

Dimostrazioni da sapere:

1. Equivalenza tra minimo energia e soluzione del sistema
2. Adeguatezza criterio della differenza tra iterate successive per metodi iterativi
3. Convergenza metodo delle potenze
4. Adeguatezza criterio delle differenze tra iterate successive per metodo iterazione di punto fisso
5. Metodo di Newton come metodo di iterazione di punto fisso
6. Equivalenza tra minimo di energia e approssimazione nel senso dei minimi quadrati
7. Formula dell'errore di punto medio semplice
8. Buona posizione dell'equazioni differenziali ordinarie
9. Risultato di convergenza per il metodo di Eulero in avanti
10. Stabilità condizionata dei metodi numerici per risolvere EDO
11. Metodo dell'energia per dimostrare unicità della soluzione del problema di diffusione
12. Teorema di esistenza e unicità della soluzione di problemi di diffusione in dimensione spaziale maggiore di 1
13. Unicità della soluzione di problemi di diffusione in dimensione spaziale maggiore di 1 tramite metodo dell'energia (metodo integrale)
14. Dimostrazione unicità soluzione problema di Poisson

Equivalenza tra minimo energia e soluzione del sistema

Enunciato: risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ equivale a minimizzare l'energia $\Phi(\vec{y})$ (ovvero una funzione di stato che ha la proprietà di essere quadratica e non negativa e di decrescere nel tempo qualora il sistema si asintoticamente stabile ed evolva liberamente) definita nel seguente modo:

$$\Phi(\vec{y}) = \frac{1}{2} \vec{y}^T A \vec{y} - \vec{y}^T \vec{b}$$

Quindi si ha che:

$$x \text{ è soluzione di } A\vec{x} = \vec{b} \iff \nabla\Phi(\vec{y}) = 0$$

Dimostrazione: per dimostrare questo teorema occorre dimostrare le due implicazioni:

- Si suppone che x sia soluzione del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ e si dimostra che sia il minimo della funzione Φ

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x} + \vec{v}) &= \frac{1}{2} (\vec{x} + \vec{v})^T A (\vec{x} + \vec{v}) - (\vec{x} + \vec{v})^T \vec{b} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v} - \vec{x}^T \vec{b} - \vec{v}^T \vec{b} = \\ &= \Phi(\vec{x}) + \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v} - \vec{v}^T \vec{b} = \leftarrow \boxed{\vec{x}^T A \vec{v} = (\vec{x}^T A \vec{v})^T = \vec{v}^T A \vec{x} = \vec{v}^T \vec{b}} \\ &= \Phi(\vec{x}) + \frac{1}{2} \vec{v}^T \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{v}^T \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v} - \vec{v}^T \vec{b} = \\ &= \Phi(\vec{x}) + \frac{1}{2} \vec{v}^T A \vec{v} > \Phi(\vec{x}) \end{aligned}$$

Quindi per ogni $\vec{v} \neq 0$ vale che $\Phi(\vec{x} + \vec{v}) > \Phi(\vec{x})$ e quindi \vec{x} è punto di minimo della funzione Φ .

- Si suppone che x sia punto minimo della funzione Φ e si dimostra che è soluzione del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$
Se \vec{x} è il punto di minimo della funzione Φ , allora per il teorema di Fermat vale che $\nabla\Phi(\vec{x}) = \vec{0}$. Scriviamo $\Phi(\vec{y})$ nel seguente modo e poi calcoliamo le derivate parziali così da poter compilare $\nabla\Phi(\vec{y})$:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{y}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} y_i y_j - \sum_{i=1}^n b_i y_i \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{k,j} y_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{k,i} y_i - b_k = \sum_{i=1}^n a_{k,i} y_i - b_k = (A\vec{y} - \vec{b})_k \end{aligned}$$

Da cui si determina:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi(\vec{y}) &= A\vec{y} - \vec{b} = -\vec{r} \\ \nabla\Phi(\vec{x}) &= -\vec{r} = \vec{0} = -(A\vec{x} - \vec{b}) \end{aligned}$$

Per il teorema di Fermat $\nabla\Phi(\vec{x}) = \vec{0}$

Adeguatezza criterio della differenza tra iterate successive per metodi iterativi

Enunciato: per valutare l'errore nei metodi iterativi occorre utilizzare lo stimatore dell'errore. Tale stimatore può essere determinato in diversi modi, uno dei quali è proprio la differenza tra iterate successive ovvero:

$$\tilde{e}^{(k)} = \left| \vec{\delta}^{(k)} \right| = \left| \vec{x} - \vec{x}^{(k)} \right| = \left| \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \right|$$

Si vuole ora dimostrare quando questo criterio è soddisfacente, ovvero si vuole trovare una relazione che legghi lo stimatore dell'errore definito in questo modo con l'errore stesso.

Dimostrazione: per definizione la norma dell'errore al passo k viene definito nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \left| \vec{e}^{(k)} \right| &= \left| \vec{x} - \vec{x}^{(k)} \right| = \\ &= \left| \vec{x} - \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} + \vec{x}^{(k+1)} \right| = \leftarrow \text{Si aggiunge e sottrae } \vec{x}^{(k+1)} \\ &= \left| \vec{x} - \vec{x}^{(k+1)} \right| + \left| \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \right| = \\ &= \left| \vec{e}^{(k+1)} \right| + \left| \vec{\delta}^{(k)} \right| \end{aligned}$$

Sapendo che: $\left| \vec{e}^{(k+1)} \right| \leq \rho(B) \left| \vec{e}^{(k)} \right|$

$$\left| \vec{e}^{(k)} \right| \leq \rho(B) \left| \vec{e}^{(k)} \right| + \left| \vec{\delta}^{(k)} \right|$$

$$\left| \vec{e}^{(k)} \right| - \rho(B) \left| \vec{e}^{(k)} \right| \leq \left| \vec{\delta}^{(k)} \right|$$

$$\left| \vec{e}^{(k)} \right| (1 - \rho(B)) \leq \left| \vec{\delta}^{(k)} \right|$$

$$\left| \vec{e}^{(k)} \right| \leq \frac{1}{1 - \rho(B)} \left| \vec{\delta}^{(k)} \right|$$

Ma per il criterio che stiamo usando $\left| \vec{\delta}^{(k)} \right| = \tilde{e}^{(k)}$ quindi:

$$\left| \vec{e}^{(k)} \right| \leq \frac{1}{1 - \rho(B)} \tilde{e}^{(k)}$$

Quindi:

- Se $\rho(B) \lesssim 1$ $\rightarrow \tilde{e}^{(k)} \gg \tilde{e}^{(k)}$ \rightarrow criterio insoddisfacente
- Se $\rho(B) \gtrsim 0$ $\rightarrow \tilde{e}^{(k)} \cong \tilde{e}^{(k)}$ \rightarrow criterio soddisfacente

Convergenza metodo delle potenze

Enunciato: il metodo delle potenze converge

Dimostrazione: se ho gli autovettori \vec{x}_j di uno spazio vettoriale posso scrivere un vettore $\vec{x}^{(0)}$ di tale spazio come combinazione lineare di tali autovettori:

$$\vec{x}^{(0)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j$$

Applico ora il metodo delle potenze:

$$\vec{y}^{(0)} = \frac{\vec{x}^{(0)}}{\|\vec{x}^{(0)}\|} = \frac{1}{\|\vec{x}^{(0)}\|} \vec{x}^{(0)} = \frac{1}{\|\vec{x}^{(0)}\|} \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j$$

Per definizione di autovalore:
 $A\vec{x}_j = \lambda_j \vec{x}_j$

$$\vec{x}^{(1)} = A\vec{y}^{(0)} = A \frac{1}{\|\vec{x}^{(0)}\|} \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j = \frac{1}{\|\vec{x}^{(0)}\|} \sum_{j=1}^n \alpha_j A\vec{x}_j = \frac{1}{\|\vec{x}^{(0)}\|} \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j \vec{x}_j$$

$$\vec{y}^{(1)} = \frac{\vec{x}^{(1)}}{\|\vec{x}^{(1)}\|} = \frac{1}{\|\vec{x}^{(1)}\|} \vec{x}^{(1)} = \frac{1}{\|\vec{x}^{(1)}\|} \frac{1}{\|\vec{x}^{(0)}\|} \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j \vec{x}_j = \frac{1}{\|\vec{x}^{(1)}\| \|\vec{x}^{(0)}\|} \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j \vec{x}_j$$

Si scopre quindi che per similitudine:

$$\vec{y}^{(k)} = \beta_k \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^{(k)} \vec{x}_j \quad \text{con } \beta_k = \frac{1}{\prod_{j=1}^k \|\vec{x}^{(j)}\|}$$

$\vec{y}^{(k)}$ può essere riscritto nel seguente modo:

$$\vec{y}^{(k)} = \beta_k \left[\alpha_1 \lambda_1^{(k)} \vec{x}_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \lambda_j^{(k)} \vec{x}_j \right] =$$

$$= \beta_k \left[\alpha_1 \lambda_1^{(k)} \vec{x}_1 + \lambda_1^{(k)} \sum_{j=2}^n \alpha_j \frac{\lambda_j^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}} \vec{x}_j \right] =$$

$$= \beta_k \lambda_1^{(k)} \left[\alpha_1 \vec{x}_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \frac{\lambda_j^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}} \vec{x}_j \right]$$

Perché $\frac{\lambda_j^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}} < 0$

se $k \rightarrow \infty$ $\frac{\lambda_j^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}} \rightarrow 0$ $\sum_{j=2}^n \alpha_j \frac{\lambda_j^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}} \rightarrow 0$ $\vec{y}^{(k)} \rightarrow \vec{x}_1$

Adeguatezza criterio delle differenza tra iterate successive per metodo iterazione di punto fisso

Enunciato: per valutare l'errore nel metodo di iterazione di punto fisso occorre utilizzare lo stimatore dell'errore. Tale stimatore può essere determinato in diversi modi, uno dei quali è proprio la differenza tra iterate successive ovvero:

$$\tilde{e}^{(k)} = |\delta^{(k)}| = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$$

Si vuole ora dimostrare quando questo criterio è soddisfacente, ovvero si vuole trovare una relazione che legghi lo stimatore dell'errore definito in questo modo con l'errore stesso.

Dimostrazione: per definizione di errore al passo $k + 1$ è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= \alpha - x^{(k+1)} = \\ &= \alpha - x^{(k)} - x^{(k+1)} + x^{(k)} = \\ &= \alpha - x^{(k)} - \delta^{(k)} \end{aligned}$$

È inoltre possibile riscrivere l'errore in quest'altro modo:

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= \alpha - x^{(k+1)} = \\ &= \phi(\alpha) - \phi(x^{(k)}) = \\ &= \phi'(\xi^{(k)})(\alpha - x^{(k)}) \end{aligned}$$

$\alpha = \phi(\alpha)$	per definizione di punto fisso
$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$	per algoritmo iterazione punto fisso

Eguagliando queste due soluzioni si ha:

$$\begin{aligned} \alpha - x^{(k)} - \delta^{(k)} &= \phi'(\alpha)(\alpha - x^{(k)}) \\ \alpha - x^{(k)} &= \phi'(\alpha)(\alpha - x^{(k)}) + \delta^{(k)} \\ \alpha - x^{(k)} &= \alpha\phi'(\alpha) - x^{(k)}\phi'(\alpha) + \delta^{(k)} \\ \alpha - x^{(k)} - \alpha\phi'(\alpha) + x^{(k)}\phi'(\alpha) &= \delta^{(k)} \\ (1 - \phi'(\alpha))\alpha - x^{(k)}(1 - \phi'(\alpha)) &= \delta^{(k)} \\ (1 - \phi'(\alpha))(\alpha - x^{(k)}) &= \delta^{(k)} \\ \alpha - x^{(k)} &= \frac{\delta^{(k)}}{1 - \phi'(\alpha)} \\ x^{(k)} - \alpha &= -\frac{1}{1 - \phi'(\alpha)}\delta^{(k)} \end{aligned}$$

$$e^{(k)} = \frac{1}{1 - \phi'(\alpha)} \delta^{(k)}$$

$$e^{(k)} = \frac{1}{1 - \phi'(\alpha)} \tilde{e}^{(k)}$$

Quindi:

- Se $\phi'(\alpha) \cong 0$ \rightarrow $\tilde{e}^{(k)} \cong \tilde{e}^{(k)}$ \rightarrow criterio soddisfacente
- Se $\phi'(\alpha) \lesssim 1$ \rightarrow $\tilde{e}^{(k)} \gg \tilde{e}^{(k)}$ \rightarrow criterio insoddisfacente
- Se $\phi'(\alpha) \gtrsim 1$ \rightarrow $\tilde{e}^{(k)} \cong \frac{1}{2} \tilde{e}^{(k)}$ \rightarrow criterio soddisfacente anche se l'errore è sovrastimato

Metodo di Newton come metodo di iterazione di punto fisso

Enunciato: Il metodo di Newton può essere considerato un particolare metodo di iterazione di punto fisso

Dimostrazione: per definizione l'iterata al passo $k + 1$ con il metodo di iterazione di punto fisso è:

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

Mentre Newton è:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Dunque, può essere vista un particolare metodo di iterazione di punto fisso

$$\phi_N(x^{(k)}) = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Equivalenza tra minimo di energia e approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Enunciato:

Dimostrazione:

Formula dell'errore di punto medio semplice

Enunciato: l'errore associato alla formula del punto medio semplice è:

$$e_{pm} = I(f) - I_{pm}(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

Dimostrazione: definiamo il punto medio e l'espansione in serie di Taylor della funzione $f(x)$:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\eta(\bar{x}))(x - \bar{x})^2$$

Calcoliamo ora l'integrale della funzione:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx =$$

$$= \int_a^b \left[f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\eta(\bar{x}))(x - \bar{x})^2 \right] dx =$$

$$= \int_a^b f(\bar{x}) dx + \int_a^b f'(\bar{x})(x - \bar{x}) dx + \int_a^b \frac{1}{2} f''(\eta(\bar{x}))(x - \bar{x})^2 dx =$$

$$= \int_a^b f(\bar{x}) dx + \int_a^b f'(\bar{x})(x - \bar{x}) dx + \int_a^b \frac{1}{2} f''(\eta(\bar{x}))(x - \bar{x})^2 dx =$$

$$= I_{pm}(f) + f'(\bar{x}) \int_a^b (x - \bar{x}) dx + \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x - \bar{x})^2 dx =$$

$$= I_{pm}(f) + \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x - \bar{x})^2 dx =$$

$$= I_{pm}(f) + \frac{1}{2} f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{12} =$$

$$= I_{pm}(f) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

$$e_{pm} = I(f) - I_{pm}(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

Termine nullo

Per teorema del valor medio

Buona posizione dell'equazioni differenziali ordinarie

Enunciato: Se il problema è stabile allora è anche ben posto ovvero la soluzione esiste ed è unica in I .

Dimostrazione: (richiesta all'orale)

Risultato di convergenza per il metodo di Eulero in avanti

Enunciato: Eulero esplicito converge con ordine 1 se $y \in C^1(I)$

Dimostrazione: definiamo l'errore come somma di due contributi: $\bar{e}_n = (y_n - u_n^*) + (u_n^* - u_n)$

Studiamo ora i due errori separatamente:

- Il primo errore altro non è che il prodotto tra l'errore di troncamento globale per l'ampiezza degli intervalli di discretizzazione dunque si ha:

$$h\tau_n = y_n - u_n^*$$

Per definizione possiamo riscrivere u_n^* nel seguente modo:

$$u_n^* = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

E scrivere y_n in quest'altro:

$$y_n = y_{n-1} + h\dot{y}_{n-1} + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(\xi_n)$$

Sostituendo queste grandezze nell'espressione precedente si ottiene:

$$h\tau_n = y_n - u_n^* =$$

$$= y_{n-1} + h\dot{y}_{n-1} + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(\xi_n) - y_{n-1} - hf(t_{n-1}, y_{n-1}) =$$

$$= \frac{h^2}{2}\ddot{y}(\xi_n) = \frac{h^2}{2}M$$

$\dot{y}_{n-1} = f(t_{n-1}, y_{n-1})$

Ne consegue che:

$$|y_n - u_n^*| \leq M \frac{h^2}{2} = h\tau_n$$

- Per analizzare la seconda componente dell'errore $u_n^* - u_n$, scriviamo per prima cosa i due termini:

$$u_n^* = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

$$u_n = u_{n-1} + hf(t_{n-1}, u_{n-1})$$

Si ha quindi:

$$u_n^* - u_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}) - u_{n-1} - hf(t_{n-1}, u_{n-1})$$

Scrivendo la relazione con i moduli si ottiene:

$$|u_n^* - u_n| \leq |y_{n-1} - u_{n-1}| + h|f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})|$$

$$|u_n^* - u_n| \leq |e_{n-1}| + hL|y_{n-1} - u_{n-1}|$$

$$|u_n^* - u_n| \leq |e_{n-1}| + hL|e_{n-1}|$$

$$|u_n^* - u_n| \leq (1 + hL)|e_{n-1}|$$

Combiniamo ora le due componenti dell'errore:

$$\bar{e}_n = (y_n - u_n^*) + (u_n^* - u_n)$$

$$|e_n| \leq (y_n - u_n^*) + (u_n^* - u_n)$$

$$|e_n| \leq h\tau_n + (1 + hL)|e_{n-1}|$$

Stabilità condizionata dei metodi numerici per risolvere EDO

Enunciato:

Dimostrazione:

Metodo dell'energia per dimostrare unicità della soluzione del problema di diffusione

Enunciato: la soluzione al problema di diffusione esiste ed è unica

Dimostrazione: Per dimostrare ciò procediamo per assurdo e dunque ipotizziamo che esistano due soluzioni distinte $u(x, t)$ e $w(x, t)$ al problema di diffusione con condizioni al contorno Cauchy-Dirichlet. Essendo distinte è possibile calcolarne la differenza e stabilire così una nuova funzione:

$$v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$$

Definiamo ora il nuovo problema di diffusione:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0, t) = 0 \\ v(L, t) = 0 \\ v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) \end{cases}$$

Prendiamo la prima equazione del sistema e moltiplichiamola a destra e a sinistra per la stessa funzione $v(x, t)$ e integriamo poi sulla lunghezza:

$$v \frac{\partial v}{\partial t} = v \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\int_0^L v \frac{\partial v}{\partial t} dx = \int_0^L v \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx$$

Analizziamo ora separatamente i due termini dell'equazione, partendo dal primo. Mediante una serie di passaggi matematici è possibile ricondursi all'espressione dell'energia nel tempo. Tale valore può dunque essere solo maggiore o tutt'al più uguale a 0:

$$\int_0^L v \frac{\partial v}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{v^2}{2} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_0^L v^2 dx = \frac{\partial}{\partial t} E(t) \geq 0$$

Sviluppiamo ora il secondo termine integrandolo per parti, è possibile notare che il primo termine si annulla mentre il secondo altro non è anch'esso che la derivata parziale dell'energia. A causa del meno però questo termine può solo essere negativo o tutt'al più uguale a 0:

$$\begin{aligned} \int_0^L v \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx &= \mu \int_0^L v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \\ &= \mu \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx - \mu \int_0^L \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \\ &= \mu \left[v(L, t) \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) - v(0, t) \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) \right] - \mu \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx = \\ &= 0 - \mu \frac{\partial}{\partial t} E(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Affinché valga l'uguaglianza occorre l'energia sia nulla dunque essendo $E(t) = 0$ allora si avrà che $v(x, t) = 0$ e quindi $u(x, t) = w(x, t)$ è dunque dimostrata l'unicità della soluzione.

Teorema di esistenza e unicità della soluzione di problemi di diffusione in dimensione spaziale maggiore di 1

Enunciato: la soluzione al problema di diffusione in dimensione spaziale maggiore di uno esiste ed è unica

Dimostrazione: Per dimostrare ciò procediamo per assurdo e dunque ipotizziamo che esistano due soluzioni distinte $u(\vec{x}, t)$ e $w(\vec{x}, t)$ al problema di diffusione in dimensione spaziale maggiore di uno. Essendo distinte è possibile calcolarne la differenza e stabilire così una nuova funzione:

$$v(\vec{x}, t) = u(\vec{x}, t) - w(\vec{x}, t)$$

Definiamo ora il nuovo problema di diffusione:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \Delta v \\ (\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) \\ v(\vec{x}, t) = 0 \end{cases}$$

Prendiamo la prima equazione del sistema e moltiplichiamola a destra e a sinistra per la stessa funzione $v(\vec{x}, t) = 0$ e integriamo poi Ω :

$$v \frac{\partial v}{\partial t} = v \mu \Delta v$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} v \mu \Delta v d\Omega$$

Analizziamo ora separatamente i due termini dell'equazione, partendo dal primo. Mediante una serie di passaggi matematici è possibile ricondursi all'espressione dell'energia nel tempo. Tale valore può dunque essere solo maggiore o tutt'al più uguale a 0:

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} E(t) \geq 0$$

Sviluppiamo ora il secondo termine integrandolo per parti, notiamo che questo termine può solo essere negativo o tutt'al più uguale a 0:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \mu \Delta v d\Omega &= \mu \int_{\Omega} v \Delta v d\Omega = \mu \int_{\Omega} v (\vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} v) d\Omega = \\ &= \mu \oint_{\partial\Omega} v \vec{\nabla} v \cdot \hat{n} d\partial\Omega - \mu \int_{\Omega} \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} v d\Omega = \\ &= \mu \oint_{\partial\Gamma} v \vec{\nabla} v \cdot \hat{n} d\Gamma - \mu \int_{\Omega} \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} v d\Omega \leq 0 \end{aligned}$$

Affinché valga l'uguaglianza occorre l'energia sia nulla dunque essendo $E(t) = 0$ allora si avrà che $v(\vec{x}, t) = 0$ e quindi $u(\vec{x}, t) = w(\vec{x}, t)$ è dunque dimostrata l'unicità della soluzione.

Unicità della soluzione di problemi di diffusione in dimensione spaziale maggiore di 1 tramite metodo dell'energia (metodo integrale)

Enunciato: la soluzione al problema di diffusione esiste ed è unica

Dimostrazione: Per dimostrare ciò procediamo per assurdo e dunque ipotizziamo che esistano due soluzioni distinte $u(x, t)$ e $w(x, t)$ al problema di diffusione con condizioni al contorno Cauchy-Dirichlet. Essendo distinte è