Equazioni di Poisson	
Teorema della media: sia v una funzione armonica in $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d$ con $d = 2{,}3$, per ogni bolla $B_r(\vec{x}) \subset \Omega$ valgono le seguenti relazioni: • $v(\vec{x}) = \frac{1}{\lvert B_r(\vec{x})\rvert}\int_{B_r(\vec{x})} v(\vec{y})\,d\vec{y}$ con $\begin{cases} d = 2 & \lvert B_r(\vec{x})\rvert = \pi r^2 \\ d = 3 & \lvert B_r(\vec{x})\rvert = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$ • $v(\vec{x}) = \frac{1}{\lvert \partial B_r(\vec{x})\rvert}\oint_{\partial B_r(\vec{x})} v(\gamma)d\gamma$ con $\begin{cases} d = 2 & \lvert \partial B_r(\vec{x})\rvert = 2\pi r \\ d = 3 & \lvert \partial B_r(\vec{x})\rvert = 4\pi r^2 \end{cases}$ Principio del massimo: se $v \in C^0(\overline{\Omega}), \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d$ e v ha la proprietà della media allora $\min_{\partial\Omega} v \leq v(\vec{x}) \leq \max_{\partial\Omega} v$	
Condizioni Dirichlet	$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = g \end{cases}$
Condizioni Neuman	$\begin{cases} -\mu\Delta u = f \\ -\mu\vec{\nabla} u \cdot \hat{n} = h \end{cases}$
Condizioni Robin	$\begin{cases} -\mu\Delta u = f \\ -\mu\vec{\nabla} u \cdot \hat{n} - \alpha u = h \end{cases}$
Condizioni miste	$\begin{cases} -\mu\Delta u = f \\ u = g \\ -\mu\vec{\nabla} u \cdot \hat{n} = h \end{cases}$

Unicità soluzione per problema di Poisson

Enunciato: i problemi di Poisson con condizioni Cauchy - Dirichelt, Cauchy-Robin e miste hanno soluzione unica, Il problema di Poisson con condizione al contorno di Neumann hanno soluzioni uniche a meno di una costante.

Dimostrazione: dimostriamo questo teorema per assurdo ipotizzando che esistano almeno due soluzioni distinte $u \neq w$ quindi possiamo definire la funzione v come differenza tra le due funzione appena citate dunque $v = u - w$. Dopo aver riformulato il problema di Cauchy utilizzando la funzione v prendiamo la prima equazione del sistema e la moltiplichiamo a destra e a sinistra per v e integriamo su Ω:

$$-\mu\Delta v = 0$$

$$\int_\Omega -\mu\Delta v \cdot v \, d\Omega = \int_\Omega 0 \cdot v$$

$$\int_\Omega -\mu\Delta v \cdot v \, d\Omega = 0$$

Analizziamo ora la prima parte dell'equazione visto che la seconda è nulla, ricordiamo che il laplaciano di una funzione equivale a fare la divergenza del gradiente di quella stessa funzione dunque:

$$\int_\Omega -\mu\Delta v \cdot v \, d\Omega = \int_\Omega -\mu\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} v\right) \cdot v \, d\Omega =$$

Sviluppiamo questo termine per parti

$$= \int_{\Omega} -\mu\vec{\nabla}(v\vec{\nabla}v)d\Omega + \int_{\Omega} -\mu\vec{\nabla}v \cdot \vec{\nabla}v d\Omega =$$

Sfruttiamo il teorema di Gauss

$$= -\oint_{\partial\Omega} v\mu\vec{\nabla}v \cdot \hat{n}\, d\Gamma + \int_{\Omega} -\mu\left|\vec{\nabla}v\right|^2 d\Omega$$

$$-\oint_{\partial\Omega} v\mu\vec{\nabla}v \cdot \hat{n}\, d\Gamma + \int_{\Omega} -\mu\left|\vec{\nabla}v\right|^2 d\Omega = 0$$

$$\oint_{\partial\Omega} v\mu\vec{\nabla}v \cdot \hat{n}\, d\Gamma = \int_{\Omega} -\mu\left|\vec{\nabla}v\right|^2 d\Omega$$

Studiamo ora il termine in rosso in funzione del tipo di condizione al contorno:

Dirichlet	$u = g$ $w = g$ $v = 0 \quad \rightarrow \oint_{\partial\Omega} v\mu\vec{\nabla}v \cdot \hat{n}\, d\Gamma = 0$
Neumann	$-\mu\vec{\nabla}u \cdot \hat{n} = h$ $-\mu\vec{\nabla}w \cdot \hat{n} = h$ $-\mu\vec{\nabla}v \cdot \hat{n} = h - h = 0 \quad \rightarrow \oint_{\partial\Omega} v\mu\vec{\nabla}v \cdot \hat{n}\, d\Gamma = 0$
Robin	$-\mu\vec{\nabla}u \cdot \hat{n} - \alpha u = h$ $-\mu\vec{\nabla}w \cdot \hat{n} - \alpha w = h$ $-\mu\vec{\nabla}v \cdot \hat{n} - \alpha v = h - h = 0$ $-\mu\vec{\nabla}v \cdot \hat{n} = \alpha v \quad \rightarrow \oint_{\partial\Omega} v\mu\vec{\nabla}v \cdot \hat{n}\, d\Gamma \leq 0$

Il termine in rosso dunque è sempre minore o tuttalpiù uguale a 0 indipendentemente dalle condizioni al contorno dunque:

$$\int_{\Omega} -\mu\left|\vec{\nabla}v\right|^2 d\Omega \leq 0$$

E affinché ciò sia verificato occorre che $\vec{\nabla}v = 0$ e dunque che v sia una costante, ma se v è una costante allora si ha che $u = w + cost$. Per Robin e Dirichlet la costante è nulla mentre per Neumann c'è.