CIRCUITO ELETTRICO

Cenni equazioni Maxwell

In questo corso studieremo i principi che stanno alla base dei sistemi elettrici cioè le sedi di fenomeni elettromagnetici. Tali fenomeno vennero studiati per la prima volta nell'Ottocento e proprio a metà di questo secolo Maxwell pubblicò le sue equazioni che descrivevano completamente il fenomeno elettromagnetico. Le equazioni di Maxwell in forma locale sono:

$\nabla x\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Legge di Faraday (in quanto legge non va dimostrata)

$\nabla x\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ Legge di Ampere

$\nabla \vec{B} = 0$ Stabilisce sempre l'esistenza di due poli, nord e sud, nei magneti e afferma che all'inizio non esistevano i magneti

$\nabla \vec{D} = \rho_{libera}$ Legge di Gauss

Le grandezze presenti nelle equazioni di Maxwell sono relazionate tra loro tramite i legami costitutivi:

$\vec{B} = \mu\vec{H}$ Lega il campo di induzione magnetica B al campo magnetico H tramite la costante di permeabilità magnetica

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ Lega il campo di induzione dielettrica D al campo elettrico E tramite la costante dielettrica

$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{*})$ Lega la densità di corrente J al campo elettrico nella sua componente conservativa E e in quella non conservativa E*. È nota come legge di Ohm.

$\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ Esprime la conservatività della carica

Tutti i sistemi elettrici che studieremo sono interamente descritti da queste equazioni che però non usiamo a causa della loro difficoltà. Così come evitiamo di usare la relatività per descrivere determinate fenomeni, evitiamo di usare queste equazioni per descrivere i sistemi elettrici. Utilizzeremo dunque delle leggi più semplici che sono un'approssimazione di questi comportamenti. Continuando il parallelismo con la relatività possiamo affermare che così come dobbiamo scendere di velocità per non considerare la relatività, dobbiamo scendere di lunghezze d'onda di questi fenomeni per non considerare le equazioni di Maxwell.

Onde elettromagnetiche

Definiamo le onde elettromagnetiche come qualcosa che oscilla e si diffonde nello spazio. Considereremo le onde elettromagnetiche come un insieme di sinusoidi e quindi come serie di Fourier, cioè la serie che meglio approssima il segnale iniziale in termini energetici. Le onde magnetiche, cioè dunque delle sinusoidi, sono caratterizzati da un periodo che risulta essere l'inverso della frequenza. Si muoveranno grazie a una velocità che è pari a quella della luce e dunque compiranno uno spazio, noto come lunghezza d'onda, che è il rapporto tra la velocità della luce e la frequenza. In questo corso si studieranno sistemi per cui la lunghezza d'onda è molto maggiore della lunghezza del circuito, che indichiamo con la lettera d. Se si è in questa condizione si parla di regime quasi stazionario.

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}$$

$$\lambda \gg d$$

I sistemi elettrici avranno numerose interazioni: sarà presente del lavoro meccanico uscente, del calore uscente, del lavoro che verrà effettuato (chimico o di altra natura) e del lavoro elettrico. Avremo anche un accumulo di energia che si indica come dW. Per studiare questi sistemi è necessario prendere in considerazioni ogni fenomeno e analizzarlo singolarmente. Si definisce un sistema semplice quando si considera il sistema reale con dei comportamenti al limite ideali che vengono poi combinati tra loro. Definiamo quindi modello l'insieme di sistemi ideali; è possibile decidere i vari livelli di approssimazioni, in ogni caso è necessaria un'astrazione.

Caratterizzazione di un sistema elettrico

Per studiare un sistema elettrico è necessario introdurre due concetti:

1. Corrente (i) = variazione di carica positiva (per motivi storici) nell'unità di tempo

$$i = \frac{dq}{dt} \quad [A]$$

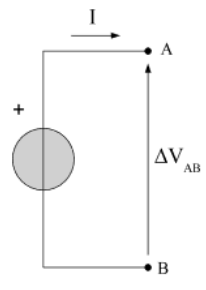
2. Tensione (v) = la variazione di energia che serve per spostare la carica elementare. Si misura in Volt, da Volta che inventò la pila, la prima struttura scoperta che non aveva un campo elettrico conservativo. Se si fosse in presenza di un campo elettrico conservativo la tensione prenderebbe il nome di differenza di potenziale

$$v = \frac{dW}{dq} \quad [V]$$

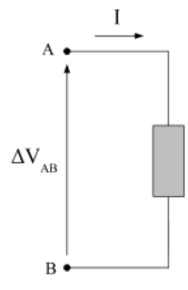
Graficamente la corrente si segna con una freccia che indica il verso di misura (positivo) mentre la tensione si indica con una freccia che unisce due punti appartenenti ai terminali. La freccia della tensione punta sempre sulla prima lettera del pedice della tensione stessa; tale punto è solitamente caratterizzato da un'energia maggiore (i calcoli posso sfatare ciò).

Generatori e utilizzatori

Definiamo bipolo elettrico un qualsiasi dispositivo o una qualsiasi rete elettrica caratterizzata dall'avere due terminali accessibili dall'esterno. In base alla funzione svolta dal punto di vista energetico, i bipoli si suddividono in due categorie: generatori ed utilizzatori. I generatori forniscono l'energia necessaria a far muovere le cariche elettriche all'interno del sistema elettrico. Gli utilizzatori ricevono la corrente proveniente del generatore e, attraverso di essa, l'energia.



generatore



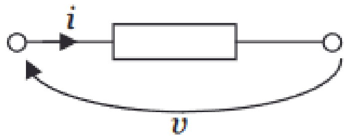
utilizzatore

Convenzione dei generatori e degli utilizzatori

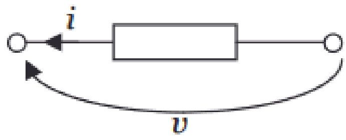
Se mettessi una carica in un punto ad energia più elevata questa tenderà a spostarsi nel punto a energia più bassa perché tutti i sistemi fisici tendono ad effettuare la minor fatica possibile; questa pallina dissiperà dunque energia in calore. Si genererà così energia che esce dal sistema. Chiamiamo dunque convenzione degli utilizzatori la convenzione che implica che la tensione sia orientata in modo tale che il punto a potenziale maggiore nel bipolo sia quello in cui la corrente è entrante. Il prodotto tensione-corrente fornisce la potenza che sta entrando nel sistema e si sta dissipando in calore:

$$v * i = \frac{dW}{dq} * \frac{dq}{dt} = P \quad [W]$$

Se il sistema da lavoro elettrico produce del calore siamo in presenza di un bipolo che prende il nome di resistore, caratterizzato da una grandezza nota come resistenza. Tra tensione e corrente esiste una legge nota come legge di ohm. Per misurare tensione e corrente si può usare amperometro o il voltmetro.
Nell'analizzare un sistema elettrico e dunque nel disegnare le frecce di corrente e tensione in realtà si sta facendo una supposizione che verrà poi verificata o meno dai calcoli. Se emerge che il verso della corrente è opposto a quanto si ha supposto si è in presenza di una convenzione di misura dei generatori (indicati con E); questa convenzione implica che la tensione sia orientata in modo tale che il punto a potenziale maggiore nel bipolo sia quello in cui la corrente è uscente cioè lo spostamento di cariche avviene dal punto di energia più bassa a quello più alto. Da un punto di vista della potenzia si ha che questa è positiva uscente mentre prima (verso sinistra), mentre prima la potenza era entrante (verso destra).



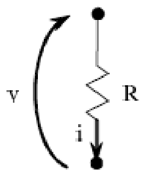
Convenzione degli utilizzatori

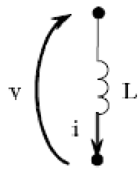


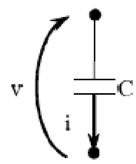
Convenzione dei generatori

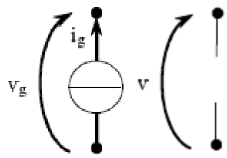
Tipi di bipolo

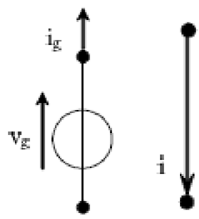
Come abbiamo detto un bipolo è un qualsiasi dispositivo o una qualsiasi rete elettrica caratterizzata dall'avere due terminali accessibili dall'esterno. Analizziamo ora più nello specifico i tipi di bipoli sono esistono:

1. <u>Resistore</u> = è un tipo di componente elettrico destinato a fornire una specifica resistenza elettrica al passaggio della corrente elettrica. È caratterizzato dal parametro resistenza R che si misura in Ohm (Ω)
$$v = Ri$$


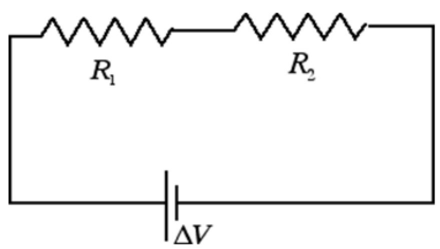
2. <u>Induttore</u> = è generalmente un filo metallico che accumula energia. È caratterizzato dal parametro induttanza indicato con la lettera L e misurata in H (henry)
$$v = L\frac{di}{dt}$$


3. <u>Condensatore</u> = è costituto generalmente da due lastre di materiale metallico tra le quali è presente del materiale isolate; permette l'accumulo di energia. Questo elemento è caratterizzato dal parametro capacità che si misura in Farad
$$i = C\frac{dv}{dt}$$


4. <u>Generatore ideale di corrente</u> = bipolo ideale che impone ai suoi morsetti una corrente ben definita qualunque sia la tensione che si manifesta ai morsetti stessi. Un generatore ideale di corrente nulla è un circuito aperto ideale: impone cioè che la corrente sia nulla qualunque sia la tensione ai morsetti.


5. <u>Generatore ideale di tensione</u> = bipolo ideale che impone ai suoi morsetti una tensione ben definita qualunque sia la corrente ai morsetti. Un generatore ideale di tensione con tensione impressa nulla è un corto circuito ideale


Bipoli in serie e in parallelo
Due bipoli percorsi dalla stessa corrente si chiamano in serie mentre due bipoli a cui è applicata la stessa tensione si diranno in parallelo. Vediamo ora come ricavare i bipoli equivalenti per resistori in:
- Serie

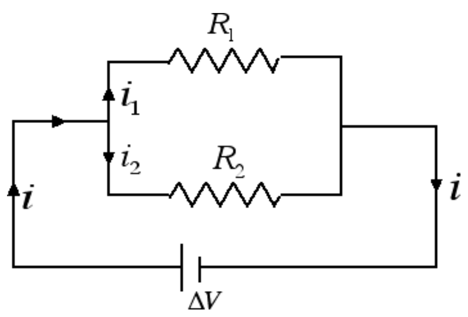


$$V = V_1 + V_2$$

$$R_{eq} i = R_1 i + R_2 i$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

- Parallelo



$$i_1 = \frac{V}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{V}{R_2}$$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \frac{V}{R_{eq}}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = G_{eq} = G_1 + G_2$$

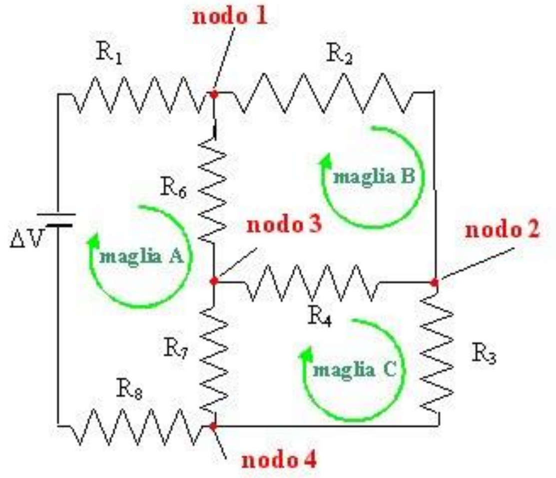
Principio di dualità
Come è stato vito introducendo G, la conduttanza, in elettrotecnica spesso si usano gli inversi di una grandezza; da ciò deriva il principio di dualità che afferma che data una formula è possibile ottenerne una equivalente sostituendo ai termini della prima formula i termini duali. Esempi di termini duali sono:
- Serie / parallelo
- Resistori / conduttanza
- Tensione / corrente
- Anello / nodo
- Corto circuito / circuito aperto

Valori limiti dei bipoli
I valori al limite di un bipolo sono il corto circuito e il circuito aperto. Queste due situazioni si possono avere quando:

Circuito aperto:	Corrente = 0
	Resistenza ∞
Corto circuito:	Tensione del generatore = 0
	Resistenza = 0

Forma di un circuito
Un circuito elettrico o una rete elettrica (se si hanno tanti bipoli) è caratterizzata dalla forma cioè da come sono connessi tra loro i bipoli nei punti di connessione, punti che prendono il nome

di *nodi*. Si chiama *lato* il bipolo tra due nodi. Si chiama invece *anello* un percorso chiuso che non contiene lati; percorsi che contengono lati al loro interno sono chiamati *maglie*



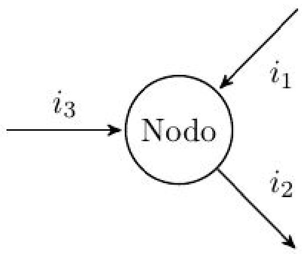
Risoluzione di un circuito

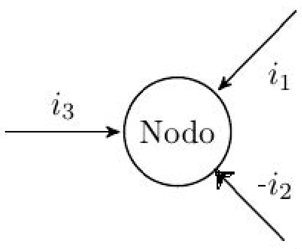
Per la risoluzione di una rete elettrica ci si può avvalere delle equazioni conseguenti le seguenti leggi:

1. <u>Legami costitutivi</u> = leggi che in base alla natura del bipolo legano la corrente e la tensione ai morsetti di ogni lato. Tali leggi sono anche note come leggi di Ohm:

$$v = Ri \qquad v = L\frac{di}{dt} \qquad i = C\frac{dq}{dt}$$

2. <u>Legge di Kirchhoff delle correnti</u> (LKC)= le correnti entranti in una superficie chiusa hanno somma nulla. Questa legge deriva dalla conservazione della carica. Generalmente nelle reti si sceglie come superficie chiusa il nodo:

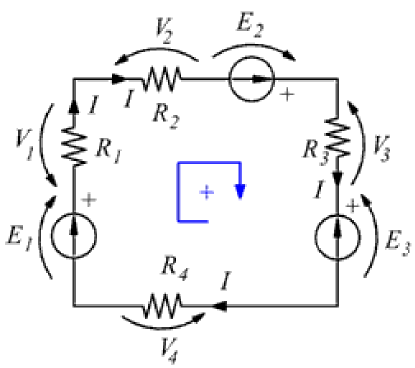




$$\sum_k i_k = 0 \qquad \sum_k i_k = 0$$

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0 \qquad i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

3. Legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT) = la somma delle tensioni misurate su un percorso chiuso è uguale a 0.



$$0 = E_1 - V_1 - V_2 + E_2 - V_3 - E_3 - V_4$$

Teorema fondamentale dell'elettronica

Il teorema fondamentale dell'elettrotecnica afferma che una rete di l lati è risolubile ed è dunque possibile individuare le 2l incognite corrispondenti alle tensioni e alle correnti del lato utilizzando i legami costitutivi e le equazioni linearmente indipendenti conseguenti le leggi di Kirchhoff delle tensioni e delle correnti. Tale teorema afferma dunque che il numero di equazioni che forniscono le leggi di Kirchhoff delle tensioni, le leggi di Kirchhoff delle correnti e le leggi di Ohm sono un numero sufficiente e indipendente tra loro da garantire la soluzione della rete. In quanto teorema e non legge va dimostrato.

Dim: considerando un qualsiasi circuito è possibile affermare che, indicando con l il numero di lati, per poter risolvere la rete completamente occorre conoscere la corrente e la tensione di ogni lato e quindi è possibile affermare che il numero totale di variabili che descrive la rete è esattamente 2l. Consideriamo ora il circuito qui a fianco con:

- 4 nodi: n
- 3 anelli: a
- 6 lati: l

Per ogni lato è possibile scrivere l equazioni indipendenti sfruttando i legami costituivi. Inoltre è possibile scrivere n leggi di Kirchhoff per le correnti. Queste n equazioni non sono però tutte indipendenti tra di loro poiché mettendole a sistema si otterrebbe un'identità 0=0. Le equazioni di Kirchhoff linearmente indipendenti sono quindi n-1. Sottraendo questi valori al numero totale di variabili si otterrebbe:

$$2l - l - (n+1) = 2l - l - n + 1 = l - n + 1 = a$$

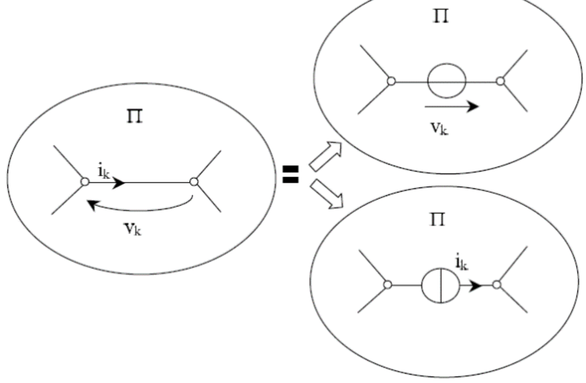
Bisogna ora dimostrare per questo valore coincida con il numero di anelli del circuito. Per quest'ultima parte della dimostrazione procede per induzione:

- Caso 0: $n = 2$
 $l = 2$ → verificato
 $a = l - n + 1 = 1$
- Caso 1: $n = 2$
 $l = 3$ → verificato
 $a = l - n + 1 = 2$
- Caso 2: $n = 3$
 $l = 3$ → verificato
 $a = l - n + 1 = 1$
- Caso 3: $n = 4$
 $l = 5$ → verificato
 $a = l - n + 1 = 2$

Per induzione quindi $l - n + 1$ è sempre uguale ad a

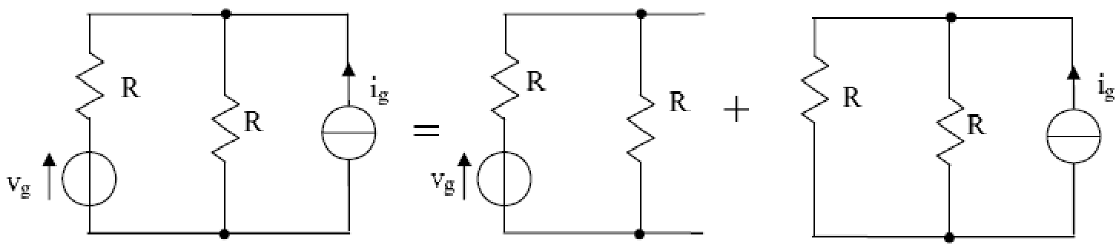
Teorema di sostituzione

Tale teorema afferma che data una rete qualsiasi e un lato di cui si conosce la tensione o la corrente è possibile sostituire al lato o un generatore di tensione, pari a V o un generatore di corrente, pari a I, rispettando ovviamente la corrente e la tensione iniziale. Tale teorema risulta essere improntante perché permette di semplificare notevolmente la rete e rendere così più semplice la risoluzione.



Teorema di sovrapposizione

Questo Teorema asserisce che in una rete elettrica qualsiasi, purché lineare, la tensione fra due punti qualsiasi può essere determinata facendo agire ad uno ad uno i vari generatori presenti da soli e facendo poi la somma dei valori così ottenuti ogni volta, siano essi positivi o negativi. È importante sottolineare che escludere tutti gli altri generatori e lasciarne uno solo vuol dire cortocircuitare tutti quelli di tensione ed aprire quelli di corrente, ottenendo quindi una rete elettrica con un solo generatore ogni volta, determinare la tensione ai morsetti richiesta e poi rifare il calcolo per ogni altro generatore presente.



Teorema di Thevenin

Il teorema di Thevenin afferma che, data una rete lineare qualsiasi "π" e un bipolo "B" di cui si vuole conoscere la tensione e la corrente, ai fini del calcolo della corrente del bipolo è possibile sostituire alla rete π una rete equivalente costituita da un generatore ideale di tensione in serie e una resistenza equivalente R_{th}.

Dimostrazione:

- Considero una rete lineare qualsiasi "π" e un bipolo "B".
- Aggiungo e tolgo un generatore di tensione V_0 così da ottenere una rete equivalente
- Per il teorema di sostituzione metto al posto del bipolo B un generatore di corrente
- Per il principio di sovrapposizione causa-effetto analizzo tale circuito scomponendolo in due:
  1. Rete π spenta caratterizzata $V_g = 0$ e $I_g = 0$
  2. Rete π attiva: il contributo di questa seconda parte è nullo in quanto sia la corrente che la tensione risultano essere nulle. La tensione è nulla perché V_0 è pari in modulo e opposta in verso alla tensione prodotta dalla rete π quando è aperta ed accesa. L'effetto netto che da dunque è 0.

Per l'applicazione del teorema di Thevenin si procede nel modo descritto di seguito:

1. E_{TH} : si risolve il circuito in esame ricavando la tensione tra i morsetti AB del bipolo B a vuoto
2. Calcolo R_{TH}: si sostituiscono i generatori di tensione con corto circuiti e i generatori di corrente con circuiti aperti ottenendo così una rete di sole resistenze e si calcola la resistenza totale vista ai morsetti AB
3. Si realizza il circuito equivalente composto dal generatore E_{TH} in serie con la resistenza R_{TH} con l'accortezza di porre il segno positivo del generatore E_{TH} coincidente con quello della tensione V_{AB}

Teorema di Norton

Il teorema Norton afferma che un qualunque circuito lineare, comunque complesso, visto da due nodi A-B è equivalente ad un generatore reale di corrente costituito da un generatore ideale di corrente in parallelo con un resistore: l'equivalenza vale limitatamente alla tensione e alla corrente in corrispondenza dei nodi A-B.

<u>Dimostrazione</u>:

- Considero una rete lineare qualsiasi "π" e un bipolo "B".
- Aggiungo un circuito aperto tra π e il bipolo
- Per il teorema di sostituzione metto al posto circuito aperto due generatori di corrente in parallelo tra loro con verso opposto
- Per il teorema di sostituzione metto al posto del bipolo B un generatore di tensione
- Per il principio di sovrapposizione causa-effetto analizzo tale circuito scomponendolo in due:
    1. Rete π spenta caratterizzata $V_g = 0$ e $I_g = 0$
    2. Rete π attiva: il contributo di questa seconda parte è nullo in quanto sia la corrente che la tensione risultano essere nulle. La corrente è nulla perché I_0 è pari in modulo ed opposta in verso alla corrente emessa dalla rete π quando è accesa. L'effetto netto che da dunque è 0.

Per l'applicazione del teorema di Thevenin si procede nel modo descritto di seguito:

1. I_N: si risolve il circuito in esame ricavando la corrente tra i morsetti AB del bipolo B in corto circuito. La corrente I_N coincide con la corrente di corto circuito I_{CC}
2. Calcolo R_{TH}: si sostituiscono i generatori di tensione con corto circuiti e i generatori di corrente con circuiti aperti ottenendo così una rete di sole resistenze e si calcola la resistenza totale vista ai morsetti AB
3. Si realizza il circuito equivalente composto dal generatore di corrente I_N in parallelo con la resistenza R_{TH}

Equivalenza Norton e Theuenin

Gli ultimi due bipoli che è possibile riscontrare all'interno di una rete sono dirette conseguenze dei teoremi sopracitati:

1. Bipolo equivalente Thevenin (o equivalenze serie) =

2. Bipolo equivalente Norton (o equivalente parallelo) =

N.B.: Se la tensione del circuito è già nota non è possibile applicare Theuenin perché si otterrebbe una singolarità:

Partitore di tensione e partitore di corrente

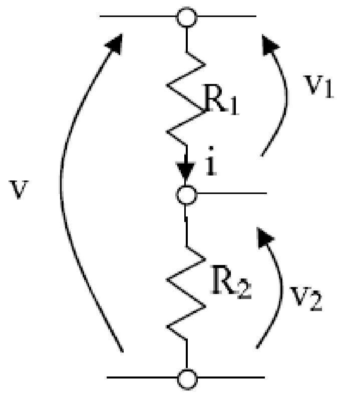
Si definisce partitore di tensione una tipologia di circuito costituito da due o più componenti passivi collegati in serie ai capi dei quali se viene applicata una tensione, essa si ripartirà sulle stesse componenti in base al loro valore.

$$v_n = \frac{R_n}{\sum_1^n R_n} i$$

Se n=2

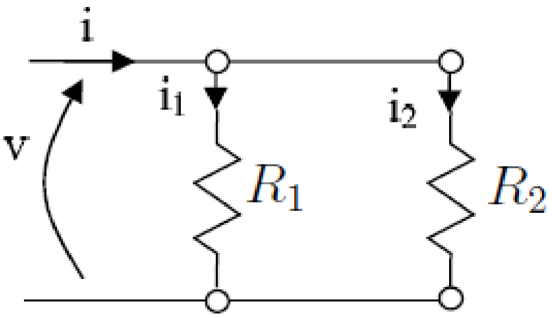
$$v_1 = v\frac{R_1}{R_2 + R_1}$$

$$v_2 = v\frac{R_2}{R_2 + R_1}$$



Si definisce invece partitore di corrente un circuito utilizzato per ottenere la corrente elettrica che scorre attraverso un circuito quando esso viene connesso in parallelo con un'altra resistenza. Partitore di tensione partitore di corrente sono forme duali.

$$i_k = \frac{G_k}{\sum_1^k G_k} i$$



Se k=2:

$$i_1 = i\frac{R_2}{R_2 + R_1}$$

$$i_2 = i\frac{R_1}{R_2 + R_1}$$

Rete binodale e formula di Millman

Si definisce rete binodale una rete costituita da n bipoli in parallelo. Tale circuito risulta essere particolarmente importante perché conoscendo solo la tensione tra i morsetti AB è possibile ricavare tutti i valori di tensioni e tutte le correnti che attraversano la rete stessa. All'interno di questa rete non viene però mai inserito un generatore ideale di tensione altrimenti si conoscerebbe di già la tensione tra il morsetto AB. Tale tensione può essere calcolato tramite la formula di Millman: un uso iterativo delle leggi di Kirchhoff secondo cui è possibile compattare in un'unica formula ciò che è necessario per risolvere la rete binodale. La formula è:

$$V_{AB} = \frac{\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_2} + I_3 - I_4}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}} = \frac{\sum \pm \frac{V}{R} \pm \sum I}{\sum \frac{1}{R}}$$

<u>Dimostrazione:</u>

- Consideriamo un circuito costituito da 5 bipoli
- Ridisegniamolo utilizzando le equivalenze di Thevenin e Norton ricordandoci che se è presente un generatore di corrente in serie con una resistenza è possibile trascurare la resistenza che risulta superflua per il calcolo degli effetti interni
- Ridisegniamo nuovamente il circuito mettendo più in evidenza i due morsetti e raggruppando i generatori di corrente e le resistenze di Thevenin
- Applichiamo poi le leggi di Kirchhoff delle correnti per trovare la corrente totale: $I_{tot} = \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_2} + I_3 - I_4$
- Calcoliamo la resistenza equivalente: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}$
- Ridisegniamo la rete sostituendo a tutti i generatori di correnti un solo generatore che produca la corrente totale e sostituiamo alle resistenze la resistenza equivalente
- Calcoliamo la tensione: $V_{AB} = \frac{I_{tot}}{\frac{1}{R_{eq}}} = \frac{\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_2} + I_3 - I_4}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}}$