CINEMATICA DEL PUNTO

Introduzione

Con il termine cinematica si indica lo studio del moto dei corpi. Per poter studiare ciò si approssima la realtà tramite una schematizzazione della stessa. La prima approssimazione che si effettua è il punto materiale: il corpo studiato in cinematica è un punto materiale cioè un ente privo di dimensione che gode però di una proprietà particolare: la massa. Il moto di un punto materiale è determinato se è nota la sua posizione in funzione di un determinato sistema riferimento; noi prenderemo in considerazione la terna cartesiana ortogonale destra. È importante sottolineare che le caratteristiche cinematiche di un corpo non dipendono mai dal sistema di riferimento scelto.
Se si desidera descrivere in modo completo un moto è necessario usare la seguente relazione:

$$r(t) = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}$$

Quest'espressione risulta però essere abbastanza complicata e quindi molto spesso di preferisce considerare un moto a una sola dimensione.

CINEMATICA: moto rettilineo

Moto rettilineo

Si definisce legge oraria il legame tra la posizione della particella e il tempo. L'insieme dei punti raggiunti dal punto materiale è detto traiettoria. In un modo monodimensionale la traiettoria è un segmento, altrimenti questa potrebbe assumere diverse conformazioni. Per conoscere la rapidità con cui la particella cambia luogo introduciamo la velocità media. La definizione di velocità media è una definizione operativa. Questo concetto risulta tanto più preciso tanto più gli intervalli di tempo sono piccoli; facendo dunque tendere gli intervalli di tempo a 0 si introduce la velocità istantanea cioè la derivata della legge oraria rispetto al tempo. Se si considera la variazione di velocità di parla invece di accelerazione media e se si diminuiscono sempre più gli intervalli di tempo in cui si calcola questa variazione si parla invece di accelerazione istantanea.

$$x = x(t)$$

$$< v > = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} < v > = \frac{dx}{dt}$$

$$< a > = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} < a > = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

La maggior parte dei moti presentano una variazione di accelerazione; se dunque a(t) varia nel tempo potrei pormi il problema di studiare questa variazione. In linea di principio si potrebbe dunque derivare a(t) ottenendo dunque un nuovo valore, praticamente però ciò non viene effettuato poiché non si otterrebbero nuove informazioni al fine di determinare la legge orario. Il tema principale della cinematica è infatti stabilire la legge oraria di un corpo e dunque la derivata dell'accelerazione non servirebbe a questo scopo. Il problema della cinematica è esclusivamente di tipo predittivo.
Ovviamente è possibile conoscere la velocità e la posizione di una particella conoscendo l'accelerazione, la velocità iniziale e la posizione iniziale, se si considera questa grandezza come rapporto tra intervalli infinitesimi:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$a(t)dt = dv$$

$$v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$v(t)dt = dx$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$$

Moto rettilineo uniforme
Nel caso particolare in cui v = costante si parla di moto rettilineo uniforme. Questo tipo di moto ha un'equazione caratteristica che ne descrive la legge oraria e che mette in evidenza che lo spazio è una funzione lineare del tempo: in tempi uguali sono percorsi spazi uguali:

$$x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0)$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato
Nel caso particolare in cui a = costante si parla di moto rettilineo uniformemente accelerato. Questo tipo di moto ha alcune equazioni che ne descrivono la legge oraria e che mettono in evidenza la dipendenza lineare della velocità dal tempo:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\, a(t - t_0)^2$$

Moto verticale di un corpo
Se si trascura la resistenza dell'aria un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante g = 9,8 ms^{-2}. Il moto osservato sperimentalmente è dunque rettilineo uniformante accelerato. È dunque possibile calcolare il tempo di caduta e il modulo della velocità con cui il corpo giunge al suolo:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_c = \sqrt{2gh}$$

Moto armonico semplice
Un punto esegue un moto armonico semplice quando la legge oraria è definita dalla relazione:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

A è detta ampiezza del moto, mentre l'argomento del seno è detta fase del moto con ω detta pulsazione. È possibile determinare il periodo e la pulsazione del moto tramite delle particolari equazioni e anche la frequenza v:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Possiamo anche definire la velocità e l'accelerazione:

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

CINEMATICA: moto nel piano

Moto nel piano

Molto spesso però la schematizzazione monodimensionale non è corretta o quanto meno sufficiente a descrivere correttamente il comportamento del punto materiale dunque vengono considerati anche moti bidimensionali. Così come in moti monodimensionali la cinematica si occupa di conoscere la legge oraria, in questo caso specifico è possibile esplicitare le singole componenti che caratterizzano il moto:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\vec{r} = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$

Oltre a generalizzare il concetto di legge oraria è necessario generalizzare anche il concetto di velocità. La velocità risulterà essere sempre tangente alla traiettoria e ciò indipendentemente dal sistema di riferimento scelto. La cosa interessante da sottolineare è che in moti bidimensionali può essere comodo e utili considerare la velocità nelle sue due componenti:

$$< v > = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{u}_x + y_x\vec{u}_y$$

Anche la velocità può dunque essere riformulata ed è inoltre possibile mettere in evidenza le sue due componenti che vengono chiamate tangenziale e normale:

$$< \vec{a} > = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} < \vec{a} > = \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\alpha}{dt}\vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

Moto circolare
SI definisce moto circolare un moto piano la cui traiettoria è rappresenta da una circonferenza; ciò significa che la particella si muove sempre a una distanza costante dal centro. Considerando che la velocità varia continuamente in direzione, l'accelerazione centripeta è sempre diversa da 0 e quindi agisce una forza detta centripeta diretta verso il centro della circonferenza. Per comodità si sceglie di descrivere il moto della particella in relazione all'angolo e non al tempo; le coordinate usate saranno quelle angolari e indicheranno il grado di libertà:

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \end{cases}$$

Anche nel caso della velocità sarà più comodo utilizzare le due diverse componenti, anche se è possibile comunque conoscere il modulo della velocità stessa:

$$\begin{cases} v_x = -R\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} \\ v_y = R\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega = \frac{v}{R}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega = \frac{2\pi R}{T}$$

ω è la velocità angolare il cui vettore è sempre tangente al piano della circonferenza e verso uscente o entrante a seconda della regola del cavatappi. Se la velocità non risulta essere costante e dunque la particella accelera o decelera allora si introduce l'accelerazione, nelle sue componenti:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{Rd\omega}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

Moto parabolico
Il moto parabolico è un tipo di moto bidimensionale esprimibile attraverso la combinazione di due moti rettilinei simultanei ed indipendenti: moto rettilineo uniforme e moto rettilineo uniformemente accelerato. Lo studio di questo moto si concentra in particolare sul calcolo della traiettoria, della massima altezza raggiunta dal corpo e dalla gittata cioè la posizione in cui il punto ricade sull'asse delle x.

$$\begin{cases} x = v_0\cos\theta t \\ y = v\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$y = \tan\theta - \frac{g}{2v_0^2(\cos\theta)^2}x^2$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2\,(\sin\theta)^2}{2g}$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \ \sin 2\theta}{g}$$

Moto relativo

Abbiamo iniziato lo studio della cinematica chiarendo il concetto che lo studio di un corpo in movimento e di conseguenza la definizione della sua traiettoria è possibile se definiamo a priori un certo sistema di riferimento rispetto al quale calcolare la posizione del corpo e derivarne le leggi del moto.

Le leggi fisiche ricavate valgono in questo primo sistema di riferimento ma nulla ci impedisce di prenderne in considerazione un altro rispetto al quale il corpo ha una posizione differente ma le leggi che regolano il moto sono dello stesso tipo. Quindi possiamo affermare che le leggi fisiche non dipendono dal sistema di riferimento ma per esse lo spazio è omogeneo ed isotropo, ovvero non vi è un punto privilegiato e nemmeno una direzione privilegiata per lo studio delle leggi fisiche.

Tutto questo vale se i due sistemi di riferimento sono fissi, ma nel caso uno fosse in moto relativo rispetto all'altro allora le cose cambiano: le leggi sono differenti nei due sistemi di riferimento.

Iniziamo col dire che presi due sistemi di riferimento con origine O (fisso) e O' (in moto) un punto P nello spazio ha una distanza r da O e una distanza r' da O'. Possiamo allora dire che:

$$\vec{r} = OO' + \vec{r}'$$

E ora, utilizzando le regole di derivazione dei versori e dei vettori e i concetti di relazioni tra spazio, velocità ad accelerazione cerchiamo di ottenere le relazioni vettoriali fondamentali per i due sistemi. Chiamiamo v la velocità rispetto al sistema fisso e v' rispetto al sistema in moto:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w} + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$$

Unità di misura	
Lunghezza	m
Velocità	m/s
Accelerazione	m/s^2
Ampiezza	m
Periodo	s
Frequenza	$Hz = s^{-1}$
Fase	rad
Pulsazione	rad/s
Velocità angolare	rad/s
Accelerazione angolare	rad/s^2