Formula di Taylor

1. Nei seguenti passaggi c'è un errore, quale? Per $x \to 0$ si ha che

$$\log(\cos x + \frac{x^2}{2}) \sim \log(1 + \frac{x^2}{2}) \sim \frac{x^2}{2}$$

(R. $\log(1 + \frac{x^2}{2}) \sim \frac{x^2}{2}$ ma $\log(\cos x + \frac{x^2}{2})$ non è asintotico a $\log(1 + \frac{x^2}{2})$, l'asintotico non si può usare nelle somme e all'interno di un logaritmo!!)

2. Verificare che, per $x \to 0$, $f(x) = \log(\cos x + \frac{x^2}{2}) \sim \frac{x^4}{4!}$ (R. $f(x) = \log\left[1 + (\cos x + \frac{x^2}{2} - 1)\right] \sim_{x\to 0} \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) + \frac{x^2}{2} - 1 \sim \frac{x^4}{4!}$)

3. Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \sin x - x$ (R. 3, $f(x) \sim -\frac{1}{6}x^3$)

2) $f(x) = \sin^2 x - x^2$ (R. 4, $f(x) \sim -\frac{1}{3}x^4$)

3) $f(x) = x\log(1-x) + e^{x^2} - 1$ (R. 3, $f(x) \sim -\frac{1}{2}x^3$)

4) $f(x) = \cos 2\sqrt{x} - e^{-2x}$ (R. 2, $f(x) \sim -\frac{4}{3}x^2$)

5) $f(x) = e^{\sin x} - \cos(2\sqrt{x})$ (R. 1, $f(x) \sim 3x$)

4. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to+\infty} x\left[\log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$ (R. $-\frac{1}{2}$, si pone $t = \frac{1}{x}$)

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \log\cos x}{x^4}$ (R. $-\frac{1}{8}$)

3) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\tan x} - \frac{1}{x^2}\right)$ (R. $-\frac{1}{3}$)

4) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right)$ (R. $-\frac{1}{3}$)

5) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x-\sin^2\sqrt{x}-\sin^2 x}{x^2}$ (R. $-\dfrac{2}{3}$)

6) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos x+1-e^{x^2}}{x^4}$ (R. -1)

7) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin x+\log(1-x^2)}{x^2(2x+x^2)^2}$ (R. $-\dfrac{1}{6}$)

5. Verificare che, per $x\to 0$, vale lo sviluppo:

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+o(x^2)$$

(R. $\dfrac{1}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}=\dfrac{4+(1+e^x)(-2+x)}{4(1+e^x)}=\dfrac{4+(2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))(-2+x)}{4(1+e^x)}\sim \dfrac{o(x^2)}{8}$)

6. Calcolare lo sviluppo di MacLaurin del quarto ordine di

$$f(x)=\log(\cos x)$$

(R. $\log(\cos x)=\log\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)=\left[-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]^2+ o\left(\left[-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]^2\right)=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)$)

7. Calcolare lo sviluppo di MacLaurin del quarto ordine di

$$f(x)=e^{\sin x}$$

(R. $e^{\sin x}=e^{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)}=1+\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]+\dfrac{1}{2}\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]^2+\dfrac{1}{3!}\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]^3+ \dfrac{1}{4!}\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]^4+o\left(\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]^4\right)=1+x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)$)
(oppure: $f'(x)=e^{\sin x}\cos x$, $f''(x)=e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)$, $f'''(x)=e^{\sin x}(\cos^3 x-3\sin x\cos x-\cos x)$, $f^{(4)}(x)=e^{\sin x}(\cos^4 x-6\sin x\cos^2 x-4\cos^2 x+3\sin^2 x+\sin x)$, da cui $f'(0)=1$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=-3$)

8. Stabilire se la seguente funzione è infinita o infinitesima per $x\to 0$ e stabilirne l'ordine:

$$f(x)=\frac{e^{1+x^2}-e}{x-\sin x}$$

(R. f è un infinito del prim'ordine, $f \sim 6e\frac{1}{x}$)

9. Date le funzioni $f(x) = e^{x^2}$ e $g(x) = \lambda x^2 + \cos x$, determinare il valore del parametro reale λ per cui la funzione $f - g$ sia infinitesima, per $x \to 0$ di ordine superiore al secondo. Per tale valore di λ determinare l'ordine di infinitesimo. (R. Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin si trova che se $\lambda \neq \frac{3}{2}, f(x) \sim (\frac{3}{2} - \lambda)x^2$, quindi è un infinitesimo del secondo ordine; se $\lambda = \frac{3}{2}, f(x) \sim \frac{11}{24}x^4$, quindi ha ordine 4)