y)^3-2(x^3+y^3)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+y)[1+x^2+y^2+2xy-2x^2-2y^2-2xy]=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+y)[1-x^2-y^2]=0. \end{aligned}$$

Dalla legge di annllamento del prodotto si ottiene $x=-y$ oppure $x^2+y^2=1$. Nel primo caso, sostituendo in una delle equazioni ottenute all'inizio si ottiene solamente l'origine (perché l'altro fattore è sempre positivo). Nel secondo caso si riscrive il sistema in questo modo

$$\begin{cases} 2x-3y-3y[x^2+y^2]=0 \\ 2y-3x-3x[x^2+y^2]=0 \end{cases}$$

per cui sostituendo in entrambe $x^2+y^2=1$ si ottiene di nuovo solo l'origine. Quindi concludendo l'origine è l'unico punto critico per f. Vediamo anche se è estremante.
Derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y)=\frac{2-2x^2+2y^2}{1+x^2+y^2}\quad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-\frac{4xy}{1+x^2+y^2}-3\quad f_{yy}(x,y)=\frac{2+2x^2-2y^2}{1+x^2+y^2}$$

quindi

$$H_f(0,0)=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

quindi l'origine è un punto di sella. Non ci sono punti di estremo assoluto (altrimenti li avremmo trovati tra i punti critici). Per altro, facendo il limite a $+\infty$ della restrizione di f sulle curve $x=y$ e $x=-y$ si ottiene che la funzione non è limitata né superiormente né inferiormente.

e) La funzione è a simmetria radiale: infatti ponendo $x^2+y^2=r$ essa diventa una funzione di una variabile $g(r)=e^{-2r}+r^2$ per $r\geq 0$ che si può studiare con i metodi dell'Analisi I. Risulta che non esiste il massimo assoluto, l'origine è un punto di massimo relativo e la circonferenza $x^2+y^2=\log\sqrt{2}$ è una curva di punti di minimo assoluto.

f) Si ha

$$\nabla f(x,y)=\left(e^{-x^4-y^2}y^2[1-4x^4],e^{-x^4-y^2}2xy[1-y^2]\right).$$

Se si annulla il gradiente di f si vede subito che $y=0$ soddisfa entrambe le equazioni <u>per ogni valore di x</u> quindi $y=0$ è un'intera retta di punti critici. Invece se $y\neq 0$ allora si trova $x^4=1/4$ a cui corrisponde $y^2=1$ quindi ci sono i seguenti ulteriori punti critici

$$A=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)\qquad B=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)\qquad C=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)\qquad D=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right).$$

Derivate seconde:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= e^{-x^4-y^2}4x^3y^2[4x^4-5]\\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = e^{-x^4-y^2}2y[1-y^2][1-4x^4]\\
f_{yy}(x,y) &= e^{-x^4-y^2}2x[1-5y^2+2y^4].
\end{aligned}
$$

Quindi, notando che se $x^4 = 1/4$ e $y^2 = 1$ si ha $e^{-x^4-y^2} = e^{-5/4}$ e che inoltre in tali casi $f_{xy} = f_{yx} = 0$, si ha

$$H_f(A) = H_f(C) = e^{-5/4}\begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix};$$

quindi A e C risultano punti di massimo. Invece

$$H_f(B) = H_f(D) = e^{-5/4}\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix};$$

dunque B e D risultano punti di minimo.
Per quanto riguarda invece la retta $y = 0$, si vede facilmente che il test della matrice Hessiana fallisce. Studiando il segno dell'incremento si ha che esso coincide con il segno della funzione, la quale è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Quindi tutti i punti del tipo $(x_0, 0)$ con $x_0 > 0$ sono punti di minimo locale; tutti i punti del tipo $(x_0, 0)$ con $x_0 < 0$ sono punti di massimo locale e infine l'origine è un punto di sella.
Con metodi analoghi a quelli accennati per la funzione al punto a) si può dimostrare che la funzione data è limitata e che i punti trovati prima di massimo e minimo locale sono in realtà di massimo e minimo assoluto.

g) $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 2xy, -x^2) = (0,0)$ se e solo se $x = 0$ per ogni y. Si ha che $\triangle f(0,y) = f(x,y) - f(0,y) = x^3 - x^2y = x^2(x-y)$. Quindi il segno di f (e quindi dell'incremento nella retta di punti critici $x = 0$) coincide con il segno del termine $x - y$. Quindi tutti i punti del tipo $(0, y_0)$ con $y_0 > 0$ sono punti di massimo locale; tutti i punti del tipo $(0, y_0)$ con $y_0 < 0$ sono punti di minimo locale e infine l'origine è un punto di sella. Non ci sono estremi globali: basta considerare ad esempio $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$.

h) Per semplicità ci restringiamo a considerare i punti nell'intervallo $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.
Si ha

$$\nabla f(x,y) = (2\sin x\cos x, -\sin y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; \sin(2x) = 0 \;\wedge\; \sin y = 0.$$

Quindi i punti critici che cadono nell'intervallo considerato sono

$$\begin{aligned} A_1 &= (0,0) \qquad B_1 = (0,\pi) \\ A_2 &= (\pi/2,0) \qquad B_2 = (\pi/2,\pi) \\ A_3 &= (\pi,0) \qquad B_3 = (\pi,\pi) \\ A_4 &= (3/2\pi,0) \qquad B_4 = (3/2\pi,\pi) \end{aligned}$$

Derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y) = 2\cos(2x) \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0 \qquad f_{yy}(x,y) = -\cos y$$

dunque

$$H_f(A_1) = H_f(A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad H_f(B_1) = H_f(B_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$H_f(A_2) = H_f(A_4) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad H_f(B_2) = H_f(B_4) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Riassumendo: A_1, A_3, B_2, B_4 sono punti di sella; B_1, B_3 sono punti di minimo locale; A_2, A_4 sono punti di massimo locale. Si dimostra facilmente che i punti di massimo e minimo locale sono anche punti di massimo e minimo assoluto.

✍ **Esercizio 1.10.3.**

Assegnata la funzione

$$f(x,y) = \log \frac{x+1}{x+y}.$$

a) Disegnare il dominio, specificando se è aperto, chiuso, né aperto, né chiuso.
b) Verificare se esiste il piano tangente alla superficie $z = f(x,y)$ nel punto $(1,1,f(1,1))$ e in caso affermativo, scrivere l'equazione di tale piano.
c) Determinare i punti stazionari di f e stabilirne la natura.

Hint. a) Il dominio è dato dalla condizione di esistenza del logaritmo

$$\frac{x+1}{x+y} > 0$$

in cui si tiene conto della condizione di esistenza del denominatore $x+y \neq 0$. Quindi il dominio è dato dall'unione di due aperti:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+y > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1 < 0 \\ x+y < 0 \end{cases}$$

Quindi si tratta di un insieme aperto (e pertanto non chiuso), non limitato e non connesso perché $(-1, 1)$ non vi appartiene.

b) La funzione è ben definita e derivabile (e anche differenziabile) in un intorno del punto $(1, 1)$ quindi ha senso calcolare il piano tangente. Si ha $f(1, 1) = 0$. Inoltre posto

$$g(x) = f(x, 1) = \log\frac{x+1}{x+1} = 0 \qquad h(y) = f(1, y) = \log\left(\frac{2}{1+y}\right)$$

si ha

$$f_x(1, 1) = 0 \qquad f_y(1, 1) = h'(1) = -\frac{1}{2}$$

dunque il piano tangente cercato è $z = -\frac{1}{2}(y-1)$ ossia $y + 2z = 1$.

c) Si ha

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y-1}{(x+1)(x+y)}, -\frac{1}{x+y}\right)$$

dunque il gradiente non si annulla mai e pertanto non esistono punti stazionari o critici per f.

✍ **Esercizio 1.10.4.**

Controllare che l'origine è un punto critico per la funzione

$$f(x, y) = \log(1 + x^2) - x^2 + xy^2 + y^3 + 2$$

e poi determinarne la natura.

➻ **Hint.** Basta verificare che $(0, 0)$ annulla il gradiente di f. Infatti si ha

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{1+x^2} - 2x + y^2, 2xy + 3y^2\right)$$

che si vede subito che si annulla nell'origine. Quindi l'origine è un punto critico per f (si verifica essere l'unico punto critico).
Si vede facilmente che il test della matrice Hessiana fallisce per l'origine. D'altra parte

$$\triangle f(0, 0) = f(x, y) - f(0, 0) = \log(1 + x^2) - x^2 + xy^2 + y^3.$$

Per studiare il segno dell'incremento di f in un intorno dell'origine basta osservare che per $x = 0$, si ha $\triangle f(0, 0) = y^3$ e questo ha segno positivo per $y > 0$ e negativo altrimenti. L'origine quindi è un punto di sella per f.

✍ **Esercizio 1.10.5.**

Determinare gli estremi liberi della funzione

$$f(x,y) = \frac{4}{y} - 2\frac{y}{x} - 2x + y^2.$$

Hint: $f \in \mathcal{C}^\infty(E)$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0\}$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left(2\frac{y}{x^2} - 2, -\frac{4}{y^2} - \frac{2}{x} + 2y\right) = (0,0).$$

Dalla prima equazione si ricava $y = x^2$ che sostituita nella seconda dà $x^6 - x^3 - 2 = 0$ da cui $x = -1$ e $x = \sqrt[3]{2}$. Quindi i punti critici sono $P_1(-1,1)$ e $P_2(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. Si ha inoltre

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{4y}{x^3} \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{2}{x^2} \qquad f_{yy}(x,y) = \frac{8}{y^3} + 2$$

quindi P_1 è un punto di minimo relativo e P_2 è punto di sella.

✍ **Esercizio 1.10.6.**

Sia $f(x,y) = y(x + x^2 + 2y)$. Trovare gli eventuali estremi relativi di f in $\mathbb{R}^2$. f ammette massimo o minimo assoluti in $\mathbb{R}^2$?

Hint: Si ha

$$\nabla f(x,y) = (y(1+2x), x+x^2+4y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0), \ \ (x,y) = (-1,0) \ \ (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$$

Chiamiamo

$$A = (0,0), \qquad B = (-1,0) \qquad C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right).$$

Si ha

$$f_x x(x,y) = 2y \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1 + 2x \qquad f_{yy}(x,y) = 4$$

quindi A e B sono punti di sella, C è punto di minimo relativo. Non si sono massimi né minimi assoluti. Infatti

$$\lim_{y \to \pm\infty} f(0,y) = +\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x,1) = +\infty.$$

✍ **Esercizio 1.10.7.**

La funzione

$$p = p(x, y) = y^3 - 3xy + 3x^2 - 1$$

rappresenta la pressione atmosferica in una giornata di sole.
a) Trovare i punti stazionari della pressione.
b) Determinare se i punti stazionari sono anche punti di massimo o minimo per la pressione.
c) Determinare se i massimi e i minimi trovati sono *locali* (proprietà che vale nell'intorno) o se sono anche *globali* (proprietà che vale in tutto il dominio della funzione).

Hint: i punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} p_x(x, y) = -3y + 6x = 0 \\ p_y(x, y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene $x = 0$ oppure $x = 1/4$ quindi i punti stazionari sono $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.
Si ha inoltre

$$p_{xx}(x, y) = 6 \qquad p_{xy}(x, y) = -3 \qquad p_{yy}(x, y) = 6y$$

quindi P_0 è punto di sella mentre P_1 è punto di minimo relativo. Si tratta di un punto di minimo relativo e non assoluto perché $p(0, y) = y^3 - 1$ che non è limitata.

✍ **Esercizio 1.10.8.**

Determinare gli estremi relativi delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} &1) f(x, y) = e^x(x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 \\ &2) f(x, y) = \frac{y^2}{4} - (y + 1)\cos x \\ &3) f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ &4) f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^4 \\ &5) f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ &6) f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Hint: 1) i punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = e^x x(y - 1) = 0 \\ f_y(x, y) = e^x(x - 1) + 2(y - 1) = 0. \end{cases}$$

La prima equazione ha come soluzione $x = 0$ oppure $y = 1$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione si trova $y = \frac{3}{2}$. Sostituendo $y = 1$ si trova $x = 1$. Quindi i punti critici sono

$$A = \left(0, \frac{3}{2}\right) \qquad B = (1, 1).$$

Si ha inoltre

$$f_{xx}(x, y) = e^x(x + 1)(y - 1) \qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = e^x x \qquad f_{yy}(x, y) = 2.$$

Quindi A è punto di minimo relativo mentre B è punto di sella.

2) i punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = (y + 1)\sin x = 0 \\ f_y(x, y) = \dfrac{y}{2} - \cos x = 0. \end{cases}$$

La funzione è periodica in x quindi possiamo limitarci a considerare $x \in [0, 2\pi)$. La prima equazione ha come soluzione $y = -1$ oppure $x = 0$ oppure $x = \pi$. Sostituendo $y = -1$ nella seconda equazione si trova $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$. Sostituendo $x = 0$ si trova $y = 2$. Sostituendo $x = \pi$ si trova $y = -2$. Dunque i punti critici sono

$$A = \left(\frac{2}{3}\pi, -1\right) \qquad B = \left(\frac{4}{3}\pi, -1\right) \qquad C = (0, 2) \qquad D = (\pi, -2).$$

Si ha inoltre

$$f_{xx}(x, y) = (y + 1)\cos x \qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \sin x \qquad f_{yy}(x, y) = \frac{1}{2}.$$

Quindi i punti A e B sono punti di sella mentre gli altri sono punti di minimo relativo.

3) i punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(y - x^2 y) = 0 \\ f_y(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(x - x y^2) = 0. \end{cases}$$

I punti critici sono: $(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$. Siccome si ha

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= xy(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ f_{yy}(x, y) &= xy(y^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \end{aligned}$$

allora si vede facilmente che $(0, 0)$ è punto di sella; $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ sono punti di massimo relativo mentre $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ sono punti di minimo relativo.

4) i punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 - y^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y(2y^2 - x) = 0. \end{cases}$$

quindi i punti critici sono $(0,0)$ e $\left(\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. Visto che si ha

$$f_{xx}(x,y) = 6x \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2y \qquad f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 2x$$

allora l'origine risulta un punto di sella mentre gli altri sono punti di minimo.

5) L'origine è l'unico punto critico. Si ha che: $f(0,0) = 0$ e $f(x,0) = x^4 \geq 0$ mentre $f(x,x) = -4x^4 \leq 0$, dunque l'origine è un punto di sella, in quanto in ogni intorno dell'origine la funzione assume valori positivi e negativi.

6) Per simmetria possiamo limitare lo studio al primo quadrante. I punti critici sono $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$. Si verifica che $(0,0)$ è un punto di massimo, $(1,0)$ e $(0,1)$ sono punti di sella, $(1,1)$ è punto di minimo. Per simmetria si deduce che $(-1,0)$ e $(0,-1)$ sono punti di sella, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ sono punti di minimo.

✍ **Esercizio 1.10.9.**

Determinare la minima distanza della curva di equazione $y = \frac{16}{x^2}$ dall'origine.

Hint: Il quadrato della distanza dell'origine dal generico punto della curva $(x, 16/x^2)$ vale

$$x^2 + \frac{16^2}{x^4}.$$

Si tratta allora di trovare il minimo della funzione

$$f(x) = x^2 + \frac{256}{x^4}.$$

La derivata di f si annulla in $x = \pm\sqrt[6]{\frac{4^5}{2}} = \pm 2\sqrt{2}$ e pertanto la distanza minima vale $d = 2\sqrt{3}$.

✍ **Esercizio 1.10.10.**

Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = e^x - \lambda x + y^2$$

ha massimo o minimo relativo?

Hint: I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^x - \lambda = 0 \\ f_y(x,y) = 2y = 0. \end{cases}$$

Se $\lambda > 0$ il sistema ha la soluzione $(\log \lambda, 0)$ ed essendo

$$f_{xx}(x,y) = e^x \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0 \qquad f_{yy}(x,y) = 2$$

si verifica che $(\log \lambda, 0)$ è un punto di minimo relativo per f.

✍ **Esercizio 1.10.11.**

Sia $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Calcolare tutte le derivate parziali fino al secondo ordine della funzione $f(x,y) = g(xy)$. Verificare che l'origine è un punto critico per f qualunque sia g; trovare una condizione sufficiente su g affinché l'origine sia un punto di sella.

Hint: Si ha

$$f_x(x,y) = yg'(xy) \qquad f_y(x,y) = xg'(xy)$$

e inoltre

$$f_{xx}(x,y) = y^2 g''(xy) \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = g'(xy) + xyg''(xy) \qquad f_{yy}(x,y) = x^2 g''(xy)$$

quindi l'origine è un punto critico per f perché le due derivate parziali si annullano nell'origine. Il determinante della matrice Hessiana di f nell'origine vale $-g'(0)^2$ dunque se $g'(0) \neq 0$ allora l'origine è un punto di sella.

✍ **Esercizio 1.10.12.**

Sia

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

a) Determinare l'insieme di definizione D di f. b) Determinare le curve di livello di f. c) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie grafico di f nel punto $(1,0,1)$. Qual è la direzione di massima crescita di f nel punto $(1,0)$? d) Mostrare che f non ha estremi locali.

Hint: a) Si ha

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| < y < |x|\}.$$

b) Le curve di livello hanno equazione

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{c^2} \qquad c > 0$$

e si tratta di iperboli equilatere.
c) Si ha

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}} \qquad f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}$$

dunque il piano tangente ha equazione $x + z = 2$. La direzione di massima crescita è quella del gradiente

$$\frac{(-1,0)}{\sqrt{2}}.$$

d) Siccome le derivate parziali non si annullano mai in D, allora la funzione non ha estremi.

✍ **Esercizio 1.10.13.**

> Sia $f(x,y) = x^4 - x^2y^2$. a) Trovare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo di f in $\mathbb{R}^2$. b) Dire se f ammette massimo e minimo assoluti in $\mathbb{R}^2$.

Hint: a) I punti critici sono quelli dell'asse y. Studiando il segno della funzione

$$f(x,y) = x^2(x^2 - y^2) \geq 0 \qquad -|x| \leq y \leq |x|$$

di ottiene che l'origine è un punto di sella mentre gli altri punti dell'asse y sono punti di massimo relativo. b) Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x,x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^4 - x^6 = -\infty$$

quindi f non ha né massimo né minimo assoluti in $\mathbb{R}^2$.

✍ **Esercizio 1.10.14.**

Studiare la natura degli eventuali punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ delle seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
&1) f(x,y) = 3x^2 - 2y^2\\
&2) f(x,y) = (y-2)\, e^{xy}\\
&3) f(x,y) = (x+1)\, e^{-xy}\\
&4) f(x,y) = e^{y}\,(x^2+1) - y\\
&5) f(x,y) = 3x^2y - y^3 + x^2\\
&6) f(x,y) = 3y^3 - x^2y - x^2\\
&7) f(x,y) = -4xy + 4x\\
&8) f(x,y) = 4y + 4xy\\
&9) f(x,y) = \log(1 + y^2 - xy + 2x^2)\\
&10) f(x,y) = \log(1 + 4y^2 - 2xy + x^2)\\
&11) f(x,y) = 2y^2 + x^2 - y\\
&12) f(x,y) = \arctan(3x^2 + y^2)\\
&13) f(x,y) = -8x^2 - 2y^2 - 2xy + 2
\end{aligned}
$$

R.

$$
\begin{aligned}
&1)(0,0)\ \text{ sella}\\
&2)(1/2,0)\ \text{ sella}\\
&3)(0,1)\ \text{ sella}\\
&4)(0,0)\ \text{ minimo}\\
&5)(0,0)\ \text{ sella},\ \ (-1/3,-1/3)\ \text{ sella},\ \ (1/3,-1/3)\ \text{ minimo}\\
&6)(0,0)\ \text{ sella},\ \ (3,-1)\ \text{ sella},\ \ (-3,-1)\ \text{ sella}\\
&7)(0,1)\ \text{ sella}\\
&8)(-1,0)\ \text{ sella}\\
&9)(0,0)\ \text{ minimo}\\
&10)(0,0)\ \text{ minimo}\\
&11)(0,4)\ \text{ minimo}\\
&12)(0,0)\ \text{ minimo}\\
&13)(0,0)\ \text{ massimo}
\end{aligned}
$$

1.11. Esercizi proposti (senza soluzione)

N.B. *si presentano qui esercizi senza soluzione. Sarò grata agli studenti che vorranno inviarmi copia della loro soluzione.*

✍ **Esercizio 1.11.1.**

Calcolare la matrice Hessiana della funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$$

nel punto $(-4, 2)$ e studiare il segno della corrispondente forma quadratica.

✍ **Esercizio 1.11.2.**

Calcolare la matrice Hessiana della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$$

nel punto $(2, -1)$ e studiare il segno della corrispondente forma quadratica.

✍ **Esercizio 1.11.3.**

Calcolare la matrice Hessiana della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

nei punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e studiare il segno della corrispondente forma quadratica.

✍ **Esercizio 1.11.4.**

Classificare, utilizzando il metodo dei minori principali oppure il metodo degli autovalori, le forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
q_1(x, y, z) &= x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz, \\
q_2(x, y, z) &= 2xz - 2xy - y^2 - 2yz \\
q_3(x, y, z, t) &= -2x^2 + ky^2 - z^2 - t^2 + 2xz + 4yt + 2kzt.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.11.5.**

Si determini la natura dell'origine per la funzione

$$f(x, y) = \log(1 + x^2) - x^2 + xy^2 + y^3 + 2.$$

✍ **Esercizio 1.11.6.**

Si verifichi che l'equazione

$$x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z + y^2 e^z = 0$$

determina un'unica funzione $z = z(x, y, u)$ tale che $z(0, 0, 0) = 1$ e che per tale funzione $(0, 0, 0)$ è punto critico. Si determini la natura di tale punto.

✍ **Esercizio 1.11.7.**

Si determinino gli eventuali punti di estremo locale e globale della funzione

$$f(x, y) = (x^4 + y^4)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

✍ **Esercizio 1.11.8.**

Si determinino gli estremi della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

✍ **Esercizio 1.11.9.**

Si determini al variare del parametro reale k la natura dell'origine per la funzione

$$f(x, y) = 2 + kx^2 + 4xy + (k - 3)y^2 + (2x + y)^4.$$

✍ **Esercizio 1.11.10.**

Si determini la natura dell'origine per la funzione

$$f(x,y) = \arctan(x^2+y^2) - \log(1+x^2) - \log(1+y^2).$$

✍ **Esercizio 1.11.11.**

Si verifichi che l'equazione

$$(y-1)z + e^z + (x^2+x)\log y - 1 = 0$$

determina un'unica funzione $z = z(x,y)$ in un intorno di ogni punto della retta $y = 1$. Si dica se tale funzione ammette sulla retta $y = 1$ punti di massimo o di minimo locale.

✍ **Esercizio 1.11.12.**

Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + \log(1+z^2).$$

✍ **Esercizio 1.11.13.**

Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 - xy + z^2.$$

✍ **Esercizio 1.11.14.**

Si determini, al variare del parametro reale k, il segno delle seguenti forme quadratiche: a) $q(x,y,z) = kx^2 + ky^2 + kz^2 + 2xy + 2yz$;

b) $q(x,y,z,t) = -x^2 + xy - y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + kt^2$.

✍ **Esercizio 1.11.15.**

Si determini al variare del parametro reale k la natura dell'origine per la funzione

$$f(x,y) = 5 + kx^2 + 2xy + 4kxz - 6y^2 - 3z^2.$$

✍ **Esercizio 1.11.16.**

Trovare i punti stazionari delle funzioni che seguono e dire se si tratta di punti di massimo o di minimo relativo.

$1) x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$	$2) y^2 - x^2 y$
$3) x^2y^2(1-x-y)$ $\quad$ 4)	$x^2 + y^2 + z^3 - 2x - 3z$
$5) x^3 + xy + y^2 + yz + z^3$	$6) \lvert x^2 + y^2 - 4y\rvert + x$
$7) \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$	$8) \frac{x+y-1}{x^2+y^2}$
$9) (2x+y)e^{-x^2-y^2}$	$10) x^4 - x^3 + y^2$
$11) xy\log(xy^2) + x^2 y$	$12) x^2 + y^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$
$13) (x+3y)e^{-xy}$	$14) \frac{xy}{x^2+y^2}$
$15) x^3 + 6xy + y^2$	$16) x\log(x+y)$
$17) x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$	$18) \sin(x+y)\cos(x-y)$

✍ **Esercizio 1.11.17.**

Trovare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^4}$$

in $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

✍ **Esercizio 1.11.18.**

Trovare e classificare i punti critici delle funzioni indicate

$1) f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$	$2) f(x,y) = xy - x + y$
$3) f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$	$4) f(x,y) = x^4 + y^4 4xy$
$5) f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$	$6) f(x,y) = \cos(x+y)$
$7) f(x,y) = x \sin y$	$8) f(x,y) = \cos x + \cos y$
$9) f(x,y) = x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$	$10) f(x,y) = \frac{xy}{2+x^4+y^4}$
$11) f(x,y) = x e^{-x^3+y^3}$	$12) f(x,y) = \frac{1}{1-x+y+x^2+y^2}$
$13) f(x,y) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$	$14) f(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$
$15) f(x,y,z) = xy + x^2 z - x^2 - y - z^2$	$16) xy^2 - x^2 - y^2$

✍ **Esercizio 1.11.19.**

Mostrare che $f(x,y,z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$ ha un valore massimo locale nel punto $(1,1,1)$.

✍ **Esercizio 1.11.20.**

Determinare il valore massimo e il valore minimo di $f(x,y) = xye^{-x^2-y^4}$.

✍ **Esercizio 1.11.21.**

Determinare il valore massimo e il valore minimo di

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

✍ **Esercizio 1.11.22.**

Determinare il valore massimo e il valore minimo di $f(x,y,z) = xyze^{-x^2-y^2-z^2}$. Come si può essere certi che tali valori esistono?

✍ **Esercizio 1.11.23.**

Determinare il valore minimo di

$$f(x, y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$$

nel primo quadrante $x > 0, y > 0$. Come si può essere certi che un minimo esiste?

✍ **Esercizio 1.11.24.**

Determinare e classificare i punti critici della funzione $z = g(x, y)$ che soddisfano l'equazione

$$e^{2zx-x^2} - 3e^{2zy+y^2} = 2.$$

✍ **Esercizio 1.11.25.**

Sia

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2).$$

Mostrare che l'origine è un punto critico di f e che la restrizione di f a qualunque linea retta passante per l'origine ha un valore minimo locale nell'origine (mostrare cioè che $f(x, kx)$ ha un valore minimo locale in $x = 0$ per ogni k e che $f(0, y)$ ha un valore minimo locale in $y = 0$.) La funzione $f(x, y)$ ha un valore minimo locale nell'origine?

✍ **Esercizio 1.11.26.**

È dato il campo scalare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (|x| + y)e^{-xy}.$$

Trovare i punti stazionari e determinarne la natura.

✍ **Esercizio 1.11.27.**

Determinare la natura dei punti stazionari di

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 5xy - z^2 + 2z$$

in tutto lo spazio. Determinare gli estremi superiore ed inferiore di f.

✍ **Esercizio 1.11.28.**

Si determinino i massimi e i minimi relativi ed assoluti dei campi scalari

$$f(x, y) = e^{-x-y} + e^{x} + e^{y+1}$$

e

$$g(x, y) = f(x^2, -y).$$