Giustificare le risposte e scrivere in modo chiaro e leggibile. Sostituire i valori numerici solo alla fine, dopo aver ricavato le espressioni letterali. Indicare nome e cognome (in stampatello) e matricola su ogni foglio.

Elettrostatica e Magnetostatica

1. Alcune particelle (massa \( m \), carica \( q > 0 \)) inizialmente ferme vengono accelerate da una differenza di potenziale \( V > 0 \). Poi entrano in una regione in cui vi è un campo magnetico uniforme \( B \), ortogonale alla loro traiettoria iniziale, diretto come in figura. Dopo avere percorso una semicirconferenza le particelle escono dalla regione con il campo magnetico ad una distanza \( D \) dal punto di ingresso.
   a) Determinare la velocità delle particelle all’ingresso e all’uscita della regione in cui è presente campo magnetico.
   b) Ricavare l’espressione della distanza \( D \).
   c) Indicare in che modo l’apparato va modificato per funzionare con particelle cariche negativamente.

2. Un sistema è costituito da due cariche elettriche puntiformi \( q_1 \) e \( q_2 \) poste a distanza \( d \).
   a) Dare l’espressione vettoriale della forza elettrica agenti su una carica \( q_3 \) posta in un generico punto del segmento congiungente le due cariche.
   b) Determinare il punto di tale segmento in cui la forza si annulla, nell’ipotesi \( q_1 = 9q_2 \). Stabilire se questo rappresenta un punto di equilibrio stabile o instabile per \( q_3 \).
   c) Determinare l’energia potenziale elettrica della carica \( q_3 \) posta in questo punto.

3. Si è visto sperimentalmente che, mettendo in contatto una sfera isolata con la carica \( Q \) ed una sfera ad essa uguale ed inizialmente scarica, la carica della prima sfera si dimezza. Lo stesso tipo di fenomeno può essere osservato tenendo molto distanti le due sfere e collegandole con un filo conduttore.
   a) Si dica cosa succederebbe in quest’ultimo caso se si collegasse la prima sfera con una seconda di raggio doppio.
   b) Sia \( C_p = 15 \times 10^{-12} \) F la capacità della gabbia di Faraday, assimilabile ad un condensatore cilindrico. L’armatura esterna è posta a terra. Determinare la carica totale presente sulle sfere di raggio minore supponendo che il trasferitore avesse prelevato 1/100 della carica presente sulla superficie di quest’ulima e che tale carica induca ai capi dell’elettrometro una differenza di potenziale pari a 25 V.
   c) Dire quale tensione misura l’elettrometro nel caso in cui invece di quella esterna venga messa a terra l’armatura interna.

4. Una spira quadrata indeformabile di lato \( L = 5 \) cm è percorsa da una corrente elettrica di intensità \( I_c = 4 \) A. Complanare con la spira e alla distanza \( d = 20 \) cm da uno dei suoi lati, un filo rettilineo ed infinitamente esteso (anch’esso indeformabile) è percorso da una corrente elettrica di intensità pari a \( I_t = 10 \) A.
   a) Calcolare la risultante delle forze agenti sulla spira.
   b) Con i versi delle correnti indicati in figura, la spira viene attratta o respinta dal filo?
   c) Calcolare la risultante delle forze agenti sul filo. 
   \( (\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7} \text{ Wb}^2 \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{A}^{-2}) \)
Esercizio 1

a) Applicando il principio di conservazione dell’energia delle particelle:

\[ E_k^i + E_p^i = E_k^f + E_p^f \]

si ottiene

\[ \Delta E_k = -\Delta E_p = qV . \]

All’istante iniziale le particelle cariche hanno energia cinetica \( E_k^i = 0 \), da cui si ricava che l’energia cinetica \( E_k^f \) di ogni particella carica che raggiunge con velocità \( v \) la regione in cui è presente campo magnetico vale:

\[ E_k^f = qV = \frac{1}{2} mv^2 , \]

\[ v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} . \]

Nella regione in cui è presente campo magnetico, essendo \( B \) perpendicolare alla velocità, il moto delle particelle è circolare uniforme, con accelerazione centripeta \( a_{cp} \) costante ottenuta dall’espressione della forza di Lorentz:

\[ F = ma_{cp} = qvB . \]

La forza di Lorentz non compie lavoro sulla particella, quindi non ne modifica l’energia cinetica e il modulo della velocità.

b) L’accelerazione centripeta di un corpo in moto circolare uniforme è legata al raggio \( R \) dell’orbita:

\[ a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{2qV}{mR} \]

per cui si ottiene:
c) Per far compiere a particelle cariche negativamente la stessa traiettoria indicata nella figura dell’esercizio bisogna utilizzare una differenza di potenziale $V$ negativa e un campo magnetico $B$ entrante nel piano del foglio.

\[ 2R = D = \frac{4V}{vB} = \frac{\sqrt{8V}}{B} \frac{m}{q}. \]
Esercizio 2

a) Sia $X$ l’asse che ha per direzione quella della retta che unisce le due cariche. La coordinata $x$ indichi la posizione della carica $q_3$. La carica $q_1$ si trovi nell’origine di $X$, mentre la carica $q_2$ si trovi nel punto di coordinata $x = d$. La forza totale che agisce su $q_3$ è la somma vettoriale delle forze di Coulomb dovute all’interazione elettrostatica di $q_3$ con $q_1$ e $q_2$, considerate singolarmente. Tale forza ha componente non nulla solo nella direzione $X$. Tale componente $F_X$ ha la seguente espressione (valida in modulo e segno indipendentemente dal segno delle cariche):

$$F_X = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \frac{q_1q_3}{x^2} - \frac{q_2q_3}{(x-d)^2} \right].$$

b) Il punto $\bar{x}$ in cui la forza si annulla è dato da:

$$F_X = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{\bar{x}^2} = \frac{q_2}{(\bar{x}-d)^2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3}{4}d \text{ oppure } \bar{x} = \frac{3}{2}d.$$

La seconda soluzione corrisponde ad una posizione che non si trova sul segmento che congiunge le cariche $q_1$ e $q_2$ e va quindi scartata poiché in quel punto l’espressione di $F_X$ di cui al punto a) non è più valida. In $\bar{x}$ la carica $q_3$, vincolata a muoversi lungo il segmento congiungente $q_1$ e $q_2$, si trova in un punto di equilibrio stabile quando $q_1$, $q_2$ e $q_3$ hanno lo stesso segno, mentre l’equilibrio è instabile quando $q_1$, $q_2$ hanno segno opposto a $q_3$. Questo perché nel primo caso per ogni piccolo spostamento dalla posizione di equilibrio la forza totale tende a riportare la carica in $\bar{x}$, mentre nel secondo ad allontanarla ulteriormente; essendo la forza elettrostatica conservativa, ciò corrisponde al fatto che il punto $\bar{x}$ è un punto di minimo relativo dell’energia potenziale nel primo caso e di massimo relativo nel secondo.

c) L’energia potenziale elettrica di $q_3$ posta nel punto di coordinata $\bar{x}$ è la somma delle energie potenziali dovute all’interazione con le cariche $q_1$ e $q_2$ prese singolarmente. L’espressione dell’energia potenziale $E_p$ di $q_3$ è quindi pari a (indipendentemente dal segno delle cariche):

$$E_p = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \frac{q_1q_3}{|\bar{x}|} + \frac{q_2q_3}{|\bar{x}-d|} \right] = \frac{4}{\pi \varepsilon_0} \frac{q_2q_3}{d}.$$
Esercizio 3

a) Due sfere sufficientemente distanti esercitano effetti di mutua induzione trascurabili. Quindi le due sfere si portano ad un potenziale pari rispettivamente a:

\[ V_1 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q_1}{R_1}, \]
\[ V_2 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}, \]

con \( Q \) pari alla carica e \( R \) pari al raggio della sfera. Collegando le due sfere con un filo conduttore, si impone la condizione \( V_1 = V_2 \), da cui si ottiene:

\[ \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}. \]

Da \( R_1 = 2R_2 \) si ottiene \( Q_1 = 2Q_2 \).

b) Sia \( q \) la carica prelevata dal trasferitore. Sapendo che \( 100q = Q_2 \) e che \( V_{elettr.} = 25 \, V = q/C_F \), si ricava

\[ Q_2 = 3.75 \times 10^{-8} \, C. \]

c) Mettendo a massa l’armatura interna della gabbia di Faraday si scherma l’armatura esterna dalla carica contenuta all’interno della gabbia. Pertanto, l’elettrometro misurerebbe una differenza di potenziale nulla fra le due armature.
Esercizio 4

a) Per simmetria, le linee di forza del campo magnetico $B$ generato dal filo rettilineo sono delle circonferenze con centro sul filo stesso e giacenti in piani ad esso perpendicolari. Applicando il teorema della circuitazione si ricava che il modulo $B$ del campo magnetico generato dal filo ha il seguente valore:

$$B = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi r},$$

dove $r$ è la distanza dal filo. Il campo magnetico $B$, in corrispondenza della spira, è diretto dall’osservatore verso la pagina ed è perpendicolare al piano della spira stessa.

I due lati della spira perpendicolari al filo sono percorsi da correnti di verso opposto. Le forze applicate a ciascuno di essi hanno stesso modulo, sono parallele al filo rettilineo e hanno versi opposti l’una rispetto all’altra. La loro risultante è quindi nulla.

La forza esercitata su ciascuno dei due lati della spira paralleli al filo vale:

$$F = I_i \mathbf{L} \times \mathbf{B},$$

ovvero

$$F = L \frac{\mu_0 I_i I_i}{2\pi d} \quad \text{per il lato più vicino al filo,}$$

$$F = L \frac{\mu_0 I_i I_i}{2\pi (d + L)} \quad \text{per il lato più lontano dal filo.}$$

Tali forze sono perpendicolari al filo. Nei due lati della spira la corrente ha verso opposto. La risultante delle forze agenti sulla spira è diretta verso il filo e ha modulo pari a:

$$F_{\text{tot}} = L \frac{\mu_0 I_i I_i}{2\pi} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d + L} \right) = 4 \times 10^{-7} \text{ N}.$$
b) Con i versi delle correnti indicati in figura il lato della spira viene attratto dal filo (correnti concordi), mentre quello più lontano ne viene respinto. Siccome la forza è inversamente proporzionale alla distanza, la spira viene attratta dal filo.

c) Per il principio di azione e reazione, la forza che la spira esercita sul filo è uguale in modulo e direzione ma opposta in verso a quella che il filo esercita sulla spira.