INTRODUZIONE

Oggetti matematici

Prima di affrontare nello specchio la meccanica dei fluidi occorre introdurre alcuni strumenti matematici che risulteranno essere estremamente utili:

- Campo scalare = numero scalare che può variare nello spazio e nel tempo

$$a = a(x, y, z, t) = a(x_1, x_2, x_3, t)$$

- Vettore = è composto da 3 scalari

$$\vec{a} = \bar{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right) = (a_1, a_2, a_3) = [a_1\ a_2\ a_3]$$

  Il vettore è caratterizzato da:

  a. Modulo = indica la lunghezza del vettore. DI seguito scriviamo l'espressione del modulo di un vettore e sottolineiamo come questa possa essere compattata mediante la notazione indiciale o di Einstein secondo cui si dà per scontato la sommatoria ogni volta che si presentano due indici uguali:

$$|\bar{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_{ii}} = \sqrt{a_{ii}}$$

  b. Direzione = è nota se è noto un angolo nel piano, o due angoli nello spazio:

$$\tan\vartheta = \frac{a_y}{a_x}$$

  c. Verso = orientamento è noto dai segni delle componenti scalari

- Versori = particolari tipi di vettori che hanno modulo unitario. L'informazione fondamentale che forniscono dunque non è la lunghezza, che è unitaria, ma è il verso e la direzione. I versori vengono spesso usati per identificare verso e direzione degli assi cartesiani:

$$\hat{\imath} = \widehat{\imath_1} \qquad\qquad \hat{\jmath} = \widehat{\imath_2} \qquad\qquad \hat{k} = \widehat{\imath_3}$$

  Introducendo questo strumento matematico è possibile riscrivere il vettore $\bar{a}$ come:

$$\bar{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} = a_1\widehat{\imath_1} + a_1\widehat{\imath_2} + a_1\widehat{\imath_3} = a_i\widehat{\imath_\imath}$$

- Tensore di ordine n = oggetto caratterizzato da 3^n componenti scalari.
  Tensore di ordine 0 → 1 componente scalare
  Tensore di ordine 1 → 3 componenti scalari
  Tensore di ordine 2 → 9 componenti scalari
  Generalmente verranno utilizzati tensore di ordine 2:

$$\bar{\bar{a}} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (\bar{\bar{a}})_{ij} = a_{ij}$$

  Gli elementi della matrice si leggono nel seguente modo: a_{xx} componente x del vettore $\overline{a_x}$ dunque notiamo che le righe della matrice sono vettori:
  1° riga → vettore $\overline{a_x}$
  2° riga → vettore $\overline{a_y}$

3° riga $\rightarrow$ vettore $\overline{a_z}$

Possiamo quindi concludere che un tensore di ordine 2 è si caratterizzato da 9 elementi scalari ma questi possono essere anche visti come 3 vettori. Gli elementi sulla diagonale prendono il nome di elementi diagonali, sono 3, mentre gli elementi fuori dalla diagonale, che sono 6, sono chiamati termini rettangolari o extra diagonali.

- Campi tensoriali = oggetto caratterizzato da 3^n componenti scalari che sono in realtà campi scalari e quindi variano nello spazio e nel tempo

Operazioni con oggetti matematici

Analizziamo ora le operazioni che è possibile effettuare con gli oggetti matematici sopra descritti:

- Operazioni tra vettori:
  - Prodotto scalare ($\cdot$) = fornisce uno scalare e gode della proprietà commutativa

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_i b_i$$

Permette di riscrivere il modulo di $\bar{a}$ come: $|\bar{a}| = \sqrt{a_i b_i} = \sqrt{\bar{a}\bar{a}}$

  - Prodotto vettoriale ($\times$) = fornisce un vettore e non gode della proprietà commutativa

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}(a_y b_z - a_z b_y) - \hat{\jmath}(a_x b_z - a_z b_x) + \hat{k}(a_x b_y - b_x a_y)$$

  - Prodotto tensoriale( ) = fornisce un tensore

$$\bar{a}\bar{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} [b_x \quad b_y \quad b_z] = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} = (\bar{a}\bar{b})_{ij} = a_i b_j$$

- Tra vettori e tensori:
  - Prodotto misto ($\cdot$) = fornisce un vettore

$$\bar{a} \cdot \bar{\bar{b}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$= [a_x b_{xx} + a_y b_{yx} + a_x b_{zx} \quad a_x b_{xy} + a_y b_{yy} + a_z b_{zy} \quad a_x b_{xz} + a_y b_{yz} + a_z b_{zz}] =$$

$$= a_i b_{ij} \hat{\imath}_j$$

Operatore Nabla

L'operatore nabla ∇ è formalmente un vettore di componenti derivate parziali dello spazio. In quanto operatore non ha significato a meno che non operi su qualcosa:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Le operazioni che è possibile effettuare con questo operatore sono:

- Divergenza di un vettore = prodotto scalare tra operatore nabla e vettore. Fornisce uno scalare

$$div(\bar{a}) = \nabla\bar{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

- Rotore di un vettore = prodotto vettoriale tra operatore nabla e vettore. Fornisce un vettore

$$rot(\bar{a}) = \nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

- Gradiente di un vettore = prodotto tensoriale tra operatore nabla e vettore. Fornisce un tensore

$$grad(\bar{a}) = \nabla\bar{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial y} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} & \frac{\partial a_y}{\partial z} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Divergenza di un versore = prodotto misto tra operatore nabla e tensore

$$div(\bar{\bar{a}}) = \nabla\bar{\bar{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \hat{\imath}_j$$

In generale possiamo affermare che la divergenza fa scendere di livello, mentre il gradiente fa alzare di livello

Livello
Tensore
Vettore
Scalare