Michela Eleuteri

ANALISI MATEMATICA

Funzioni di più variabili reali

Continuità, derivabilità, differenziabilità

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili

1.1. Derivate parziali, derivabilità e piano tangente

Sia $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Dall'Analisi I è ben chiaro il concetto di derivata in un punto definita come limite del rapporto incrementale

$$g'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

La derivata di una funzione in un punto ha un interessante significato geometrico: infatti è il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto (che ha il significato di approssimare localmente la funzione data); inoltre g è derivabile se e soltanto se è ben definita la retta tangente in quel punto.

In questo capitolo vorremmo tentare di estendere questi concetti anche al caso di funzioni di più variabili. Ci accorgeremo che non sempre è verificato ciò che ci si aspetta e la presenza di più variabili porta a diverse nozioni di derivabilità e a situazioni inusuali nel contesto di una variabile. Presenteremo i risultati nella maggioranza dei casi per $n = 2$ sia perché è il caso più semplice (e quindi più leggibile e perciò di più immediata comprensione) che per il fatto che per una funzione di due variabili è possibile una visualizzazione nello spazio euclideo. Naturalmente l'estensione in più di due variabili è possibile e spesso richiede solo un formalismo tecnico maggiore.

Innanzitutto la definizione di derivata per una funzione di più variabili vista come limite del rapporto incrementale non è più applicabile: intanto non è ovvio che cosa sia un incremento in più dimensioni e secondariamente anche se si arrivasse a una definizione accettabile, non si sa cosa voglia dire dividere per un vettore (la controparte di h nella definizione scalare di derivata). Quindi la soluzione non è affatto banale.

Una prima soluzione consiste nel tentare di incrementare una variabile alla volta, cercando di utilizzare la nozione di derivata che conosciamo dall'Analisi I. Sia dunque $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili il cui grafico in $\mathbb{R}^3$ rappresenta una superficie di equazione $z = f(x, y)$. Supponiamo di voler tenere y costante, per esempio $y = y_0$ e andiamo a considerare la funzione $x \mapsto f(x, y_0)$. Questa è una funzione della sola variabile x perciò di essa si sa calcolare la derivata in un punto $x = x_0$ come limite del rapporto incrementale. La stessa cosa si può fare tenendo costante $x = x_0$ e andando a fare la derivata della funzione di una sola variabile $y \mapsto f(x_0, y)$. Si arriva perciò alle seguenti definizioni.

❒ **Definizione 1.1.1.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. La quantità (se esiste)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si chiama DERIVATA PARZIALE DI f FATTA RISPETTO A x CALCOLATA NEL PUNTO (x_0, y_0); analogamente la quantità (se esiste)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

si chiama DERIVATA PARZIALE DI f FATTA RISPETTO A y CALCOLATA NEL PUNTO (x_0, y_0)

Si noti che trattandosi di limiti, le derivate parziali in un punto potrebbero anche non esistere. Per indicare le derivate parziali in letteratura si usa una delle seguenti notazioni

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \partial_x f(x_0, y_0) & f_x(x_0, y_0) & D_x f(x_0, y_0) & D_1 f(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) & D_y f(x_0, y_0) & D_2 f(x_0, y_0) \end{array}$$

❒ **Definizione 1.1.2.** Il vettore che ha per componenti le derivate parziali di f in (x_0, y_0) si dice GRADIENTE DI f IN (x_0, y_0) e si indica con una delle seguenti notazioni

$$\nabla f(x_0, y_0) \qquad Df(x_0, y_0) \qquad \mathrm{grad} f(x_0, y_0).$$

☞ **Osservazione 1.1.3.** Se occorre calcolare le derivate parziali di f in un punto (x_0, y_0) è necessario che gli incrementi lungo una delle due variabili, quindi $x_0 + h$ oppure $y_0 + k$ stiano ancora nel dominio di f, almeno per un incremento abbastanza piccolo. Questo naturalmente è vero se il dominio di f è un aperto. Quindi d'ora in avanti considereremo sempre $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con A aperto.

❒ **Definizione 1.1.4.** Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice DERIVABILE in un punto del suo dominio se in quel punto esistono tutte le derivate parziali; f si dice DERIVABILE in tutto A se è derivabile in ogni punto di A.

☞ **Osservazione 1.1.5.** La nozione di derivabilià, di derivata parziale e di gradiente si può tranquillamente estendere al caso $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n > 2$. In tal caso, se f è derivabile in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si avrà

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

✎ **Esempio 1.1.6.** *La funzione $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}$ è derivabile ovunque su $\mathbb{R}^2$; la funzione $f(x, y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ è derivabile ovunque tranne che in $(0, 0)$. Infatti si ha*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-|h|} - 1}{h}$$

che non esiste perché vale 1 se $h \to 0^+$ e -1 se $h \to 0^-$. Analogo comportamento si ottiene per $f_y(0, 0)$.
Osserviamo che la controparte in una variabile sarebbe: la funzione $g(t) = e^{-t^2}$ è derivabile ovunque su $\mathbb{R}$ mentre la funzione $g(t) = e^{-|t|}$ è derivabile ovunque tranne che in 0 dove ha un punto angoloso. Quindi alcuni comportamenti naturali nel caso di una variabile hanno effettivamente una controparte analoga in più variabili; altri comportamenti invece no: ci sono situazioni in più variabili che non hanno controparte in una variabile, come chiariranno i prossimi esempi.

✎ **Esempio 1.1.7.** *Cacolare (se esistono) le derivate parziali della funzione*

$$f(x, y) = y^3 \sin x + 2xy^2 + x^3$$

prima nel generico punto $(x.y)$ e poi nel punto $(\pi, 0)$.

Usando le regole di calcolo provenienti dall'Analisi I (quindi evitando di fare sempre ricorso alla definizione quando si lavora con funzioni di una variabile che sono derivabili) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^3 \cos x + 2y^2 + 3x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 \sin x + 4xy$$

e quindi, avendo ottenuto funzioni continue, si ottiene semplicemente per sostituzione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 0) = 3\pi^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\pi, 0) = 0.$$

Quindi nell'esempio precedente, trattandosi di funzioni derivabili rispetto all'una o all'altra variabile, si può tranquillamente far ricorso alle regole note di derivazione senza usare necessariamente la definizione. Quando è obbligatorio invece far ricorso alla definizione? Quando si ha a che fare con funzioni che nell'una o nell'altra variabile presentano un punto di non derivabilità (almeno appartentemente) oppure per funzioni definite "a tratti" nel senso specificato dai prossimi 3 esempi.

✎ **Esempio 1.1.8.** *Sia* $f(x,y) = y\sqrt{x}$. *Calcolare (se esiste)* $f_x(0,0)$.

È chiaro che $\sqrt{x}$ non è derivabile in 0, quindi ci si aspetta un comportamento critico vicino all'origine. Supponiamo che non ci si accorga di questa singolarità e si proceda come al punto precedente. Si avrebbe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{x}}_{|(0,0)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

che si presenta quindi sotto una forma di indecisione. Quindi il calcolo della derivata parziale tramite la definizione risulta l'unica via percorribile in ogni caso. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

☞ **Osservazione 1.1.9.** Prima di tutto osserviamo nell'esempio precedente che il limite esiste quindi esiste la derivata parziale di f in $(0,0)$ contro l'intuizione che ci poteva far pensare che la presenza di un punto di non derivabilità per $\sqrt{x}$ potesse rendere singolare anche il comportamento dell'intera f. Quindi è bene in più variabili affidarsi poco all'intuito e molto al ragionamento analitico, per evitare brutte sorprese!
Secondariamente osserviamo che nell'ultima riga dell'esempio precedente, la quantità $\frac{0}{h}$ non è una forma di indecisione! Infatti al numeratore si ha 0 "secco", mentre al denominatore si ha h una quantità che almeno prima del processo di limite è *diversa da zero*; quindi la quantità $\frac{0}{h}$ è sempre zero e quindi dopo il passaggio al limite risulta di nuovo zero (il limite di 0 è sempre 0).

✎ **Esempio 1.1.10.** *Sia* f *la funzione di due variabili definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcolare (se esiste) $f_x(0,0)$

In questo caso non si può fare a meno di calcolare la derivata parziale richiesta utilizzando la definizione. Un errore GRAVE e molto comune è dire: f in $(0,0)$ vale 1 che è una costante dunque la derivata di una costante fa zero. Questo ragionamento è errato! Ci mancherebbe che la funzione in un punto assumesse più valori!!! La funzione in un punto è sempre costante (per definizione stessa di funzione), quindi ovviamente questa non è una strada percorribile.
Utilizziamo allora la definizione di derivata parziale. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-1}{h}$$

e quest'ultimo limite non esiste (se $h\to 0^+$ fa $-\infty$ mentre se $h\to 0^-$ fa $+\infty$). Dunque la derivata parziale di f in $(0,0)$ non esiste e dunque f non è derivabile nella direzione dell'asse delle x.

☞ **Osservazione 1.1.11.** Intuitivamente si poteva ragionare come segue: la funzione dell'esempio precedente non è continua quindi ci si aspetta che non sia nemmeno derivabile, nel senso che non esistano le derivate parziali, sulla base del ben noto fatto appreso dall'Analisi I che se una funzione è derivabile allora è continua e dunque se non è continua in un punto non è ivi derivabile. Tuttavia anche questo ragionamento è errato come mostra il seguente controesempio. Di nuovo dunque il comportamento in più variabili ammette situazioni che non hanno controparte in una dimensione.

✎ **Esempio 1.1.12.** *Sia f la funzione di due variabili definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcolare (se esistono) $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

Per lo stesso motivo dell'esempio precedente, utilizziamo la definizione di derivata parziale in un punto. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Quindi le derivate parziali in $(0,0)$ esistono e fanno 0; d'altra parte è facile verificare che la funzione proposta non è continua in $(0,0)$ (basta prendere la retta $y = x$ lungo la quale f vale $1/2$); quindi abbiamo trovato un esempio di *funzione che non è continua in un punto ma per la quale in quel punto esistono le derivate parziali.* Questo ci fa capire che la nozione di derivabilità proposta è troppo debole, non rispecchiando l'intuizione. Vedremo dunque di affiancare a questa nozione di derivabilità una nozione più forte (la *differenziabilità*) ove ritrovare i comportamenti noti dall'Analisi I. Ritroveremo questo esempio nel parlare di piano tangente.

1.2. Piano tangente

Abbiamo detto nell'introduzione al capitolo che se una funzione di una variabile è derivabile allora il valore della derivata in un punto coincide con il valore del coefficiente angolare della retta tangente in quel punto. Quindi la derivabilità è equivalente all'esistenza della retta tangente.

Ci poniamo il problema di estendere questo concetto in più dimensioni, quindi di vedere se esiste il piano tangente a una superficie. È intuitivo pensare che se tale piano esiste, deve essere "tangente" alla funzione in quel punto e quindi "approssimare" almeno localmente la funzione in quel punto, così come la retta tangente approssima localmente la funzione a cui è

tangente (per esempio $y = \sin x$ per x vicino a zero è approssimata dalla sua retta tangente $y = x$ e infatti si ha che $\sin x \sim x$ se $x \to 0$).
Facciamo il seguente ragionamento: supponiamo di avere la nostra superficie $z = f(x, y)$ e consideriamo il piano verticale $y = y_0$; sezioniamo la superficie con il piano: troveremo la curva data da $z = f(x, y_0)$ (con $y = y_0$ perché una curva in $\mathbb{R}^3$ è sempre individuata da due equazioni). È facile immaginare che la retta tangente a tale curva, chiamiamola r_1, apparterrà al piano tangente che stiamo considerando. Analogamente, se sezioniamo la superficie con il piano verticale $x = x_0$ troveremo una curva individuata dalle equazioni $x = x_0$ e $z = f(x_0, y)$ la cui retta tangente, chiamiamola r_2, starà apparterrà al piano tangente che stiamo costruendo.
Quindi quali sono le equazioni di r_1 e r_2? Tenendo conto che le curve sono funzioni di una sola variabile e che la derivata (parziale!) nel punto coincide con il coefficiente angolare della retta tangente si avrà

$$r_1 \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

$$r_2 \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

quindi il piano che contiene entrambe le rette sarà

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{1.2.1}$$

La domanda che ci facciamo è la seguente: siamo sicuri che questo piano così come l'abbiamo costruito partendo da un ragionamento intuitivo sia effettivamente "tangente" alla nostra superficie nel senso di approssimarla localmente? La risposta purtroppo è negativa come mostra il prossimo esempio già incontrato nel paragrafo precedente.

✎ **Esempio 1.2.1.** *Sia f la funzione di due variabili definita da*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Allora abbiamo visto prima che le derivate parziali in $(0, 0)$ esistono e fanno 0, dunque il presunto piano tangente, secondo la formula ricavata sopra avrebbe la forma $z = 0$ cioè il piano orizzontale xy. Ma come già rimarcato la funzione data non è nemmeno continua nell'origine, addirittura lungo la bisettrice $y = x$ fa $1/2$: dunque è chiaro che il piano $z = 0$ non è "tangente" alla funzione data nel senso che non approssima la funzione localmente. Quindi in più variabili la derivabilità da sola non implica né la continuità né l'esistenza del piano tangente *(comportamento che non ha controparte in una dimensione).*

Ci chiediamo dunque qual è la proprietà che garantisca che effettivamente la (1.2.1) è l'equazione di un piano tangente nel vero senso del termine. A questa domanda risponderemo nel paragrafo successivo introducendo il concetto di DIFFERENZIABILITÀ.

1.3. Differenziabilità

Facciamo di nuovo un passo indietro al caso unidimensionale. In un variabile abbiamo detto che la derivata in un punto è il limite del rapporto incrementale, cioè

$$g'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h}$$

quindi ricordando la definizione di $o(h)$, si ha che

$$g(t+h)-g(t) = g'(t)h + o(h) \qquad h \to 0.$$

Questa relazione si legge dicendo che *l'incremento della funzione coincide al primo ordine con il differenziale* della funzione stessa, cioè con *l'incremento calcolato lungo la retta tangente. I due incrementi differiscono per un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h* (incremento della variabile indipendente).
Analogamente in più variabili: se una funzione f è DIFFERENZIABILE accadrà che *l'incremento di f sarà uguale all'incremento calcolato lungo il piano tangente più un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla lunghezza dell'incremento* (h,k) delle variabili indipendenti. In simboli

$$\underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)}_{\text{incremento di } f} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\overbrace{h}^{(x-x_0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\overbrace{k}^{(y-y_0)}}_{\text{incremento calcolato lungo il piano tangente}} + \underbrace{o(\sqrt{h^2+k^2})}_{\text{infinitesimo di ordine superiore}} \tag{1.3.1}$$

$$\text{per } (h,k) \to (0,0).$$

dove per definizione di o piccolo si ha che $o(\sqrt{h^2+k^2})$ è tale che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(\sqrt{h^2+k^2})}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

❐ **Definizione 1.3.1.** Se vale la (1.3.1) allora diremo che f è DIFFERENZIABILE in (x_0, y_0).

☞ **Osservazione 1.3.2.** Si osserva che il piano tangente è tale se la (1.3.1) vale altrimenti non esiste. La (1.3.1) garantisce che il piano dato dalla (1.2.1) sia effettivamente tangente al grafico di f. Anche il concetto di differenziabilità può essere opportunamente generalizzato al caso di n variabili, allo stesso modo della proposizione seguente e del concetto di differenziale.

La seguente proposizione chiarisce i ruoli tra derivabilità, differenziabilità e continuità.

Proposizione 1.3.3. *Se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora f è derivabile in (x_0, y_0) e inoltre f è anche continua in (x_0, y_0).*

Mostriamo che i viceversa della proposizione precedente non valgono.
Prima di tutto infatti f continua non implica f differenziabile: basta considerare la funzione $f(x, y) = |x|$; essa è continua dappertutto quindi anche in $(0, 0)$ ma non è differenziabile in $(0, 0)$ ($f_x(0, 0)$ non esiste nemmeno quindi la (1.3.1) non può nemmeno essere scritta).
D'altra parte f derivabile non implica f differenziabile. Basta considerare la funzione dell'Esempio 1.2.1 e mostrare che essa non è differenziabile. Si dovrebbe mostrare con la definizione che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h\, f_x(0, 0) - k\, f_y(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

invece

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h\, f_x(0, 0) - k\, f_y(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

non esiste (basta considerare $h = k$ e si otterrebbe $\lim_{h\to 0} \frac{h^2}{2\sqrt{2}h^2|h|}$) che non esiste.

❒ **Definizione 1.3.4.** Se f è differenziabile in (x_0, y_0), si dice DIFFERENZIALE di f in (x_0, y_0) l'applicazione lineare $df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $df(x_0, y_0) : (h, k) \mapsto \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$.

La quantità $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$ rappresenta l'incremento della funzione nel passare da (x_0, y_0) a $(x_0 + h, y_0 + k)$ lungo il piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0).

❒ **Definizione 1.3.5.** L'approssimazione dell'incremento di f mediante il suo differenziale (applicato all'incremento) si chiama LINEARIZZAZIONE di f.

Come mostrato nell'ultimo controesempio, non è facile controllare la differenziabilità usando la definizione. Si tratta di avere a che fare con un limite anche piuttosto complicato in cui compare sempre una forma di indecisione. Il seguente risultato semplifica un pò le cose. Anche questo enunciato può essere generalizzato al caso di n variabili.

Teorema 1.3.6. (CONDIZIONE SUFFICIENTE DI DIFFERENZIABILITÀ) *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con A aperto e $(x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che le derivate parziali esistano in un intorno di (x_0, y_0) e siano continue in (x_0, y_0). Allora f è differenziabile in (x_0, y_0). In particolare, se le derivate parziali di f esistono e sono continue in A allora f è differenziabile in tutti i punti di A. Quindi vale l'implicazione*

$$f \in \mathcal{C}^1(A) \Rightarrow f \ \text{ differenziabile in } A.$$

Il viceversa non vale come mostra il seguente controesempio.

✎ **Esempio 1.3.7.** *Sia* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definita mediante*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Se $(x,y)\neq(0,0)$ *allora*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}}{h}=0$$

dove l'ultimo limite si può vedere grazie al teorema dei due carabinieri. D'altra parte, se $(x,y)\neq(0,0)$ *allora*

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\cos\frac{1}{x^2+y^2}\frac{2y}{x^2+y^2}$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}}{h}=0.$$

Dunque

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=0,$$

dato che

$$0\leq\sqrt{h^2+k^2}\left|\sin\frac{1}{h^2+k^2}\right|\leq\sqrt{h^2+k^2}\to0.$$

Dunque f *è differenziabile in* $(0,0)$*. D'altra parte*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

non esiste e quindi in particolare non è zero (per vederlo basta prendere la curva $y=x$*).*

✍ **Esercizio 1.3.8.** *Sia* $f(x,y)=\arctan\sqrt{4x^2+y^2}$*. Calcolare* ∇f *nel punto* $(0,1)$ *e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di* f *sopra tale punto; calcolare, se esistono, le derivate parziali di* f *in* $(0,0)$*.*

La funzione è sicuramente differenziabile su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ in quanto composizione di funzioni differenziabili ($\sqrt{4x^2+y^2}$ si annulla solo in $(0,0)$). Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+(4x^2+y^2)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{4x^2+y^2}}\cdot 8x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(4x^2+y^2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2+y^2}} \cdot 2y$$

e sono continue su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (da qui si poteva dedurre $f \in \mathcal{C}^1$ e dunque differenziabile). Possiamo dunque affermare che esiste il piano tangente in $(0,1)$:

$$\nabla f(0,1) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

e il piano tangente

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}y + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Si ha poi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan\sqrt{4h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan 2|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan 2|h|}{2|h|} \cdot \frac{2|h|}{h}$$

che non esiste perché

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$$

e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -2.$$

Analoghi conti mostrano che non esiste nemmeno $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

1.4. Derivate direzionali

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che per una funzione reale di più variabili reali, la derivata parziale rispetto a una variabile x_i rappresenta la velocità di crescita nella direzione dell'asse x_i. È naturale immaginare di voler conoscere la velocità di crescita di f anche rispetto ad altre direzioni che non siano quelle lungo gli assi cartesiani.
Consideriamo un punto $\mathbf{x}_0$ e andiamo a spostarci sulla retta uscente da $\mathbf{x}_0$ e di versore $\mathbf{v}$, cioè sulla retta di equazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v}$, con $t \in \mathbb{R}$. Il corrispondente incremento subito dalla f sarà

$$f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)$$

quindi, essendoci ricondotti a una situazione uni-dimensionale, possiamo prendere il limite per $t \to 0$. Si ha dunque la seguente definizione.

❒ **Definizione 1.4.1.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto; sia $\mathbf{x}_0 \in A$ e $\mathbf{v}$ un versore (cioè un vettore di $\mathbb{R}^n$ di modulo unitario). Si dice DERIVATA DIREZIONALE DI f RISPETTO AL VERSORE $\mathbf{v}$ NEL PUNTO $\mathbf{x}_0$ IL LIMITE

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

a patto che esista finito.

Si osservi che studiare il tasso di incremento di f lungo $\mathbf{v}$ in $\mathbf{x}_0$ è come considerare la restrizione di f rispetto alla retta uscente da $\mathbf{x}_0$ in direzione $\mathbf{v}$, cioè

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v});$$

perciò andare a fare il limite di tale funzione (di una variabile reale!) per $t \to 0$ significa calcolare la derivata di g in 0, cioè

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = g'(0).$$

☞ **Osservazione 1.4.2.** Si osserva immediatamente che le derivate parziali non sono altro che derivate direzionali corrispondenti ai versori canonici $\mathbf{e}_i$.

Nel caso di una funzione reale di due variabili reali, un versore di $\mathbb{R}^2$ può essere convenientemente scritto nella forma

$$\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

dove θ è come da convenzione l'angolo che $\mathbf{v}$ forma con la direzione positiva dell'asse delle x. Quindi la definizione di derivata direzionale può essere riscritta nella forma

$$D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

In questo caso si ritrova

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) \qquad \mathbf{v} = \mathbf{i} \qquad \theta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= D_{\mathbf{v}} f(x_0, y_0) \qquad \mathbf{v} = \mathbf{j} \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.4.3.** *Sia $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^2}$. Calcolare se esistono $D_{\mathbf{v}} f(0, 0)$. f è differenziabile in $(0, 0)$?*

Sia $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Allora

$$D_{\mathbf{v}} f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{t\sqrt[3]{\cos\theta\,\sin^2\theta} - 0}{t} = \sqrt[3]{\cos\theta\,\sin^2\theta}$$

quindi per questa funzione esistono tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$. D'altra parte verifichiamo con la definizione che f non è differenziabile nell'origine. Se così fosse, si dovrebbe avere che il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

esiste e fa zero. Invece si ha che il limite proposto non esiste. Infatti dal punto precedente si ha che $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$ (basta prendere $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$) da cui

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h\,k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

non esiste; (basta prendere $h = k$ e si ottiene $\lim_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{2}|h|}$). Quindi f non è differenziabile in $(0,0)$. Si può dunque concludere che anche l'esistenza di tutte le derivate direzionali (non solo quelle parziali) non basta a concludere che f è differenziabile.

Il viceversa però vale e costituisce un importante teorema.

Teorema 1.4.4. (FORMULA DEL GRADIENTE) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (A aperto) una funzione differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$. Allora per ogni versore $\mathbf{v}$ esiste la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)$ e vale l'identità (detta* FORMULA DEL GRADIENTE*)*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) v_i.$$

☞ **Osservazione 1.4.5.** La derivata direzionale risulta quindi data dal prodotto scalare tra il gradiente e il vettore nella cui direzione si va a derivare. Quindi *tutte le derivate direzionali risultano combinazione lineare delle derivate parziali.*

Ricordiamo la definizione di differenziabilità per una funzione di più variabili. Si ha

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|) \qquad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

A questo punto scegliamo l'incremento $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$; in questo modo la formula precedente diventa

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x_0}) = \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot t\mathbf{v} + o(t).$$

Dividendo per t si ha

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x_0})}{t} = \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{v} + \frac{o(t)}{t}$$

e ora passando al limite per $t \to 0$ si ottiene

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x_0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x_0})}{t} = \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{v}$$

visto che per definizione $o(t)/t \to 0$ per $t \to 0$, che è quello che volevamo dimostrare.

Nel caso $n = 2$ la formula del gradiente assume la forma

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sin\theta$$

dove come prima abbiamo posto $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

✎ **Esempio 1.4.6.** *Si calcolino le derivate parziali della funzione*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

in ogni punto del piano (per l'origine applicare la definizione). Si calcolino poi, in base alla definizione, le derivate direzionali di f, nell'origine, rispetto al generico versore $(\cos\theta, \sin\theta)$. *La formula del gradiente è verificata? Spiegare il risultato.*

Se $(x, y) \neq (0, 0)$ allora si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2(x^2 + y^2) - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

mentre nell'origine, la derivata parziale si calcola con la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

dunque riassumendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

In modo del tutto analogo si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcoliamo ora le derivate direzionali nell'origine. Dato un generico versore $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ si ha

$$D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cos\theta t^2 \sin^2\theta}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 \sin^2\theta \cos\theta}{t^3} = \sin^2\theta\cos\theta.$$

La formula del gradiente NON è verificata: infatti

$$\sin^2\theta\cos\theta = D_{\mathbf{v}}f(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = 0.$$

Quindi da questo si può concludere che f NON è differenziabile nell'origine (come si può anche verificare direttamente con la definizione) e pertanto f non è nemmeno di classe $\mathcal{C}^1$ (come si verifica direttamente andando a testare la continuità delle funzioni derivate parziali).

✎ **Esempio 1.4.7.** *Consideriamo la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| > x^2 \quad \vee\, y = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si osserva innanzitutto che $f = 0$ sull'asse x e quindi $f_x(0,0) = 0$. Si osserva poi che per ogni versore $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ diverso da $(1,0)$, l'intersezione tra l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > x^2\}$ e la retta per l'origine di direzione $\mathbf{v}$ è un segmento centrato nell'origine. Poiché su tale segmento $f(x,y) = 1$, si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Perciò $\nabla f(0,0) = 0$ e la formula del gradiente è verificata. D'altra parte la funzione non è differenziabile nell'origine in quanto non è nemmeno continua nell'origine. Infatti ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x,x^3) = 0.$$

☞ **Osservazione 1.4.8.** Il risultato precedente inoltre ci fornisce un'utile interpretazione del vettore gradiente. Per ogni vettore unitario $\mathbf{v}$ abbiamo

$$D_{\mathbf{v}} f(x_0,y_0) = \mathbf{v} \cdot \nabla f(x_0,y_0) = |\nabla f(x_0,y_0)| \cos\varphi$$

dove φ è l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{v}$ e $\nabla f(x_0,y_0)$. Poiché $\cos\varphi$ assume solo valori compresi tra -1 e 1, si ha che $D_{\mathbf{v}}$ assume solo valori compresi tra $-|\nabla f(x_0,y_0)|$ e $|\nabla f(x_0,y_0)|$. Inoltre $D_{\mathbf{v}} f(x_0,y_0) = -|\nabla f(x_0,y_0)|$ se e solo se $\mathbf{v}$ punta nella direzione opposta a quella di $\nabla f(x_0,y_0)$ e $D_{\mathbf{v}} f(x_0,y_0) = |\nabla f(x_0,y_0)|$ se e solo se $\mathbf{v}$ punta nella stessa direzione di $\nabla f(x_0,y_0)$; nel primo caso $\cos\varphi = -1$, nel secondo caso $\cos\varphi = 1$. La derivata direzionale è nulla nella direzione $\varphi = \pi/2$; questa è la direzione della (retta tangente alla) curva di livello di f passante per (x_0,y_0) (cioè il gradiente è ortogonale in ogni punto alle linee di livello della funzione).

✎ **Esempio 1.4.9.** *Data la funzione $f(x,y) = y^4 e^{3x}$, si determini per quale versore $\mathbf{v}$, $D_{\mathbf{v}} f(0,-1)$ è massima e per quale è nulla.*

Poiché f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ (è prodotto di funzioni elementari), il gradiente indica la direzione ed il verso di massima pendenza. Si ha

$$f_x(x,y) = 3y^4 e^{3x}, \qquad f_y(x,y) = 4y^3 e^{3x}$$

quindi

$$f_x(0,-1) = 3, \qquad f_y(0,-1) = -4$$

e dunque

$$\nabla f(0,-1) = (3,-4), \qquad ||\nabla f(0,-1)|| = 5.$$

La direzione di massima pendenza è quella individuata dal versore $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. La direzione in cui la derivata direzionale è nulla è ortogonale al gradiente. Si può scegliere

$$\mathbf{v}^1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \qquad \mathbf{v}^2 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Si può anche verificare il risultato ponendo $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ con $\alpha \in [0, 2\pi)$ e calcolando $D_{\mathbf{v}} f(0, -1)$ e studiandone la variazione in funzione di α. Poiché f è differenziabile, si ha, applicando la formula del gradiente

$$D_{\mathbf{v}} f(0, -1) = D(\alpha) = 3\cos\alpha - 4\sin\alpha.$$

Si verifica facilmente che $D(\alpha) = 0$ per

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \pm\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

e che $D'(\alpha) = 0$ per

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \pm\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

I versori

$$\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \qquad \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

indicano rispettivamente le direzioni di massima e minima crescita.

1.5. Calcolo delle derivate

Enunciamo le seguenti proprietà del gradiente.

Teorema 1.5.1. (FORMULE DI CALCOLO PER LE DERIVATE) *Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà del gradiente:*

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha\nabla f + \beta\nabla g$$
$$\nabla(f\, g) = g\nabla f + f\nabla g$$
$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

Analoghe proprietà valgono per i differenziali.
Molto importante è anche la regola per la derivazione delle funzioni composte che enunciamo in due casi particolari.

Teorema 1.5.2. (derivazione delle funzioni composte - primo caso) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supponiamo che la funzione composta $h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ sia definita in almeno un intorno U di $\mathbf{x}_0 \in A$. Se f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e g è derivabile in $f(\mathbf{x}_0)$, allora la funzione composta*

$$h = g \circ f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

è differenziabile in $\mathbf{x}_0$ e si ha

$$\nabla h(\mathbf{x}_0) = g'(f(\mathbf{x}_0))\, \nabla f(\mathbf{x}_0).$$

✎ **Esempio 1.5.3.** *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = z^2\, e^{2x-y}$ e sia $g : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $g(r) = \sqrt{r+1}$. Allora la funzione composta $h(x, y, z) = g(f(x, y, z))$ è ben definita (perché l'immagine di f è sempre positiva o nulla) e dalla formula di derivazione della funzione composta si ha*

$$\nabla h(x, y, z) = g'(f(x, y, z))\, \nabla f(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{z^2\, e^{2x-y} + 1}} \left(2z^2\, e^{2x-y}, -z^2\, e^{2x-y}, 2z\, e^{2x-y}\right).$$

Un errore frequente è quello di scrivere nella formula $g'(x, y, z)$ (che non ha assolutamente senso visto che g è funzione di una sola variabile reale!); infatti g' deve essere calcolata non nel punto (x, y, z) ma nella sua immagine tramite f, cioè nel nostro caso $z^2\, e^{2x-y}$. Lo stesso risultato si ottiene esplicitando

$$h(x, y, z) = \sqrt{z^2\, e^{2x-y} + 1}$$

e calcolandone il gradiente direttamente senza usare la formula della derivazione della funzione composta.

Teorema 1.5.4. (derivazione delle funzioni composte - secondo caso) *Sia $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Supponiamo che la funzione composta $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ sia definita in almeno un intorno J di $t_0 \in I$. Se $\mathbf{r}$ è derivabile in t_0 e f è differenziabile in $\mathbf{r}(t_0)$, allora la funzione composta*

$$g = f \circ \mathbf{r} : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è derivabile in t_0 e si ha

$$g'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{r}(t_0))\, r_i'(t_0).$$

✎ **Esempio 1.5.5.** *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(u, v, z) = v\, e^{u^2}$ *e sia* $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *definita da* $\mathbf{r}(x) = (x, \cos x, x+1)$. *Allora la funzione composta* $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ *è ben definita e derivabile e si ha*

$$g'(x) = \nabla f(\mathbf{r}(x)) \cdot \mathbf{r}'(x).$$

A questo punto

$$\nabla f(u, v, z) = (2u\, v\, e^{u^2}, e^{u^2}, 0)$$

quindi

$$\nabla f(\mathbf{r}(x)) = (2x \cos x\, e^{x^2}, e^{x^2}, 0)$$

perciò, dalla definizione di prodotto scalare

$$g'(x) = (2x \cos x\, e^{x^2}, e^{x^2}, 0) \cdot (1, -\sin x, 1) = 2x \cos x\ e^{x^2} - \sin x\, e^{x^2}.$$

Lo stesso risultato si ottiene esplicitando

$$g(x) = \cos x\, e^{x^2}$$

e calcolandone la derivata direttamente senza usare la formula della derivazione della funzione composta.

1.6. Derivate di ordine superiore

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con A aperto. Una volta determinate le derivate parziali f_x e f_y di una funzione $f(x, y)$ ci si può chiedere ad esempio se esse siano a loro volta funzioni derivabili. In caso affermativo, si possono calcolare le derivate parziali di f_x e f_y ottenendo rispettivamente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{1.6.1}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{1.6.2}$$

Naturalmente tutto ciò se queste derivate esistono (essendo limiti di opportuni rapporti incrementali, potrebbero anche non esistere).
Le (1.6.1) e (1.6.2) si dicono DERIVATE PARZIALI SECONDE; per indicarle, si usano anche altri simboli, per esempio $f_{xx}, f_{xy}, \ldots$
Le stesse nozioni si possono estendere anche al caso di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto.

❒ **Definizione 1.6.1.** La derivata rispetto a una certa variabile x_j di una funzione f_{x_i}, se esiste, si indica con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

✎ **Esempio 1.6.2.** *Sia $f(x,y) = e^x \cos y$. Allora si ha che*

$$f_x(x,y) = e^x \cos y \qquad f_y(x,y) = -e^x \sin y$$

da cui

$$f_{xx}(x,y) = e^x \cos y \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -e^x \sin y \quad f_{yy}(x,y) = -e^x\, cosy.$$

Notiamo che nell'esempio precedente viene $f_{xy} = f_{yx}$; non è un caso ma un fatto generale come mostra il seguente teorema (che enunciamo nel caso $n = 2$ ma che può essere facilmente esteso al caso n qualunque ☞ Sezione 1.10).

Teorema 1.6.3. (teorema di Schwarz) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con A aperto. Supponiamo che le derivate parziali seconde miste esistano in un intorno di un punto (x,y) e siano entrambe continue in (x,y). Allora coincidono in (x,y). In particolare, se le derivate parziali miste esistono e sono continue in tutto A allora coincidono su tutto A.*

In particolare allora il teorema di Schwarz afferma che

$$f \in \mathcal{C}^2(A) \Rightarrow f_{xy} = f_{yx}.$$

D'altra parte, ricordando che

$$f \in \mathcal{C}^2(A) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(A) \Rightarrow f \text{ differenziabile in } A$$

allora in particolare si ha che

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}^2(A) \quad &\Rightarrow \quad \text{le derivate parziali prime sono differenziabili in } A \\ &\Rightarrow \quad \text{le derivate parziali seconde sono continue in } A \\ &\Rightarrow \quad \text{le derivate parziali miste sono uguali.} \end{aligned}$$

Naturalmente, sebbene di solito questa condizione sia verificata, esistono casi in cui una funzione possiede derivate miste diverse tra loro. Naturalmente questa funzione non sarà di classe $\mathcal{C}^2$ come mostra il seguente controesempio.

✎ **Esempio 1.6.4.** *Sia*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si verifica che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ mentre le derivate parziali seconde sono discontinue nell'origine. Quindi il teorema di Schwarz non si applica e non possiamo affermare a priori che $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. Per altro infatti si può mostrare attraverso calcoli diretti che $f_{xy}(0,0) = 1 \neq f_{yx}(0,0) = -1$.

Infatti si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

mentre

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

da cui

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{h^5}{h^4}-0}{h} = -1.$$

D'altra parte

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^3-3y^2x)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

mentre

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

da cui

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h} = 1.$$

☞ **Osservazione 1.6.5.** Il teorema di Schwarz e la definizione delle derivate successive si può generalizzare al caso di derivate di ordine k.

1.7. Equazioni alle derivate parziali

❒ **Definizione 1.7.1.** Si dice EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI un'equazione differenziale in cui compare una funzione incognita di più variabili assieme ad alcune delle sue derivate fatte rispetto (almeno) a due variabili diverse.

Le equazioni alle derivate parziali (abbreviato E.D.P.) intervengono nella formulazione e modellizzazione di numerosissime leggi fisiche e fenomeni nel campo della fisica e dell'ingegneria. Molte E.D.P. (non lineari) sono attualmente oggetto di studio da parte di diversi rami dell'Analisi Matematica.
Alcuni esempi tra i più importanti sono:
* EQUAZIONE DEL TRASPORTO

$$c\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

Come dice il nome, rappresenta il trasporto di sostanze, per esempio di una sostanza inquinante u che si muove a velocità c.
* EQUAZIONE DI LAPLACE

$$\triangle u(x,y,z)=0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

dove

$$\triangle=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ è detto OPERATORE DI LAPLACE o LAPLACIANO.}$$

Le soluzioni dell'equazione di Laplace si dicono FUNZIONI ARMONICHE. L'equazione di Laplace interviene ad esempio per modellizzare il potenziale elettrostatico u (o quello gravitazionale) nei punti dello spazio privi di carica (o di materia rispettivamente).
* EQUAZIONE DEL CALORE

$$u_t=k\,\triangle u;$$

modellizza ad esempio la temperatura u di un corpo omogeneo e isotropo rispetto alla conduzione, senza pozzi né sorgenti; k è la costante di diffusione e dipende dalle caratteristiche del materiale.
* EQUAZIONE DELLA CORDA VIBRANTE

$$u_{tt}=c^2\,u_{xx};$$

modellizza ad esempio piccole vibrazioni di una corda elastica e tesa; c è la velocità di propagazione dell'onda.

1.8. Differenziale secondo, matrice Hessiana, formula di Taylor del secondo ordine

❒ **Definizione 1.8.1.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(A)$ e sia $(x_0,y_0) \in A$. Si dice DIFFERENZIALE SECONDO di f in (x_0,y_0) la funzione definita da

$$d^2f(x_0,y_0):(h,k)\mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)h\,k+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\,k^2$$

✎ **Esempio 1.8.2.** *Per la funzione*

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+y}} - y\sqrt{1+x}$$

si calcolino il differenziale primo e secondo nell'origine.

SOLUZIONE 1. Calcolando le derivate direttamente si ha

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+y}} - \frac{y}{2\sqrt{1+x}} \qquad f_y(x,y) = -\frac{x}{2}(1+y)^{-3/2} - \sqrt{1+x}$$

e inoltre

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{y}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \;\; f_{xy}(x,y) = -\frac{1}{2}\left[(1+y)^{-\frac{3}{2}} + (1+x)^{-\frac{3}{2}}\right] \;\; f_{yy}(x,y) = \frac{3}{4}(1+y)^{-\frac{5}{2}};$$

a questo punto allora

$$f_x(0,0) = 1 \qquad f_y(0,0) = -1$$

e anche

$$f_{xx}(0,0) = 0 \qquad f_{xy}(0,0) = -1 \qquad f_{yy}(0,0) = 0$$

da cui

$$df(0,0) = dx - dy; \qquad d^2f(0,0) = -2dxdy.$$

SOLUZIONE 2. Poiché $y \to 0$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = (1+y)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}y + o(y)$$

e per $x \to 0$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

da cui

$$f(x,y) = x - y - xy + xo(y) + yo(x).$$

Si osserva ora che, essendo

$$\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

si ha

$$\frac{|xo(y)|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left|\frac{o(y)}{y}\right| \to 0$$

per $(x,y) \to (0,0)$ e dunque $xo(y)$ è infinitesimo di ordine superiore a x^2+y^2. Stesso ragionamento e stessa conclusione valgono per $yo(x)$. Dalla

$$f(x,y) = x - y - xy + xo(y) + yo(x)$$

si ricava dunque subito che

$$df(0,0) = dx - dy; \qquad d^2f(0,0) = -2dxdy.$$

❒ **Definizione 1.8.3.** I coefficienti che compaiono nel differenziale secondo possono essere ordinati in una matrice 2×2 detta MATRICE HESSIANA di f in (x_0, y_0)

$$\mathbf{H}f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Si nota che dal teorema di Schwarz, se $f \in \mathcal{C}^2(A)$ allora la matrice Hessiana è simmetrica in ogni punto di A.

Se la differenziabilità di una funzione di più variabili permette di approssimare il suo grafico con quello del piano tangente, il fatto che una funzione sia (almeno) di classe $\mathcal{C}^2(A)$ permette di migliorare ancora l'approssimazione. Abbiamo infatti la seguente formula.

Teorema 1.8.4. (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO SECONDO LAGRANGE) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(A)$; per ogni $(x_0, y_0) \in A$ e $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tale che $(x_0+h, y_0+k) \in A$. Allora esiste un numero reale $\delta \in (0,1)$ dipendente da (x_0,y_0) e (h,k) tale che*

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0+\delta h, y_0+\delta k)h^2 \\ &\quad + f_{xy}(x_0+\delta h, y_0+\delta k)\, hk + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0+\delta h, y_0+\delta k)k^2 \end{aligned}$$

Teorema 1.8.5. (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO SECONDO PEANO) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(A)$; per ogni $(x_0, y_0) \in A$ vale la formula*

$$\begin{aligned} f((x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0,y_0)h^2 \\ &\quad + f_{xy}(x_0,y_0)\, hk + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0,y_0)k^2 + o(\sqrt{h^2+k^2}) \quad \text{per } (h,k) \to (0,0). \end{aligned}$$

✎ **Esempio 1.8.6.** *Sia*

$$\phi(x,y) = 2e^{x-2y} - xy.$$

a) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = \phi(x,y)$, nel punto $(2, 1, \phi(2,1))$.
b) Calcolare la formula di Taylor per $\phi(x,y)$, con centro nel punto $(2,1)$, arrestata al secondo ordine.
c) Sia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2e^{x-2y} = xy\}$; si ricavi l'equazione della retta tangente a C nel punto $(2,1)$.

a) La funzione ϕ è di classe $\mathcal{C}^1$ quindi è differenziabile e perciò esiste il piano tangente. La formula del piano tangente richiesta è

$$z = \phi(2,1) + \phi_x(2,1)(x-2) + \phi_y(2,1)(y-1).$$

Si ha $\phi(2,1) = 0$ e poi

$$\begin{array}{ll} \phi_x(x,y) = 2e^{x-2y} - y & \phi_x(2,1) = 1 \\ \phi_y(x,y) = -4e^{x-2y} - x & \phi_y(2,1) = -6 \end{array}$$

Quindi l'equazione richiesta risulta

$$z = (x-2) - 6(y-1) = x - 6y - 4.$$

b) La formula di Taylor calcolata in $(2,1)$ arrestata al secondo ordine risulta

$$\phi(2+h, 1+k) = \phi(2,1) + \phi_x(2,1)h + \phi_y(2,1)k + \frac{1}{2}\phi_{xx}(2,1)h^2 + \phi_{xy}(2,1)hk + \frac{1}{2}\phi_{yy}(2,1)k^2 + o(h^2+k^2).$$

Quindi rispetto al punto precedente occorre calcolare le derivate seconde di ϕ in $(2,1)$. Si ha

$$\begin{array}{ll} \phi_{xx}(x,y) = 2e^{x-2y} & \phi_{xx}(2,1) = 2 \\ \phi_{xy}(x,y) = \phi_{yx}(x,y) = -4e^{x-2y} - 1 & \phi_{xy}(2,1) = \phi_{yx}(2,1) = -5 \\ \phi_{yy}(x,y) = 8e^{x-2y} & \phi_{yy}(2,1) = 8. \end{array}$$

Dunque la formula di Taylor calcolata in $(2,1)$ arrestata al secondo ordine risulta

$$\phi(2+h, 1+k) = h - 6k + h^2 - 5hk + 4k^2 + o(h^2+k^2).$$

c) L'insieme C rappresenta la curva di livello $\phi(x,y) = 0$ e noi sappiamo che il gradiente di ϕ è ortogonale alle curve di livello in ogni loro punto (si nota che $(2,1) \in C$) quindi il vettore gradiente calcolato in $(2,1)$ risulta $(1,-6)$ e questo vettore è ortogonale alla curva di livello $\phi(x,y) = 0$. Per trovare un vettore tangente basta quindi trovare un vettore che sia ortogonale a $(1,-6)$, cioè per esempio $(6,1)$. Quindi la retta cercata è la retta passante per $(2,1)$ e di vettore direzione $(6,1)$ ossia

$$y = \frac{x+4}{6}.$$

Vedremo più avanti come questo esercizio può anche essere risolto con l'uso del Teorema del Dini (o della funzione implicita).

1.9. Riassumendo

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Nel caso siano false, esibire un adeguato controesempio.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ continua in (x_0, y_0)

Vero. DIMOSTRAZIONE. La differenziabilità implica la validità della formula di Taylor al primo ordine per funzioni di due variabili

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

da cui, sfruttando di nuovo il fatto che f è differenziabile, si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{(h,k)\to(0,0)} [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)] \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})\right] = 0 \end{aligned}$$

e quindi la funzione f è anche continua in (x_0, y_0).

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ differenziabile in (x_0, y_0)

Falso. CONTROESEMPIO. $f(x, y) = |x|$ è continua ma non esiste $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$. Infatti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

che non esiste. Dunque f non può essere differenziabile in $(0, 0)$.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow$ esistono tutte le derivate parziali in quel punto e sono continue.

Falso. CONTROESEMPIO. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$ allora

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2}}{h} = 0$$

dove l'ultimo limite si può vedere grazie al teorema del confronto. D'altra parte, se $(x,y) \neq (0,0)$ allora

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \cos \frac{1}{x^2+y^2} \frac{2y}{x^2+y^2}$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2}}{h} = 0.$$

Dunque

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{(h^2+k^2) \sin \frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

dato che

$$0 \leq \sqrt{h^2+k^2} \left| \sin \frac{1}{h^2+k^2} \right| \leq \sqrt{h^2+k^2} \to 0.$$

Dunque f è differenziabile in $(0,0)$. D'altra parte

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$$

non esiste e quindi in particolare non è zero (per vederlo basta prendere la curva $y = x$). Quindi

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

e dunque la funzione $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ non è continua nell'origine (la condizione sufficiente per la differenziabilità non si può invertire). Ragionamento analogo si applica alla funzione $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

> Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è tale che esistono tutte le derivate parziali e sono continue in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ è differenziabile in quel punto.

Vero. DIMOSTRAZIONE. Condizione sufficiente per la differenziabilità.

> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow$ esistono le derivate parziali in quel punto.

Falso. CONTROESEMPIO. Di nuovo $f(x,y) = |x|$.

> Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è tale che esistono le derivate parziali in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ continua in quel punto.

Falso. CONTROESEMPIO.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{-2}y\arctan(x^2+y^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Infatti la funzione non è continua nell'origine. Per vederlo basta considerare la curva $x = y^{3/2}$. Infatti

$$f(y^{3/2}, y) = \frac{y\arctan(y^3+y^2)}{y^3} = \frac{\arctan(y^3+y^2)}{y^3+y^2} \cdot \frac{y^3+y^2}{y^2} = \frac{\arctan(y^3+y^2)}{y^3+y^2} \cdot (1+y) \to 1$$

e dunque non tende a zero che è il valore della funzione nell'origine. D'altra parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow$ esistono tutte le derivate direzionali in quel punto.

Vero. DIMOSTRAZIONE. Formula del gradiente.

Se per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ esistono tutte le derivate direzionali in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ differenziabile in quel punto.

Falso. CONTROESEMPIO.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| > x^2 \vee y = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Infatti, visto che $f = 0$ sull'asse x si ha $f_x(0,0) = 0$. Si osserva poi che, per ogni versore $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ diverso da $(1,0)$, l'intersezione tra l'insieme $\{(x,y) : |y| > x^2\}$ e la retta per l'origine di direzione $\mathbf{v}$ è un segmento centrato nell'origine. Poiché su tale segmento $f(x,y) = 1$ si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Perciò $\nabla f(0,0) = 0$ e la formula del gradiente è verificata. D'altra parte la funzione non è differenziabile in quanto non è nemmeno continua nell'origine. Infatti ad esempio:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x,x^3) = 0.$$

1.10. Complementi: il caso n

In questa sezione andiamo a presentare la generalizzazione al caso di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di alcune definizioni e risultati contenuti nella precedente sezione e presentati nel caso $n = 2$.

Teorema 1.10.1. (TEOREMA DI SCHWARZ) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}n \to \mathbb{R}$ con A aperto. Supponiamo che per certi indici $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ le derivate parziali seconde miste $f_{x_i x_j}$ e $f_{x_j x_i}$ esistano in un intorno di un punto $\mathbf{x}_0$ e siano entrambe continue in $\mathbf{x}_0$. Allora coincidono in $\mathbf{x}_0$. In particolare, se le derivate parziali miste $f_{x_i x_j}$ e $f_{x_j x_i}$ esistono e sono continue in tutto A allora coincidono su tutto A.*

❒ **Definizione 1.10.2.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(A)$ e sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Si dice DIFFERENZIALE SECONDO di f in $\mathbf{x}_0$ la funzione definita da

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) : \mathbf{h} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i \, h_j.$$

I coefficienti $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *che compaiono nel differenziale secondo possono essere ordinati in una matrice 2×2 detta* MATRICE HESSIANA *di f in $\mathbf{x}_0$*

$$\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_1 x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_{x_1 x_n}(\mathbf{x}_0) \\ f_{x_2 x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_2 x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_{x_2 x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{x}_0) & f_{x_n x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_{x_n x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Si nota che dal teorema di Schwarz, se $f \in \mathcal{C}^2(A)$ allora la matrice Hessiana è simmetrica in ogni punto di A.
Si ha inoltre

Teorema 1.10.3. (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO SECONDO LAGRANGE) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(A)$; per ogni $\mathbf{x}_0 \in A$ e $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in A$. Allora esiste un numero reale $\delta \in (0, 1)$ dipendente da $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{h}$ tale che*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{h}) \, h_i \, h_j$$

Teorema 1.10.4. (formula di Taylor con resto secondo Peano) *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(A)$; *per ogni* $\mathbf{x}_0 \in A$ *vale la formula*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\, h_i\, h_j + o(|\mathbf{h}|^2) \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}$$

dove $o(|\mathbf{h}|^2)$ *è tale che (il limite è inteso in* $\mathbb{R}^n$*)*

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{o(|\mathbf{h}|^2)}{|\mathbf{h}|^2} = 0.$$

CAPITOLO 2

Calcolo differenziale
Funzioni di più variabili

2.1. Derivate parziali e gradiente

✍ **Esercizio 2.1.1.**

Calcolare le derivate parziali della seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x+y)-xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x+y)-xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

✍ **Esercizio 2.1.2.**

Calcolare le derivate parziali della seguente funzione

$$f(x,y) = (x+y^2)\log(x-y)$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \log(x-y) + \frac{x+y^2}{x-y}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\log(x-y) - \frac{x+y^2}{x-y}.$$

✍ **Esercizio 2.1.3.**

Calcolare le derivate parziali della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Invece se $(x,y) = (0,0)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

✍ **Esercizio 2.1.4.**

Calcolare le derivate parziali della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{y} & y \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & y = 0 \end{cases}$$

Per $y \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Per $y = 0$ si ha invece

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan\frac{x}{h} - \frac{\pi}{2}}{h}.$$

A questo punto, se $x = 0$ tale limite non esiste (in particolare tende a $\pm\infty$ a seconda che h tenda a $0^{\mp}$ rispettivamente); se $x > 0$ e $h \to 0^-$ di nuovo il limite non esiste e anche per $x < 0$ e $h \to 0^+$. Insomma quest'ultimo limite non esiste per nessun valore di x dunque $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ non esiste.

✍ **Esercizio 2.1.5.**

Calcolare le derivate parziali della seguente funzione

$$f(x,y) = x + \log \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{x^2+y^2}{y} \cdot \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 1 - \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2+y^2}{y} \cdot \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{y(x^2+y^2)}.$$

✍ **Esercizio 2.1.6.**

Calcolare le derivate parziali della seguente funzione

$$f(x,y) = |x| \sin(xy)$$

La funzione è ben definita ovunque e si vede facilmente che è derivabile se $x \neq 0$; in particolare si ha per $x > 0$

$$f_x(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy) \qquad f_y(x,y) = x^2\cos(xy)$$

mentre per $x < 0$

$$f_x(x,y) = -\sin(xy) - xy\cos(xy) \qquad f_y(x,y) = -x^2\cos(xy).$$

Invece in $x = 0$ usando la definizione si ha

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|\sin(hy)}{h} = 0$$

e anche

$$f_y(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h+y)-f(0,y)}{h} = 0$$

quindi f ammette ovunque in $\mathbb{R}^2$ derivate parziali.

2.2. Piano tangente, differenziabilità e approssimazione

✍ **Esercizio 2.2.1.**

Si determini per quale valore di α il piano tangente al grafico di $z = f(x, y) = \sin(\alpha x + y^2)$ nel punto $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ è parallelo alla retta $x = y = 2z$. Esistono valori di α per cui è perpendicolare?

La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi in particolare è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, pertanto esiste il piano tangente e ha senso scrivere il gradiente in ogni punto.
Si ha

$$f_x(x, y) = \alpha\cos(\alpha x + y^2), \qquad f_y(x, y) = 2y\cos(\alpha x + y^2),$$

da cui

$$f_x(0, \sqrt{\pi}) = -\alpha, \qquad f_y(0, \sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}.$$

Il piano tangente alla superficie nel punto $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ ha equazione

$$z = -\alpha x - 2\sqrt{\pi}(y - \sqrt{\pi}).$$

La retta parallela a $x = y = 2z$ passante per $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \sqrt{\pi} + 2t \\ z = t \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tale retta giace sul piano tangente se, sostituendo x, y, z in funzione di t nell'equazione di tale piano si ottiene un'identità, cioè se

$$t = -2\alpha t - 4\sqrt{\pi}t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

che implica

$$\alpha = -\frac{1}{2} - 2\sqrt{\pi}.$$

Una maniera alternativa di procedere è la seguente. Un vettore normale alla superficie è

$$\mathbf{v} = (-f_x(0, \sqrt{\pi}), -f_y(0, \sqrt{\pi}), 1) = (\alpha, 2\sqrt{\pi}, 1);$$

tale vettore è perpendicolare al vettore $\mathbf{w} = (2, 2, 1)$ che individua la direzione della retta se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ da cui si ricava

$$2\alpha + 4\sqrt{\pi} + 1 = 0, \qquad \alpha = -\frac{1}{2} - 2\sqrt{\pi}.$$

I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono mai paralleli quindi il piano tangente non è perpendicolare alla retta per alcun valore di α.

✍ **Esercizio 2.2.2.**

Sia $f(x,y) = \log(1+\sqrt{x^2+2y})$; calcolate il gradiente ∇f nel punto $(2,0)$ e scrivete l'equazione del piano tangente al grafico di f sopra lo stesso punto.

La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty$ quindi in particolare è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno del punto $(2,0)$, pertanto esiste il piano tangente e ha senso scrivere il gradiente in quel punto. Scriviamo il gradiente della funzione nel generico punto (x,y). Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{1}{1+\sqrt{x^2+2y}}\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2y}}, \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2y}}\,\frac{2}{2\sqrt{x^2+2y}}\right)$$

dunque

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2y}+x^2+2y}, \frac{1}{\sqrt{x^2+2y}+x^2+2y}\right)$$

e

$$\nabla f(2,0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel generico punto (x_0,y_0) è

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Nel nostro caso $x_0 = 2, y_0 = 0$, e $f(2,0) = \log 3$ da cui l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(2,0)$ è

$$z = \log 3 + \frac{1}{3}(x-2) + \frac{1}{6}y$$

o anche

$$2x + y - 6z = 4 - 6\log 3.$$

✍ **Esercizio 2.2.3.**

Dire se la seguente funzione è differenziabile

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}x^2 y & y \geq 0 \\ \dfrac{e^{xy}-1}{y} & y < 0 \end{cases}$$

Se si considerano i punti (x,y) con $y \neq 0$ allora la funzione è differenziabile perché somma e prodotto di funzioni differenziabili. Resta da studiare la differenziabilità nei punti $(x,0)$ con

$x \in \mathbb{R}$. Proviamo a studiare la differenziabilità in tali punti usando la condizione sufficiente di differenziabilità. Dimostreremo che entrambe le derivate parziali sono funzioni continue.
Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

e anche

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h}.$$

A questo punto, se $h > 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+\frac{1}{2}x^2h-x}{h} = \frac{x^2}{2}$$

mentre se $h < 0$ allora

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{xh}-1}{h}-x}{h}.$$

Usando due volte il teorema di De l'Höpital (oppure gli sviluppi in serie di Mac Laurin) si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{xh}-1}{h}-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{xh}-1-xh}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{xe^{xh}-x}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2e^{xh}}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

Quindi in ogni caso

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{x^2}{2}.$$

D'altra parte, se $y > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + xy$$

che tende a 1 per $(x,y) \to (x_0,0)$ mentre se $y < 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}(ye^{xy}) = e^{xy}$$

che pure tende a 1 per $(x,y) \to (x_0,0)$. Inoltre, sempre per $y > 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{2}$$

e per $y < 0$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(xy-1)e^{xy}+1}{y^2}$$

che può essere riscritto come

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(xy-1)e^{xy}+1}{x^2y^2}\, x^2.$$

A questo punto, considerando la funzione

$$g(x,y) = \frac{(xy-1)e^{xy}+1}{x^2y^2}$$

essa ammette limite uguale a $1/2$ per $(x,y) \to (x_0,0)$ (si può pensare di vederlo come limite di una variabile ponendo $xy = t$ con $t \to 0$ e qundi usare il teorema di de l'Höpital).
Quindi riassumendo, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0).$$

Dunque le derivate parziali esistono e sono continue, allora la funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

✍ **Esercizio 2.2.4.**

Dire se la seguente funzione è differenziabile

$$x^{3/2} + (xy)^{3/2}$$

Di nuovo usiamo i teoremi noti. Allora si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2}(xy)^{1/2}y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3}{2}(xy)^{1/2}x$$

dunque le derivate parziali esistono in tutti i punti del dominio della funzione e sono ivi continue, allora la funzione è differenziabile in tutti i punti del suo dominio.

✍ **Esercizio 2.2.5.**

Dire se la seguente funzione è differenziabile

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{y} & y \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & y = 0 \end{cases}$$

La funzione è sicuramente differenziabile nei punti (x,y) con $y \neq 0$. Studiamo prima di tutto l'esistenza delle derivate parziali nei punti $(x,0)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = 0$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan \frac{x}{h} - \frac{\pi}{2}}{h}$$

e questo limite non esiste per ogni valore di x reale, basta considerare prima $h \to 0^+$ e poi $h \to 0^-$. Quindi la funzione non può essere differenziabile nei punti $(x,0)$ con $x \in \mathbb{R}$.

✍ **Esercizio 2.2.6.**

Si verifichi, in base alla definizione, che la funzione

$$f(x,y) = |x| \log(1+y)$$

è differenziabile in (0,0).

Prima di tutto si ha $f(0,0) = 0$. Inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Allora

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|x|\log(1+y)}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|x||y|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{2}\sqrt{h^2+k^2};$$

il teorema dei carabinieri ci permette di concludere che il limite dato esiste e fa zero e dunque f è differenziabile in $(0,0)$. (Quest'ultimo limite si poteva risolvere anche passando a coordinate polari).

✍ **Esercizio 2.2.7.**

Si calcolino le derivate prime e seconde della funzione $f(x,y) = x^y$ e si scriva $d^2 f(1,2)$ (differenziale di ordine 2).

Si ha

$$f_x(x,y) = y x^{y-1}, \qquad f_y(x,y) = x^y \log x,$$

e inoltre

$$f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy}(x,y) = x^{y-1}(1 + y\log x), \quad f_{yy}(x,y) = x^y \log^2 x$$

e in particolare

$$f_{xx}(1,2) = 2, \qquad f_{xy}(1,2) = 1, \qquad f_{yy}(1,2) = 0$$

per cui

$$d^2 f(1,2) = 2dx^2 + dx\,dy.$$

2.3. Derivate direzionali e formula del gradiente

✍ **Esercizio 2.3.1.**

Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$$

a) si verifichi che non è differenziabile in (0,1)
b) si calcolino tutte le derivate direzionali $D_{\mathbf{v}}f(0,1)$ ($\mathbf{v}$ versore di $\mathbb{R}^2$)

a) Si ha $f(0,1) = 1$ e poiché $f(x,1) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(0,y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ si deduce che

$$f_x(0,1) = f_y(0,1) = 0.$$

Occorre calcolare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,1+k) - f(0,1) - \langle \nabla f(0,1),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^2k}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Questo limite non esiste (in particolare non è zero) basta considerare il limite lungo la curva $h = k$ e si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{2}|h|}$$

e quindi f non è differenziabile in $(0,1)$.

b) Non essendo f differenziabile in $(0,1)$, per calcolare le derivate direzionali in quel punto non è possibile sfruttare la formula del gradiente. Bisogna utilizzare la definizione. Si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\alpha, 1+t\sin\alpha) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2\cos^2\alpha(t\sin\alpha)}}{t} = \sqrt[3]{\cos^2\alpha\sin\alpha}.$$

Si può anche procedere nel seguente modo: porre $g(t) := f(t\cos\alpha, 1 + t\sin\alpha)$; in questo modo si verifica facilmente che $D_{\mathbf{v}}(0,1) = g'(0) = \sqrt[3]{\cos^2\alpha\sin\alpha}$.

✍ **Esercizio 2.3.2.**

Sia data la funzione
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{xy}}{e^{2x}}$$
i) Si calcoli $\nabla f(-1,-1)$.
ii) Si esprima l'equazione della linea di livello $\mathcal{C}$ passante per il punto $(-1,-1)$ nella forma $y = y(x)$, e si determini il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa $x = -1$.
iii) Si verifichi che il gradiente $\nabla f(-1,-1)$ è perpendicolare a $\mathcal{C}$ nel punto $(-1,-1)$.

i) Si ha
$$f_x(x,y) = \frac{\frac{y}{2\sqrt{xy}}e^{2x} - 2e^{2x}\sqrt{xy}}{e^{4x}} \qquad f_x(-1,-1) = -\frac{5}{2}e^2$$
$$f_y(x,y) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{xy}}}{e^{2x}} \qquad f_y(-1,-1) = -\frac{1}{2}e^2$$
da cui
$$\nabla f(-1,-1) = \left(-\frac{5}{2}e^2, -\frac{1}{2}e^2\right).$$
ii) La generica curva di livello di f è
$$\frac{\sqrt{xy}}{e^{2x}} = C.$$
Imponendo il passaggio per il punto $(-1,-1)$ si ottiene $C = e^2$ dunque la curva di livello richiesta è
$$\frac{\sqrt{xy}}{e^{2x}} = e^2.$$
Ricavando la y in funzione della x si ottiene
$$y = \left[\frac{e^{2+2x}}{\sqrt{x}}\right]^2 = \frac{e^{4+4x}}{x}.$$
Quindi il coefficiente angolare della retta tangente alla curva di livello nel punto $(-1,-1)$ si ottiene calcolando la derivata della precedente funzione $y = y(x)$ valutata in $x = -1$, ossia
$$m = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{4+4x}}{x}\right)_{|x=-1} = \left(\frac{4e^{4+4x}x - e^{4+4x}}{x^2}\right)_{|x=-1} = -5.$$

iii) L'equazione della retta tangente alla curva di livello nel punto $(-1,-1)$ risulta dunque

$$y = -5x - 6$$

che in forma parametrica ad esempio si può scrivere come

$$x = t \qquad y = -5t - 6.$$

In questo modo si individua un vettore direzione $\mathbf{w} = (1, -5)$. Allora occorre verificare che

$$\nabla f(-1,-1) \cdot \mathbf{w} = 0$$

e questo si vede facilmente essere vero.

✍ **Esercizio 2.3.3.**

Sia

$$f(x,y) = (ax - y^3)\cos x^2.$$

Determinare il valore del parametro reale a affinché la direzione di massima crescita in $(0,2)$ sia quella della tangente alla parabola $y = x^2 + 3x + 2$ orientata nel verso delle x negative.

Si sa che la direzione di massima crescita di f (in un certo punto (x_0, y_0)) coincide con il versore

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{||\nabla f(x_0,y_0)||}.$$

Quindi prima di tutto andiamo a calcolare il gradiente di f in $(0,2)$. Ponendo

$$g(x) = f(x,2) = (ax-8)\cos x^2 \qquad h(y) = f(0,y) = -y^3$$

si ottiene rapidamente

$$f_x(0,2) = g'(0) = a \qquad f_y(0,2) = h'(2) = -12.$$

Quindi il versore di massima crescita risulta

$$\mathbf{v} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+144}}, -\frac{12}{\sqrt{a^2+144}} \right).$$

Esso deve coincidere con il versore della tangente alla parabola data, nello stesso punto $(0,2)$, orientato nel verso delle x negative. Iniziamo a calcolare la retta tangente alla parabola in

$(0,2)$. Il coefficiente angolare è dato dalla derivata della funzione $y = x^2 + 3x + 2$ calcolato in 0, dunque $m = 3$. Pertanto la retta tangente risulta $y = 3x + 2$ che se scritta in forma parametrica, ad esempio

$$x = -t \qquad y = -3t + 2$$

individua immediatamente il vettore richiesto $(-1, -3)$ da cui il versore cercato

$$\mathbf{w} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

Uguagliando $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ottiene che l'unico valore possibile per a è $a = -4$.

✍ **Esercizio 2.3.4.**

> Assegnata la funzione $f(x,y) = \log(x^2 - y^2 + 1)$,
> a) calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(\sqrt{2}, 0)$, nella direzione individuata dal vettore $(4, -3)$.
> b) Determinare l'equazione della curva di livello di f che passa per il punto $(\sqrt{2}, 0)$.

Hint. a) Si ricava il versore corrispondente al vettore dato che è

$$\mathbf{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Si applica la definizione di derivata direzionale e successivamente il teorema di de l'Hospital per risolvere la forma di indecisione

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(\sqrt{2}, 0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\sqrt{2} + \frac{4}{5}t, 0 - \frac{3}{5}t\right) - f(\sqrt{2}, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\log\left(3 + \frac{7}{25}t^2 + \frac{8}{5}\sqrt{2}t\right) - \log 3}{t} \\ &\overset{H}{=} \lim_{t \to 0} \frac{\frac{14}{25}t + \frac{8}{5}\sqrt{2}}{3 + \frac{7}{25}t^2 + \frac{8}{5}\sqrt{2}t} = \frac{8}{15}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

b) La generica curva di livello è $\log(x^2 - y^2 + 1) = C$; imponendo il passaggio per $(\sqrt{2}, 0)$ si ottiene $C = \log 3$ quindi la curva di livello richiesta è (passando agli esponenziali) $x^2 - y^2 = 2$. Si tratta di un'iperbole.

✍ **Esercizio 2.3.5.**

Sia assegnata la funzione $f(x, y) = 3x^2 + y^2$.
a) Calcolare il vettore gradiente $\nabla f(1, 3)$;
b) Determinare la curva di livello passante per il punto $(1, 3)$;
c) scrivere l'equazione della retta tangente a tale curva di livello nel punto $(1, 3)$.

Hint. a) $\nabla f(1, 3) = (6, 6)$.
b) La generica curva di livello è $3x^2 + y^2 = C$; imponendo il passaggio per $(1, 3)$ si ottiene la curva $3x^2 + y^2 = 12$. Si tratta di un'ellisse.
c) Si sa che il gradiente calcolato in un certo punto (x_0, y_0) è ortogonale alla curva di livello nello stesso punto, dunque consideriamo un vettore $\mathbf{v}$ ortogonale a $(6, 6)$ per esempio $(-1, 1)$ e andiamo a scrivere l'equazione parametrica della retta per il punto $(1, 3)$ di vettore direzione $(-1, 1)$. Si ottiene

$$x = 1 + t(-1) = 1 - t \qquad y = 3 + t$$

che in forma cartesiana diventa $y = 4 - x$.

✍ **Esercizio 2.3.6.**

Calcolare la derivata direzionale della funzione $z = e^{x-y^2}$ nel punto $(0, 0)$ lungo la direzione individuata dal vettore $(1, 1)$.

Prima di tutto si ha

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^{x-y^2} \qquad f_x(0, 0) = 1 \\ f_y(x, y) &= -2ye^{x-y^2} \qquad f_y(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Sia ora

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

il versore individuato dal vettore di $(1, 1)$. La funzione data è differenziabile, quindi applicando la formula del gradiente si ottiene

$$D_{\mathbf{v}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

✍ **Esercizio 2.3.7.**

Calcolare la derivata di $f(x,y) = e^x(x^2+y^2)$ nel punto $P=(0,1)$, nella direzione della bisettrice del secondo e quarto quadrante, nel verso delle y crescenti.

Prima di tutto si ha

$$f_x(x,y) = e^x(x^2+y^2+2x) \qquad f_x(0,0) = 1$$
$$f_y(x,y) = e^x(x^2+y^2+2y) \qquad f_y(0,0) = 1.$$

Sia ora

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

il versore individuato dal vettore di $(-1,1)$ che è la direzione richiesta. La funzione data è differenziabile, quindi applicando la formula del gradiente si ottiene

$$D_{\mathbf{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

2.4. Esercizi di ricapitolazione

✍ **Esercizio 2.4.1.**

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{-2} y \arctan(x^2+y^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) si stabilisca se è continua in (0,0)
(b) si calcolino le derivate parziali in (0,0).

(a) La funzione non è continua nell'origine. Per vederlo basta considerare la curva $x = y^{3/2}$. Infatti

$$f(y^{3/2}, y) = \frac{y \arctan(y^3+y^2)}{y^3} = \frac{\arctan(y^3+y^2)}{y^3+y^2} \cdot \frac{y^3+y^2}{y^2} = \frac{\arctan(y^3+y^2)}{y^3+y^2} \cdot (1+y) \to 1$$

e dunque non tende a zero che è il valore della funzione nell'origine.

(b) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$
Questo esercizio mostra che una funzione può avere derivate parziali in un punto ma non essere continua in quel punto.

✍ **Esercizio 2.4.2.**

Data la funzione
$$f(x,y) = |y| \sin(x^2+y^2)$$
si stabilisca in quali punti di $\mathbb{R}^2$
a) è continua
b) ammette derivate parziali
c) è differenziabile

(a) f è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ in quanto composizione di funzioni continue.

(b) Se $y > 0$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\cos(x^2+y^2)$$
e anche
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x^2+y^2) + 2y^2\cos(x^2+y^2).$$
Invece se $y < 0$ si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy\cos(x^2+y^2)$$
e anche
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x^2+y^2) - 2y^2\cos(x^2+y^2).$$
Infine se $y = 0$ abbiamo
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = 0$$
mentre
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|\sin(x^2+h^2)}{h}$$
e quest'ultimo limite vale $\sin x^2$ se $h > 0$ mentre vale $-\sin x^2$ se $h < 0$, pertanto se $x = \pm\sqrt{n\pi}$ si ha che $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ esiste e fa 0, altrimenti non esiste.

(c) Analizziamo le derivate parziali. Se $y \neq 0$ le derivate parziali sono chiaramente continue perché composizione di funzioni continue. Dunque f è differenziabile per $y \neq 0$. Se $y = 0$ e $x = \pm\sqrt{n\pi}$ allora le derivate parziali esistono e sono continue, dunque f ancora una volta è differenziabile, mentre se $y = 0$ ma $x \neq \pm\sqrt{n\pi}$ le derivate parziali non esistono come si è visto in precedenza e dunque f non è differenziabile.

✍ **Esercizio 2.4.3.**

Si verifichi che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua e dotata di derivate parziali $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ma non è differenziabile in (0,0).

Di sicuro la funzione è continua per $(x,y) \neq (0,0)$. Invece, per quanto riguarda la continuità nell'origine osserviamo che

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|(x^2y^2)}{x^4+y^4} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|y| = 0;$$

dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = 0$$

dal teorema dei due carabinieri e pertanto la funzione è continua anche nell'origine. D'altra parte, per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3(x^4+y^4) - 4x^3x^2y^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2xy^7 - 2x^5y^3}{(x^4+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x^2(x^4+y^4) - 4y^3x^2y^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{3x^6y^2 - y^6x^2}{(x^4+y^4)^2}$$

mentre nell'origine si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Allora

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^3}{(h^4+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}$$

e questo limite non esiste, basta considerare il limite lungo la curva $h = k$: in questo caso si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^5}{2\sqrt{2}h^4|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{h}{|h|}$$

e dunque se $h > 0$ si ottiene $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ mentre se $h < 0$ si ottiene $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

✍ **Esercizio 2.4.4.**

Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3|x|xy + y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

i) f è continua in $(0, 0)$?
ii) Esistono le derivate parziali di f in $(0, 0)$? In caso affermativo calcolarle.
iii) Esiste la derivata direzionale di f in $(0, 0)$ nella direzione della bisettrice del primo quadrante? In caso affermativo calcolarla.

(i) Conviene passare a coordinate polari. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 3\,|x|\,x\,y + y^4}{x^2 + y^2} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\, \cos^3\theta + 3\,\rho^3\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta + \rho^4\,\sin^4\theta}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} [\rho\,\cos^3\theta + 3\,\rho\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta + \rho^2\,\sin^4\theta]. \end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |\rho\,\cos^3\theta| = \lim_{\rho\to 0} \rho\,|\cos^3\theta| \le \lim_{\rho\to 0} \rho = 0$$

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |3\,\rho\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta| = \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho\,||\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta| \le \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho = 0$$

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |\rho^2\,\sin^4\theta| = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\,\sin^4\theta \le \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0.$$

Dal teorema dei carabinieri e dal fatto che $f \to 0 \Leftrightarrow |f| \to 0$ si ottiene facilmente che

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\cos^3\theta = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0} \rho^2\,\sin^4\theta = 0$$

da cui anche

$$\lim_{\rho\to 0} [\rho\,\cos^3\theta + 3\,\rho\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta + \rho^2\,\sin^4\theta] = 0.$$

Quindi f è continua in $(0,0)$.

(ii) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2}\,\frac{1}{h} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h^2}\,\frac{1}{h} = 0.$$

(iii) La direzione della bisettrice del primo quadrante coincide con la direzione individuata dal versore

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

quindi

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\,v_1, t\,v_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\,\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3\,t^2\,|t|\,\frac{1}{2\sqrt{2}} + t^4\,\frac{1}{4}}{t^2}\,\frac{1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3\,\frac{|t|}{t}\,\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{4}\right] \end{aligned}$$

e questo ultimo limite non esiste in quanto vale $\sqrt{2}$ per $t \to 0^+$ mentre vale $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ per $t \to 0^-$.

✍ Esercizio 2.4.5.

Considerare

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^2}{xy}.$$

a) Indicare l'insieme di definizione.
b) Dire se esiste il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$.
c) Stabilire se la funzione può essere estesa con continuità a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
d) Dire dove la funzione è derivabile e perché.
e) Dire dove la funzione è differenziabile e perché.

a) Il dominio di f risulta l'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \quad \wedge y \neq 0\}$$

quindi f risulta ben definita fuori dagli assi cartesiani.

b) Il limite richiesto non esiste. Basta considerare la restrizione di f alle curve $y = \pm x$. Si ha

$f(x,x) \to 1$ mentre $f(x,-x) \to -1$.
c) Per $h, k \neq 0$ si ha che i limiti

$$\lim_{(x,y)\to(h,0)} f(x,y) \qquad\qquad \lim_{(x,y)\to(0,k)} f(x,y)$$

non esistono pertanto f non può essere estesa con continuità in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
d) + e) La funzione è derivabile e differenziabile in tutto E perché rapporto di due polinomi e il denominatore non si annulla in E.

✍ **Esercizio 2.4.6.**

Considerare la funzione

$$f(x,y) = e^{x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

a) Indicare gli insiemi di esistenza e continuità.
b) Calcolarne, dove esistono, le derivate parziali.
c) Indicare l'insieme di differenziabilità.
d) Calcolare la derivata direzionale, nel punto $(1,1)$ nella direzione del versore della retta $y = x$ orientata nel verso delle x crescenti.

a) La funzione è ben definita e continua per $x \neq 0$. La funzione può essere estesa con continuità ponendo $f(0,y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, essendo l'arcotangente una funzione limitata e $x \to 0$.
b) Si ha

$$f_x(x,y) = e^{x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{xy}{x^2+y^2}\right] \qquad\qquad f_y(x,y) = e^{x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

c) Si vede facilmente che f è differenziabile nel suo dominio di definizione
d) Siccome in $(1,1)$ la funzione è differenziabile, vale la formula del gradiente e si ha

$$f_x(1,1) = e^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] \qquad f_y(1,1) = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$$

da cui, posto

$$\mathbf{w} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

si ha

$$D_{\mathbf{w}}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \mathbf{w} = -e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

✍ **Esercizio 2.4.7.**

Si consideri la seguente funzione di $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+3xy^2+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dire se
i) f è continua in $(0,0)$;
ii) esistono le derivate parziali di f in $(0,0)$ ed eventualmente calcolarle;
iii) f è differenziabile in $(0,0)$.

(i) Conviene passare a coordinate polari. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+3\,x\,y^2+y^4}{x^2+y^2} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\,\cos^3\theta + 3\,\rho^3\,\cos\theta\,\sin^2\theta + \,\rho^4\,\sin^4\theta}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0}[\rho\,\cos^3\theta + 3\,\rho\,\cos\theta\,\sin^2\theta\,+\,\rho^2\,\sin^4\theta].\end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che

$$0 \le \lim_{\rho\to 0}|\rho\,\cos^3\theta| = \lim_{\rho\to 0}\rho\,|\cos^3\theta| \le \lim_{\rho\to 0}\rho = 0$$

$$0 \le \lim_{\rho\to 0}|3\,\rho\,\cos\theta\,\sin^2\theta| = \lim_{\rho\to 0}3\,\rho\,|\cos\theta\,\sin^2\theta| \le \lim_{\rho\to 0}3\,\rho = 0$$

$$0 \le \lim_{\rho\to 0}|\rho^2\,\sin^4\theta| = \lim_{\rho\to 0}\rho^2\,\sin^4\theta \le \lim_{\rho\to 0}\rho^2 = 0.$$

Dal teorema dei carabinieri e dal fatto che $f\to 0 \Leftrightarrow |f|\to 0$ si ottiene facilmente che

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\cos^3\theta = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0}3\,\rho\,\cos\theta\,\sin^2\theta = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0}\rho^2\,\sin^4\theta = 0$$

da cui anche

$$\lim_{\rho\to 0}[\rho\,\cos^3\theta + 3\,\rho\,\cos\theta\,\sin^2\theta\,+\,\rho^2\,\sin^4\theta] = 0.$$

Quindi f è continua in $(0,0)$.

(ii) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^2}\,\frac{1}{h} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4}{h^2}\,\frac{1}{h} = 0.$$

(iii) Per vedere se f è differenziabile in $(0,0)$ occorre vedere se esiste e fa zero il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h\, f_x(0,0) - k\, f_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h\, f_x(0,0) - k\, f_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+3hk^2+k^4}{h^2+k^2} - 0 - h - 0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3+3hk^2+k^4-h^3-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2hk^2+k^4}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Dimostriamo che questo limite non esiste. Per fare questo è sufficiente trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione

$$g(h,k) = \frac{2hk^2+k^4}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

assuma valori diversi. Prendiamo ad esempio $h = k$. Si ha

$$g(h,h) = \frac{2h^3+h^4}{2h^2\sqrt{2}\,|h|} = \frac{2h+h^2}{2\sqrt{2}\,|h|}.$$

Quindi se $h \to 0^+$ allora $g(h,h) \to 1/\sqrt{2}$, se invece $h \to 0^-$ allora $g(h,h) \to -1/\sqrt{2}$ e questo basta a concludere che f non è differenziabile nell'origine.

✍ **Esercizio 2.4.8.**

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua nell'origine.
b) Calcolare, se esistono, le derivate parziali di f nell'origine.
c) Calcolare le derivate direzionali di f nell'origine, lungo la direzione individuata dal vettore $(1,1)$. Vale la formula del gradiente nell'origine?
d) Stabilire se f è differenziabile nell'origine.

a) Passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 0$$

perché prodotto di una funzione limitata per una infinitesima, quindi f è continua nell'origine.

b) Usando la definizione si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 1$$

c) La direzione richiesta è individuata dal versore

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

da cui

$$D_{\mathbf{w}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t, \frac{1}{\sqrt{2}}t\right) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Siccome

$$D_{\mathbf{w}} f(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \nabla f(0,0)\cdot \mathbf{w} = \sqrt{2},$$

non vale la formula del gradiente.

d) Siccome non vale la formula del gradiente, si ha che f non è differenziabile nell'origine.

✍ **Esercizio 2.4.9.**

Data la funzione

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{yz^2}{x^2+y^2+z^2}\cos\dfrac{x}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

si stabilisca se è continua e differenziabile nell'origine.

La funzione data è continua nell'origine, infatti

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left| \frac{yz^2}{x^2+y^2+z^2}\cos\frac{x}{z} \right| \leq \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|z||yz|}{x^2+y^2+z^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |z|\cdot\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \leq \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |z| = 0. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h,0) - f(0,0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0,h) - f(0,0,0)}{h} = 0$$

da cui

$$\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \frac{kj^2}{h^2+k^2+j^2} \cdot \cos\frac{h}{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}$$

e questo limite non esiste, ad esempio basta prendere $k = h = j$ che ci porta a

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^3}{3h^2} \cdot \cos 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3h^2}}}$$

e questo vale $\dfrac{\cos 1}{3\sqrt{3}}$ per $k \to 0^+$ mentre vale $-\dfrac{\cos 1}{3\sqrt{3}}$ per $k \to 0^-$, dunque f non è differenziabile nell'origine.