Michela Eleuteri

ANALISI MATEMATICA

Funzioni di più variabili reali

Domini, limiti e continuità di funzioni di più variabili

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Calcolo infinitesimale per funzioni reali di più variabili

Scopo di questo capitolo è iniziare a studiare le funzioni reali di più variabili reali, del tipo $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1.1. Grafico, linee di livello e domini

❒ **Definizione 1.1.1.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Allora il GRAFICO di una funzione reale di più variabili è l'insieme

$$\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

È chiaro che se $n = 2$ è possibile una visualizzazione del grafico in $\mathbb{R}^3$ altrimenti per $n > 2$ questo non è più possibile.
Un altro modo per rappresentare graficamente una funzione reale di più variabili reali è tramite gli insiemi di livello.

❒ **Definizione 1.1.2.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Allora gli INSIEMI DI LIVELLO (O IPERSUPERFICI DI LIVELLO) per una funzione reale di più variabili sono gli insiemi

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = c\}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.
Se $n = 2$ si parla di LINEE DI LIVELLO alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ e sono gli insiemi

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$; se $n = 3$ si parla di SUPERFICI DI LIVELLO alla ipersuperficie di equazione $k = f(x, y, z)$ e sono gli insiemi

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Le curve di livello rappresentano il luogo dei punti dove f ha valore costante, quindi danno informazioni sulla f anche se implicitamente. Ad esempio, sono le linee che vengono tracciate sulle carte topografiche ad indicare luoghi che hanno la stessa altitudine oppure nelle carte delle previsioni del tempo, a indicare ad esempio le linee isobare (a pressione costante).
Si mediti sui seguenti esempi chiave.

✎ **Esempio 1.1.3.** *Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$. Tale superficie prende il nome di* PARABOLOIDE. *È una funzione definita su tutto $\mathbb{R}^2$, è sempre positiva o nulla, le linee di livello sono del tipo $x^2 + y^2 = C$, al variare di $C \geq 0$. Queste linee rappresentano delle circonferenze centrate nell'origine di raggio $\sqrt{C}$. Il paraboloide quindi ha simmetria radiale e allontanandosi dall'origine cresce più velocemente (perché le linee sono più fitte).*

✎ **Esempio 1.1.4.** *Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Questa superficie prende il nome di* CONO. *Anch'essa è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è sempre positiva o nulla, ma stavolta le linee di livello sono del tipo $x^2 + y^2 = C^2$, quindi rappresentano circonferenze centrate nell'origine e di raggio C. Stavolta le linee di livello sono equidistanziate e quindi il cono cresce "meno velocemente" del paraboloide.*

Se pensiamo di andare a sezionare le precedenti superfici con il piano $y = 0$ otteniamo rispettivamente una parabola di equazione $z = x^2$ e la funzione valore assoluto $z = |x|$ da cui si evince il punto angoloso.
Naturalmente anche le funzioni reali di più variabili reali sono definite all'interno di un dominio naturale che è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ dove ha senso scrivere la f. Valgono le stesse regole di buona definizione usate per le funzioni reali di una variabile reale, con una difficoltà in più, che i domini risultati saranno sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, quindi nel caso ad esempio $n = 2$ dove c'è una visualizzazione delle nostre superfici, i domini saranno sottoinsiemi del piano.

✎ **Esempio 1.1.5.** *Trovare il dominio naturale della seguente funzione*

$$f(x, y) = \sqrt{\tan(xy)} \sin(e^{\sqrt{xy}})$$

Si osserva che la radice quadrata è ben definita se il suo argomento è positivo o nullo; l'esponenziale è ben definito ovunque così come la funzione seno; la funzione tangente invece è ben definita se il suo argomento è diverso da $\frac{\pi}{2} + k\,\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Dunque le condizioni da porre sono

$$\begin{cases} \tan(xy) \geq 0 \\ xy \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ xy \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\pi \leq xy \leq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ xy \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

quindi la condizione da porre è

$$n\pi \leq xy < \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si tratta di una successione di regioni comprese tra due iperboli equilatere nel primo e nel terzo quadrante (alcune iperboli sono comprese, altre sono escluse).

Come si vede già da questo semplice esercizio, il tipo di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che è necessario considerare nello studio di funzioni di due variabili può essere molto vario, e non ad esempio insiemi descrivibili semplicemente come unioni di un numero finito di insiemi di forma semplice (per esempio rettangoli). Dunque la necessità di considerare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ piuttosto generali porta con sé a sua volta il bisogno di introdurre certe proprietà degli insiemi, il cui studio prende il nome di TOPOLOGIA. Come avremo modo di renderci conto, alcune proprietà topologiche dell'insieme dipenderanno poi da proprietà delle funzioni continue.

1.2. Nozione topologiche di base

Partiamo dalla seguente definizione.

❒ **Definizione 1.2.1.** Si dice INTORNO SFERICO DI CENTRO $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ E RAGGIO $r > 0$ l'insieme

$$U_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r\}$$

r si dice RAGGIO DELL'INTORNO*; $\mathbf{x}_0$ si dice* CENTRO DELL'INTORNO.

Sia ora $U_r(\mathbf{x}_0)$ un generico intorno sferico; si hanno le seguenti definizioni.

❒ **Definizione 1.2.2.** Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{x}_0 \in E$ si dice:
- INTERNO AD E se $\exists U_r(\mathbf{x}_0) \subseteq E$;
- ESTERNO AD E se $\exists U_r(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus E$;
- DI FRONTIERA PER E se $\forall U_r(\mathbf{x}_0)$, $U_r(\mathbf{x}_0) \cap E \neq \emptyset$ e $U_r(\mathbf{x}_0) \cap \mathbb{R}^n \setminus E \neq \emptyset$.

L'insieme dei punti interni ad E si dice PARTE INTERNA DI E e si indica con $\mathring{E}$. L'insieme dei punti di frontiera si dice BORDO DI E e si indica con ∂E. L'unione di E e del suo bordo si dice CHIUSURA DI E e si indica con $\overline{E} = E \cup \partial E$. Si ha sempre $\mathring{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}$ e anche $\mathring{E} \cup \partial E = \overline{E}$.

✎ **Esempio 1.2.3.** *Sia* $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. *Allora un intorno sferico dell'origine è*

$$U_r(0,0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$$

quindi sono le sfere bidimensionali (piene) private del cerchio $x^2 + y^2 = r^2$. *Sia ora* $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > x^2\}$. *L'insieme descritto è l'unione delle due regioni "interne" alle parabole* $y = x^2$ *e* $y = x^2$. *I punti* $(0,y)$ *con* $y \neq 0$ *sono interni ad* E. *I punti* $(x,0)$ *con* $x \neq 0$ *sono esterni ad* E. *I punti delle due parabole* $y = \pm x^2$ *sono di frontiera per* E *e costituiscono il bordo di* E. *Notiamo che, detto* $F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq x^2\}$, *allora* $\partial E = \partial F$; E *non contiene la sua frontiera,* F *la contiene. Questa differenza viene rimarcata dalla seguente definizione.*

❒ **Definizione 1.2.4.** Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice APERTO se ogni suo punto è interno all'insieme; si dice CHIUSO se il complementare è aperto.

✎ **Esempio 1.2.5.** *L'insieme* E *dell'esempio precedente è aperto; l'insieme* F *dell'esempio precedente è chiuso. L'insieme*

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \quad \vee \quad y < -x^2\}$$

non è né aperto né chiuso.

Proposizione 1.2.6. *L'unione di una famiglia qualsiasi (anche infinita) di aperti e l'intersezione finita di aperti è ancora un aperto. L'unione finita di chiusi e l'intersezione qualsiasi (anche infinita) di chiusi è ancora un chiuso.*

☞ **Osservazione 1.2.7.** Non è difficile rendersi conto che l'unione qualsiasi di chiusi può non essere un chiuso e l'intersezione qualsiasi di aperti può non essere un aperto.

✎ **Esempio 1.2.8.** *Sia*

$$C_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

una successione di aperti. Allora è facile intuire che $\bigcap_n C_n = \{0\}$ *che è un chiuso.*

Tutte le definizioni topologiche date finora si basano sul concetto di INTORNO SFERICO. Diamo una definizione più generale di intorno.

❒ **Definizione 1.2.9.** Dato un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, si dice INTORNO di $\mathbf{x}_0$ un qualsiasi insieme aperto contenente $\mathbf{x}_0$.

Naturalmente un intorno sferico è un particolare tipo di intorno. Inoltre ogni intorno di $\mathbf{x}_0$ contiene un intorno sferico di $\mathbf{x}_0$.

Proposizione 1.2.10. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice:*
INTERNO *ad E se e soltanto se esiste un intorno di $\mathbf{x}_0$ contenuto in E;*
ESTERNO *ad E se e soltanto se esiste un intorno di $\mathbf{x}_0$ contenuto in E^c;*
DI FRONTIERA *per E se ogni intorno di $\mathbf{x}_0$ contiene almeno un punto di E e almeno un punto di E^c.*

Si ha anche la seguente caratterizzazione degli insiemi chiusi.

Proposizione 1.2.11. (INSIEMI CHIUSI E LIMITI DI SUCCESSIONI) *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$. Allora C è chiuso se e soltanto se per ogni $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ successione contenuta in C tale che $\mathbf{x}_k$ converge a un certo limite $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\mathbf{x} \in C$.*

In altre parole un insieme è chiuso se e soltanto se contiene i limiti delle sue successioni convergenti

❒ **Definizione 1.2.12.** Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. E si dice LIMITATO se esiste una costante $K > 0$ tale che $|\mathbf{x}| \leq K$ per ogni $\mathbf{x} \in E$ (in altre parole se è contenuto in una sfera di raggio abbastanza grande). In caso contrario si dice ILLIMITATO.

✎ **Esempio 1.2.13.** *L'insieme*

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y \geq 0 \;\; 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

è limitato, mentre l'insieme

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y \neq 1\}$$

è illimitato.

Gli insiemi chiusi e limitati giocheranno un ruolo importante nello studio delle proprietà delle funzioni continue.

❒ **Definizione 1.2.14.** Un insieme E si dice CONNESSO (PER ARCHI) se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ esiste un arco di curva continuo contenuto in E che ha per estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

✎ **Esempio 1.2.15.** *Riprendendo gli esempi precedenti, l'insieme*

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y \geq 0 \;\; 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

è anche connesso, mentre l'insieme

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y \neq 1\}$$

non è connesso.

1.3. Limiti e continuità

Mentre per funzioni di una variabile a valori vettoriali il concetto di limite può essere in buona parte ricondotto a quello per funzioni reali di una variabile reale, nel caso di funzioni reali di più variabili reali il comportamento sarà in generale più complesso e più difficilmente riconducibile a quello unidimensionale.
Iniziamo con la seguente definizione.

❒ **Definizione 1.3.1.** Data una successione $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ di punti di $\mathbb{R}^n$ e un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice che

$$\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \quad \text{per } k \to \infty \text{ se } \quad |\mathbf{x_k} - \mathbf{x}_0| \to 0 \quad \text{per } k \to \infty.$$

❒ **Definizione 1.3.2.** (definizione successionale di limite o limite per successioni) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita almeno in un intorno sferico di $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (escluso al più il punto $\mathbf{x}_0$ stesso). Sia $L \in \mathbb{R}^*$ dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora diremo che

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ di punti tale che } \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \text{ per } k \to \infty \text{ (con } \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 \text{ per ogni } k\text{), si ha che}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = L.$$

Più in generale si ha la seguente

❒ **Definizione 1.3.3.** (definizione topologica di limite) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita almeno in un intorno sferico di $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (escluso al più il punto $\mathbf{x}_0$ stesso) e sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \text{tale che se} \quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \quad \text{allora} \quad |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

Si dice che

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty \ \ [\![-\infty]\!]$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \text{tale che se} \quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \quad \text{allora} \quad f(\mathbf{x}) > M \quad [\![f(\mathbf{x}) < -M]\!].$$

☞ **Osservazione 1.3.4.** A differenza del caso delle curve, non c'è una maniera diretta per ricondurre il calcolo dei limiti di funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a quello per funzioni reali di variabile reale. Le definizioni presentate presentano delle somiglianze solo dal punto di vista *formale*; per altro anche in questo caso molti enunciati continuano a valere in maniera analoga, per esempio il teorema di unicità del limite, il teorema sul limite della somma, del prodotto per una costante, del prodotto e del quoziente di due funzioni, il teorema del confronto e il teorema di permanenza del segno, giusto per citarne alcuni.

❒ **Definizione 1.3.5.** (CONTINUITÀ) Si dice che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

☞ **Osservazione 1.3.6.** Come conseguenza dei teoremi sui limiti valgono i teoremi sulla continuità della somma, del prodotto, del quoziente di funzioni continue (quando hanno senso e il denominatore non si annulla) e della composizione di funzioni continue (quando ha senso).

☞ **Osservazione 1.3.7.** Osserviamo che se una funzione di una variabile è continua, rimane ovviamente continua anche se la consideriamo come funzione di più variabili. Esempio: $f(x) = e^x$ e $g(x, y) = e^x$ oppure $g(x, y) = e^y$.

Le proprietà enunciate permettono, combinandole tra loro, di mostrare la continuità di un gran numero di funzioni senza dover ricorrere alla definizione (cioè al calcolo dei limiti).

✎ **Esempio 1.3.8.** *La funzione*

$$f(x, y) = \frac{\arctan(x^2 + y^2)}{1 + e^{-x-y}}$$

è definita e continua su $\mathbb{R}$.

Quindi quando una funzione è continua, si può calcolare $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ semplicemente valutando $f(\mathbf{x}_0)$.

✎ **Esempio 1.3.9.**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{\arctan(x^2 + y^2)}{1 + e^{-x-y}} = 0$$

Quindi il ricorso alla definizione diventerà indispensabile solo nel caso dell'analisi delle FORME DI INDETERMINAZIONE.

1.4. Analisi delle forme di indeterminazione

Fatto fondamentale: se $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ allora significa che f si avvicina a L indefinitamente quando la distanza tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_0$ tende a zero INDIPENDENTEMENTE dalla direzione con cui $\mathbf{x}$ si avvicina a $\mathbf{x}_0$. Quindi in generale si distinguono due casi:
➜ **il limite esiste.** Allora l'esistenza del limite va dimostrata; in particolare può essere utile passare a coordinate polari. Infatti in questo caso, per esempio se $n = 2$, si riesce a mettere in evidenza la dipendenza di $f(x, y)$ dalla distanza tra (x, y) e $(0, 0)$ attraverso $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. A questo punto è INDISPENSABILE che una volta operata la trasformazione la $f(\rho, \theta)$ non dipenda più da θ (o si possa controllare con una g dipendente solo da ρ). Vale il seguente criterio generale per funzioni di due variabili (che può anche essere esteso al caso di n variabili).

Proposizione 1.4.1. CRITERIO GENERALE (VALIDO PER PROVARE L'ESISTENZA DEL LIMITE) *Per dimostrare che $f(x, y) \to L$ se $(x, y) \to (0, 0)$ è sufficiente riuscire a scrivere una maggiorazione del tipo*

$$|f(\rho, \theta) - L| \le g(\rho) \qquad\qquad g(\rho) \to 0.$$

L'essenziale è dunque che g non dipenda da θ. Il suddetto criterio può anche essere generalizzato al caso di n variabili.

☞ **Osservazione 1.4.2.** Se $(x, y) \to (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ il criterio si può ancora applicare con $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ cioè si pone

$$x = x_0 + \rho\cos\theta$$
$$y = y_0 + \rho\sin\theta.$$

Naturalmente non riuscire a dimostrare una tale maggiorazione NON SIGNIFICA che il limite non esiste.

✎ **Esempio 1.4.3.** *Si calcoli se esiste*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^5}{x^2 + y^2}$$

Passando in coordinate polari si ha

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^3 + y^5|}{x^2 + y^2} \le \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3|\sin^3\theta| + \rho^5|\sin^5\theta|}{\rho^2} \le \lim_{\rho\to 0}(\rho + \rho^3) = 0$$

e si conclude dal criterio generale per l'esistenza del limite enunciato prima. Alternativamente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^5}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\sin^3\theta + \rho^5\sin^5\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\sin^3\theta + \lim_{\rho\to 0} \rho^3\sin^5\theta = 0$$

dove abbiamo usato il fatto che il limite della somma è **(se esiste e non ci sono forme di indeterminazione!!)** la somma dei limiti, ciascuno dei quali è prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima. Questo basta a concludere che il limite esiste e fa zero.

✎ **Esempio 1.4.4.** *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2}$$

SOLUZIONE 1. Ricordiamo che

$$f \to 0 \Longleftrightarrow |f| \to 0$$

a questo punto dunque, osservando che $\dfrac{y^2}{z^2+y^2} \leq 1$ per ogni $(y,z) \in \mathbb{R}^2$

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2|\log x|}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(z,y)\to(0,0)} \frac{y^2|\log(z+1)|}{z^2+y^2} \leq \lim_{(z,y)\to(0,0)} |\log(z+1)| = 0.$$

Il teorema del confronto ci permette allora di concludere che

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2} = 0.$$

SOLUZIONE 2. Si può anche passare a coordinate polari ponendo $x = 1+\rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta$. Si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin^2\theta \log(1+\rho\cos\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho \sin^2\theta\cos\theta = 0$$

poiché $\sin^2\theta\cos\theta$ è una quantità limitata in modulo da 1.

☞ **Osservazione 1.4.5.** Si noti la delicatezza del penultimo passaggio: abbiamo potuto usare il fatto che

$$\log(1+\rho\cos\theta) \sim \rho\cos\theta \qquad \rho \to 0$$

perché $\cos\theta$ è una quantità limitata, dunque dal teorema del confronto il prodotto di una quantità limitata per una infinitesima è infinitesima. La cosa importante è che la funzione di θ sia limitata in θ e NON che per ogni θ fissato se $f_1(\rho,\theta) \sim f_2(\rho,\theta)$ per $\rho \to 0$ allora i due limiti coincidono. Questo infatti non è sempre vero, come mostra il seguente controesempio:
sia da calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ con

$$f(x,y) = \frac{e^{\frac{x^2+y^2}{y}} - 1}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}}.$$

Passando in coordinate polari si ottiene

$$\tilde{f}(\rho,\theta) = (e^{\frac{\rho^2}{\rho\sin\theta}} - 1)\sin\theta.$$

Usando (IN MANIERA ERRATA!) gli sviluppi asintotici per $\rho \to 0$ si avrebbe

$$\tilde{f}(\rho, \theta) \sim \frac{\rho}{\sin\theta} \sin\theta = \rho \to 0$$

che è una conclusione errata visto che si vede facilmente che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste. L'errore sta nel fatto di aver concluso che

$$\frac{\rho}{\sin\theta} \to 0 \qquad \rho \to 0$$

e questo è falso perché $\frac{1}{\sin\theta}$ non è una quantità limitata in θ e quindi non si può applicare il teorema del confronto.

Alternativamente per provare l'esistenza del limite si può tentare di usare opportune maggiorazioni, al fine di mostrare che la differenza tra la funzione e il presunto limite tende a zero. A tal fine possono risultare utili le seguenti maggiorazioni

$$e^z \geq 1 + z \quad \log z \leq z - 1 \quad \sin z \leq z \quad \sin z \leq 1 \quad \cos z \leq 1$$

oppure le seguenti maggiorazioni derivanti da fatti elementari

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \qquad \frac{a^2}{a^2 + b^2} \leq 1$$

(ma si badi che ovviamente non è vero che $\frac{a^3}{a^3+b^3} \leq 1$) unite al fatto che $f \to 0 \Leftrightarrow |f| \to 0$ e all'uso appropriato del teorema del confronto. Possono talora risultare comodi anche i limiti notevoli dell'analisi 1. Il prossimo esempio mostra alcune possibili applicazioni.

✎ **Esempio 1.4.6.** *Calcolare*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3 - 2\sin(x^2 y)\cos(x + 2y)}{x^2 + y^2}$$

Il limite dato può essere riscritto come

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin(x^2 y)\cos(x + 2y)}{x^2 + y^2}$$

a patto che questi ultimi due limiti esistano, finiti o infiniti ma tali da non dar luogo alla forma di indecisione $[+\infty, -\infty]$. Per quanto riguarda

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$$

prendendo i valori assoluti e utilizzando la nota disuguaglianza $|x||y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, si ha

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0.$$

Quindi dal teorema del confronto e utilizzando il fatto che

$$f \to 0 \Leftrightarrow |f| \to 0$$

si ottiene che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$$

esiste e fa 0.
Per quanto riguarda

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin(x^2y)\cos(x+2y)}{x^2+y^2}$$

si osserva immediatamente che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x+2y) = 1;$$

d'altra parte, utilizzando il fatto che $|\sin z| \leq |z| \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$ e il fatto ovvio che $x^2 \leq x^2+y^2$ si ottiene, prendendo i valori assoluti

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|\sin(x^2y)|}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|y| = 0.$$

Il teorema del confronto unito al fatto che

$$f \to 0 \Leftrightarrow |f| \to 0$$

ci dà

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = 0$$

e dunque anche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin(x^2y)\cos(x+2y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Allora anche il limite proposto in partenza esiste e fa 0.

➜ **il limite non esiste.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione reale di n variabili, sia $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un arco di curva di $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che esista la funzione composta $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$. Quest'ultima scrittura si dice RESTRIZIONE DI f ALLA CURVA $\mathbf{r}$ ed è una funzione reale di una variabile reale.
Il termine restrizione deriva dalla seguente idea geometrica: invece di far variare $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ci restringiamo ai punti di $\mathbb{R}^n$ che stanno sull'arco di curva $\mathbf{r}(t)$. È chiaro che se f e $\mathbf{r}$ sono continue, anche g è continua (composizione di funzioni continue).
Quindi: per mostrare che il limite per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ non esiste, è sufficiente determinare due curve *passanti per* $\mathbf{x}_0$ lungo le quali la funzione tende a due limiti diversi. La stessa conclusione vale se la restrizione di f a una curva non ammette limite.

✎ **Esempio 1.4.7.** *Determinare il dominio di definizione della funzione*

$$f(x,y) := x^{-1}[(\sin x)^2 + y^2]\tan(e^{x+y})$$

e studiarne il comportamento per $(x,y) \to (0,0)$.

Innanzitutto la funzione $\tan e^{x+y}$ è definita per $e^{x+y} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se $k \in \mathbb{Z}^-$ questo è sicuramente verificato, quindi basterà imporre

$$e^{x+y} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Inoltre il denominatore di f deve essere diverso da zero, dunque

$$\operatorname{dom} f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq \log\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \ \wedge \ x \neq 0\right\}.$$

Per quanto riguarda il comportamento di f per $(x,y) \to (0,0)$, dimostriamo che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{((\sin x)^2 + y^2)\ \tan(e^{x+y})}{x}$$

non esiste. A tale scopo basta trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione data ammetta limite diverso. Si ha ad esempio (utilizzando un noto limite notevole)

$$\lim_{x\to0} f(x,\sqrt{x}) = \lim_{x\to0} \frac{[(\sin x)^2 + x]\ \tan(e^{x+\sqrt{x}})}{x} = \tan 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to0} f(x,x) = \lim_{x\to0} \frac{((\sin x)^2 + x^2)\ \tan e^{2x}}{x} = 0.$$

Questo basta a concludere che il limite dato non esiste.

☞ **Osservazione 1.4.8.** I limiti possono essere usati anche nello studio della continuità di una funzione come mostrano i seguenti esempi.

✎ **Esempio 1.4.9.** *Sia data la funzione:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) Si stabilisca se f è continua in $(0,0)$.
b) Si stabilisca se è continua in $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 1\}$

a) Per $x \neq 0$ la funzione è continua. Per concludere occorre analizzare la conitnuità della funzione data lungo la retta $x = 0$. Per fare questo bisogna calcolare il limite per $x \to 0$ con y qualunque di $f(x,y)$ e verificare se esso è 0 che è il valore assunto lungo l'asse delle y. Questo

è falso dato che se consideriamo la curva $y = \sqrt{x}$ allora $f(x,y)$ vale costantemente 1 e dunque non può tendere a 0 al tendere di x a 0. Dunque la funzione data non è continua in 0.
b) Usando la condizione imposta dal dominio D si ottiene

$$0 \leq \lim_{x\to 0} \frac{y^2}{x} \leq \lim_{x\to 0} x = 0,$$

dove osserviamo che non abbiamo avuto bisogno di considerare i valori assoluti delle quantità in gioco dato che $x \in D \Rightarrow x \geq 0$. A questo punto il teorema del confronto permette di concludere che il limite considerato esiste e fa 0, dunque la funzione f è continua in D. Notiamo che questo esempio mostra che una funzione può essere discontinua in un punto mentre una sua restrizione può essere continua nello stesso punto. Ciò non deve stupire, in quanto, restringendo una funzione ad un sottoinsieme del suo dominio, si può escludere un insieme rilevante di curve lungo le quali calcolare i limiti.

✎ **Esempio 1.4.10.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione data è continua sicuramente per $(x,y) \neq (0,0)$. Per vedere se è continua nell'origine, è sufficiente studiare il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ per vedere se esso esiste e se coincide con il valore della funzione in $(0,0)$. Si ha

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0,$$

visto che $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$. Il teorema del confronto permette di concludere che il limite cercato esiste e fa 0, dunque la funzione data è continua anche nell'origine. Alternativamente utilizzando le coordinate polari per calcolare il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\theta = 0,$$

perché prodotto di funzioni limitate per una funzione infinitesima. Questo basta a concludere che la funzione data è continua anche nell'origine.

✎ **Esempio 1.4.11.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione data è continua sicuramente per $(x, y) \neq (0, 0)$. Per vedere se è continua nell'origine, è sufficiente studiare il limite di f per $(x, y) \to (0, 0)$ per vedere se esso esiste e se coincide con il valore della funzione in $(0, 0)$. Si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

non esiste. Infatti se consideriamo la curva $y = x$ otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

mentre se prendiamo in esame la curva $y = x^2$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Questo basta a concludere che la funzione data non è continua nell'origine (in realtà per concludere che la funzione non è continua nell'origine bastava solo considerare una curva tale che il limite preso lungo quella curva non fosse uguale a zero, nel nostro caso bastava dunque l'esame del limite lungo la curva $y = x^2$).

1.5. Proprietà topologiche delle funzioni continue

Proposizione 1.5.1. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione definita e continua in tutto $\mathbb{R}^n$. Allora:*
a) gli insiemi

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > 0\}$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) < 0\}$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\}$$

sono aperti;
b) gli insiemi

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq 0\}$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \geq 0\}$$
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$$

sono chiusi.

✎ **Esempio 1.5.2.** *L'insieme di definizione di*

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 - y}$$

è

$$F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \quad \vee \quad y \leq x^2\}$$

ed è un chiuso perchè intersezione dei due insiemi

$$F_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

e

$$F_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$$

che sono chiusi perché controimmagine di chiusi tramite funzioni continue.

✎ **Esempio 1.5.3.** *Gli insiemi di livello di una funzione $f(x, y)$ sono insiemi del tipo $f(x, y) = C$ e quindi sono chiusi (se f è continua!).*

Teorema 1.5.4. (teorema di Weierstrass) *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo in E ossia esistono $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_M \in E$ tali che*

$$f(\mathbf{x}_m) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_M) \qquad \forall \mathbf{x} \in E.$$

Teorema 1.5.5. (teorema degli zeri) *Sia E un insieme connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ continua. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono due punti di E tali che $f(\mathbf{x}) > 0$ e $f(\mathbf{y}) < 0$, allora esiste un terzo punto $\mathbf{z} \in E$ in cui f si annulla*

Il teorema precedente ha un'applicazione pratica molto rilevante nello studio del segno di una funzione di più variabili. Se f è continua definita su un dominio qualunque, l'insieme degli zeri di f spezza il dominio in un certo numero di insiemi connessi in cui $f \neq 0$ e su ciascuno dei quali f ha segno costante (perché se f cambiasse segno si dovrebbe annullare). Per cui è sufficiente valutare il segno di f in un punto solo di ogni componente connessa per conoscere il segno su tutto l'insieme.

✎ **Esempio 1.5.6.** *Determinare l'insieme*

$$f(x, y) = y^2 - x^2 - 1 \geq 0$$

Prima di tutto si disegna l'insieme $f(x, y) = 0$ che rappresenta un'iperbole che interseca l'asse delle y nei punti $(0, \pm 1)$. Questo insieme divide il piano in due componenti connesse su cui f ha segno costante: per valutare l'insieme in cui $f(x, y) \geq 0$ basta inserire un punto, per esempio l'origine è esclusa dall'insieme, quindi si tratta della parte sopra e sotto i due rami dell'iperbole rispettivamente.

CAPITOLO 2

Esercizi proposti

2.1. Insiemi di livello

✍ **Esercizio 2.1.1.** *Calcolare le curve di livello delle seguenti funzioni*

$$\begin{aligned} 1) f(x,y) &= 2\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right) \\ 2) f(x,y) &= x^2-y^2 \\ 3) f(x,y) &= \frac{x+y}{x-y} \end{aligned}$$

1) Si tratta di porre

$$2\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)=C$$

ossia

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1-\frac{C}{2}.$$

Si tratta pertanto di rette; l'equazione cartesiana in forma esplicita risulta

$$y=3\left(1-\frac{C}{2}-\frac{x}{2}\right).$$

Un'equazione parametrica risulta ad esempio

$$\begin{cases} x=t \\ y=3\left(1-\dfrac{C}{2}-\dfrac{t}{2}\right). \end{cases}$$

2) In questo caso le curve di livello sono $x^2-y^2=C$; per $C=0$ la curva di livello è costituita in realtà dalla coppia di rette $x=y$ e $x=-y$, mentre per gli altri valori di C le curve di livello

sono iperboli equilatere aventi queste rette come asintoti.
Un'equazione parametrica si trova per esempio ponendo

$$\begin{cases} x = \sqrt{C}\cosh t \\ y = \sqrt{C}\sinh t. \end{cases}$$

3) Si tratta di porre

$$\frac{x+y}{x-y} = C$$

da cui, se $C = -1$ si ha l'asse y (di equazione $x = 0$); se invece $C \neq -1$ si ottiene

$$y = \frac{C-1}{1+C}x$$

quindi si tratta di un fascio di rette per l'origine. Un'equazione parametrica si ottiene ad esempio ponendo

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{C-1}{1+C}t. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 2.1.2.** *Determinare le linee di livello delle seguenti funzioni:*

$$1) f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

$$2) f(x,y) = xy$$

$$3) f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

$$4) f(x,y) = \frac{1}{x+y}$$

1) Si ha

$$x^2 + y^2 = 1 - C \qquad C \leq 1$$

si tratta di circonferenze di centro l'origine e raggio $\sqrt{1-C}$

2) Si ha $xy = C$; le linee di livello zero sono gli assi cartesiani; le linee di livello $C > 0$ sono le iperboli $xy = C$ nel primo e terzo quadrante; le linee di livello $C < 0$ sono le iperboli $xy = C$ del secondo e quarto quadrante.

3) Si ha

$$x^2 + y^2 = \log\frac{1}{C} \qquad 0 < C \leq 1$$

La linea di livello 1 è l'origine; le altre linee di livello sono circonferenze di centro l'origine e raggio $\sqrt{\log \dfrac{1}{C}}$

4) Si ha

$$y = -x + \frac{1}{C} \qquad C \neq 0$$

si tratta di rette parallele alla bisettrice $y = -x$ esclusa la bisettrice.

✍ **Esercizio 2.1.3.** *Sia* $f(x, y) = \sqrt{9 - 2x^2 - 6y^2}$*, si determini il dominio* D *e si disegnino le linee di livello 0, 1 e 3. Si determini la curva di livello passante per il punto* $P = (1, 1)$.

D è l'ellisse $2x^2 + 6y^2 \leq 9$; la linea di livello 0 è l'ellisse di equazione $2x^2 + 6y^2 = 9$, la curva di livello 1 è l'ellisse di equazione $2x^2 + 6y^2 = 8$, la curva di livello 3 è l'origine. Poiché $f(1, 1) = 1$, la curva cercata è la curva di livello 1, determinata in precedenza.

✍ **Esercizio 2.1.4.** *Determinare le superfici di livello delle seguenti funzioni:*

$$1) f(x, y, z) = x + 3y + 5z$$

$$2) f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$$

$$3) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

1) Si tratta di piani di equazione $x + 3y + 5z = C$

2) Si tratta di ellissoidi di equazione $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = C$, $C \geq 0$

3) Si tratta di sfere di centro l'origine e raggio $\frac{1}{C}$, con $C > 0$

✍ **Esercizio 2.1.5.** *Determinare le curve di livello della funzione*

$$f(x, y) = x(\log x - y).$$

Innanzitutto si deve avere $x > 0$. Si tratta poi di porre $f(x, y) = C$ (intersezione tra la superficie di equazione cartesiana esplicita $z = f(x, y)$ e il piano $z = C$). Questo significa

$$f(x, y) = C \Leftrightarrow x(\log x - y) = C \Leftrightarrow x \log x - xy = C \Leftrightarrow y = \log x - \frac{C}{x}.$$

visto che $x > 0$ e quindi in particolare $x \neq 0$.
A questo punto di tratta di capire l'andamento delle funzioni

$$g(x) = \log x - \frac{C}{x}$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.
Chiaramente per $C = 0$ si ottiene $g(x) = \log x$. Sia ora $C > 0$. Osserviamo che

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = \frac{C}{x} \Leftrightarrow x \log x = C.$$

Da osservazioni analitiche sul grafico qualitativo della funzione $h(x) = x \log x$ si ottiene che $h(x) \leq 0$ per $0 < x \leq 1$ e $h(x) > 0$ per $x > 1$. Quindi $x \log x = C$ ha una sola soluzione per $C \geq 0$ e $C = -1/e$ (minimo assoluto di $h(x)$ corrispondente al punto di minimo $x_m = 1/e$) mentre ha due soluzioni per $-1/e < C < 0$ e nessuna soluzione per $C < -1/e$.
Pertanto la funzione $g(x)$ ha esattamente uno zero per $C > 0$. Inoltre, sempre per $C > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

e

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2} > 0$$

e pertanto per $C > 0$ la funzione $g(x)$ è sempre crescente.
Sia ora $C < 0$. Abbiamo già studiato gli zeri di g. D'altra parte

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \log x - \frac{C}{x}$$

stavolta si presenta in una forma di indecisione $[+\infty - \infty]$. Dunque

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}[x \log x - C] = +\infty$$

visto che $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0^-$ e $-C > 0$ visto che $C < 0$.
D'altra parte, di nuovo

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

A questo punto

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{1}{x^2}[x + C] = 0 \Leftrightarrow x = -C.$$

Bisogna stabilire il segno del valore del minimo $g(-C)$ per disegnare correttamente il grafico. Si ha

$$g(-C) = \log(-C) + 1 > 0 \Leftrightarrow \log(-C) > -1 \Leftrightarrow C < -1/e$$

coerentemente con le considerazioni sul segno di g svolte prima. Il grafico contiene alcune curve di livello al variare di C.

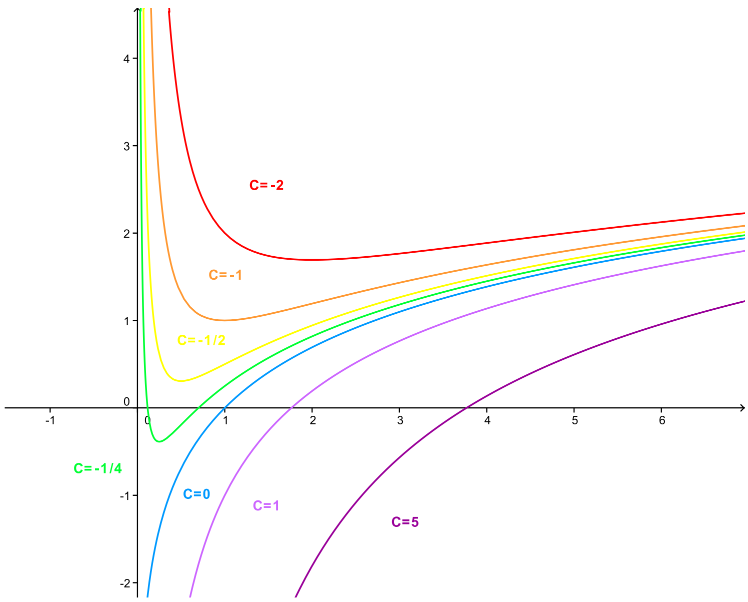

Figura 2.1: Alcune curve di livello della funzione f.

2.2. Domini di funzioni di più variabili

✍ **Esercizio 2.2.1.**

Per ciascuna delle seguenti funzioni:
a) Determinare (e se possibile disegnare) l'insiene E di definizione.
b) Rispondere alle domande: E è aperto? E è chiuso? È limitato? È connesso?
c) Determinare (e se possibile disegnare) l'insieme in cui f si annulla e studiare il segno di f.

$\boxed{\text{(i) } f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}}$

a) L'insieme di definizione è dato dalla soluzione del seguente sistema (entrambe le condizioni sono di esistenza delle due radici)

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ 2x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

La prima condizione rappresenta il semispazio delle x positive (asse y incluso); la seconda condizione rappresenta la parte interna del cerchio di centro l'origine e raggio 1, la terza condizione rappresenta l'esterno di un ellisse centrata nell'origine e di semiassi $1/\sqrt{2}$ e 1. Quindi l'insieme cercato è illustrato in figura.

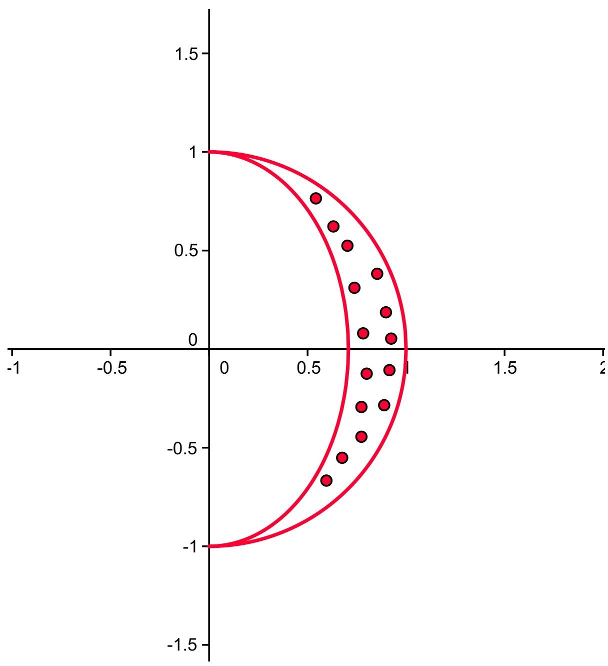

Figura 2.2: Insieme E

b) E è chiuso ma non aperto, è limitato ed è connesso.

c) La funzione data dove esiste è sempre positiva o nulla. In particolare $f(x,y) = 0$ se e solo se $x = \sqrt{1-x^2-y^2}$ quindi solo sulla parte dell'ellisse $2x^2+y^2 = 1$ contenuta nel primo e quarto quadrante.

$$\boxed{\text{(ii) } f(x,y) = \frac{x\log(1+x^2-y)}{y}}$$

a) L'insieme di definizione è dato dalla soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} 1+x^2-y>0 \\ y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<1+x^2 \\ y\neq 0 \end{cases}$$

La prima condizione si ottiene imponendo la condizione di esistenza del logaritmo e rappresenta la zona "sotto" la parabola di equazione $y = 1+x^2$; la seconda equazione si ottiene imponendo l'esistenza del denominatore.

☞ **Osservazione 2.2.2.** Per disegnare un dominio piano, individuato da un certo numero di disequazioni, il suggerimento è sempre quello di disegnare prima l'equazione corrispondente. Per esempio si debba disegnare come richiesto nell'esercizio la parte di piano individuata dalla disequazione $y < 1+x^2$. Prima di tutto si va a considerare l'equazione corrispondente $y = 1+x^2$ che è una parabola, e corrisponde al luogo di zeri di una funzione continua $f(x,y) = 0$ con $f(x,y) = y-1-x^2$. Dal Teorema degli zeri, se il dominio di f era connesso (come nel nostro caso), l'equazione $f(x,y) = 0$ individua due regioni del piano, in ciascuna delle quali f ha segno opposto. Per individuare dunque di quale delle due regioni è richiesto il grafico, basta sostituire nella disequazione corrispondente un punto solo, ben sapendo che come applicazione del teorema degli zeri, in tutta quella regione f avrà lo stesso segno. Nel nostro caso l'origine sta nella regione che ci serve perché $0 < 1+0^2$ e dunque la regione che corrisponde alla disequazione $y < 1+x^2$ è proprio la zona sotto la parabola data.

b) L'insieme dato è aperto (perché il complementare è unione di due chiusi), e quindi ovviamente non è chiuso, non è limitato e non è connesso (a causa del fatto che l'asse x non è inclusa nell'insieme e quindi si "salta" da una componente connessa all'altra attraverso l'asse x).
c) Determiniamo ora il segno di f. Si ha che $\log(1+x^2-y) > 0$ se e solo se $y < x^2$. Quindi nel grafico si evidenzia con un segno $+$ rosso le zone dove questo termine è positivo (e con un segno $-$ rosso le zone dove questo termine è negativo), con un segno $+$ verde le zone dove $x > 0$ (e con un segno $-$ verde le zone dove $x < 0$), con un segno $+$ blu le zone dove $y > 0$ (e con un segno $-$ blu le zone dove $y < 0$), il tutto intersecato con il dominio di f. Chiaramente le zone che contengono tutti segni $+$ o un numero pari di segni $-$ saranno le zone dove la funzione data ha segno positivo. D'altra parte $f(x,y) = 0$ se e soltanto se $x = 0 \vee y = x^2$.

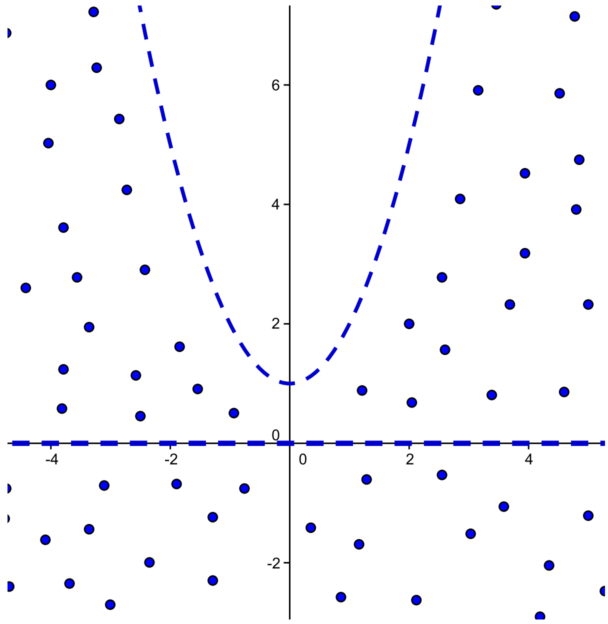

Figura 2.3: Insieme E

$\boxed{\text{(iii) } f(x,y) = \log(\sin(x^2+y^2))}$

a) L'unica condizione da imporre per il campo di esistenza di f è la condizione di esistenza del logaritmo, che si traduce in $\sin(x^2+y^2) > 0$, cioè

$$2n\pi < x^2 + y^2 < \pi + 2n\pi \qquad n \in \mathbb{N} \;\; (\text{perché } x^2+y^2 > 0).$$

Si tratta, come mostra la figura per alcuni valori di $\mathbb{N}$, di corone circolari con bordi esclusi unita alla circonferenza di raggio $\sqrt{\pi}$ (con l'origine degli assi esclusa). b) È un unione numerabile di aperti, quindi è un aperto, non è dunque chiuso, non è limitato e nemmeno connesso.

c) Quando esiste si vede facilmente che $f(x,y) \leq 0$ perché $\sin(x^2+y^2) \leq 1$. D'altra parte

$$f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad n \in \mathbb{N}$$

e queste sono circonferenze (interne al dominio di f).

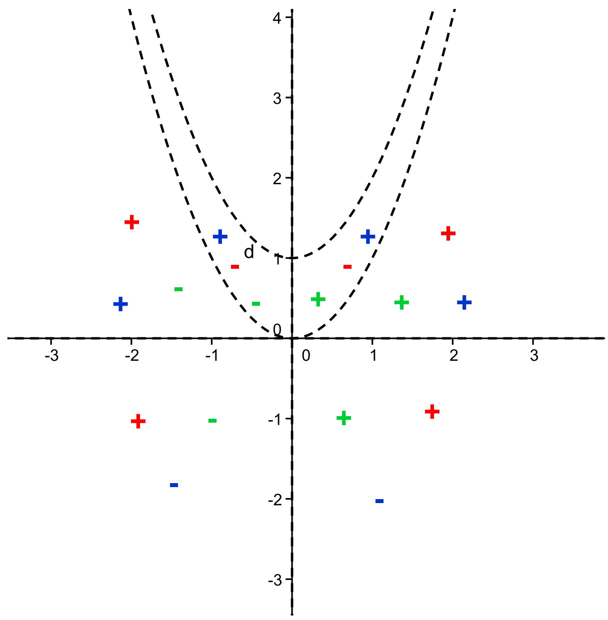

Figura 2.4: Segno di f

$$\boxed{\text{(iv)}\ f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{2x-y+2}}$$

a) L'insieme di definizione è dato dalla soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} x+y+1 \geq 0 \\ y \neq 2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1-x \\ y \neq 2x+2 \end{cases}$$

dove la prima condizione corrisponde all'esistenza della radice e la seconda condizione all'esistenza del denominatore. Si tratta del semipiano "sopra" la retta $y = -1-x$ a cui viene tolta la (parte della) retta $y = 2x+2$. b) Tale insieme non è chiuso (lo sarebbe senza la retta esclusa) ma non è nemmeno aperto, non è limitato e non è connesso (perché la retta esclusa taglia il semipiano in due componenti connesse). c) La radice quando esiste è sempre positiva o nulla, quindi $f(x,y) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; y < 2x+2$. D'altra parte $f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -x-1$.

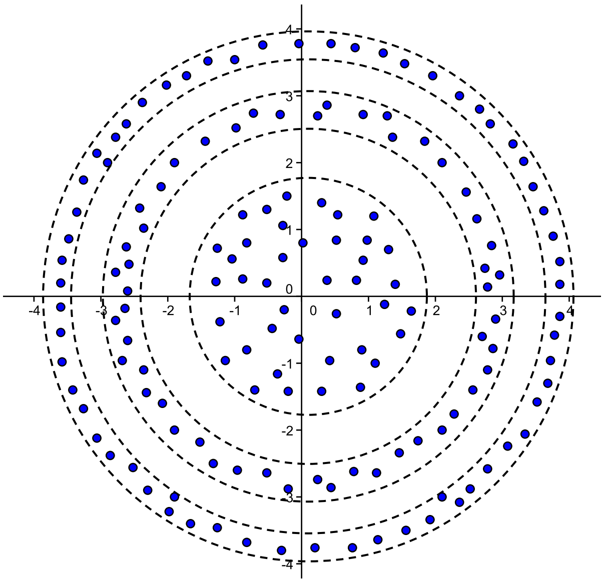

Figura 2.5: Insieme E

✍ **Esercizio 2.2.3.**

Dire se i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^3$ sono o non sono aperti, chiusi, limitati, connessi.

(i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$

Si tratta dell'unione dei tre piani $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Un piano in $\mathbb{R}^3$ è un chiuso (come lo è una retta in $\mathbb{R}^2$) quindi (i) è un insieme chiuso (e quindi non aperto), non limitato ma connesso.

(ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 < 1\}$

Si tratta di un'ellissoide (senza guscio) centrata nell'origine. Quindi è un insieme aperto, non chiuso, limitato e connesso.

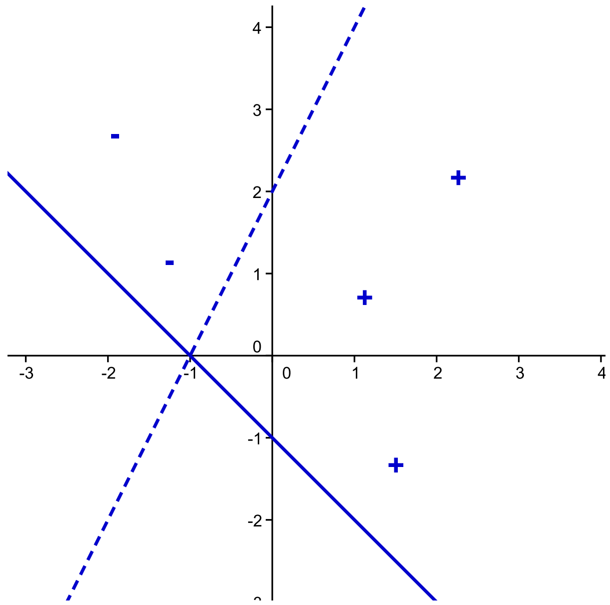

Figura 2.6: Insieme di definizione e segno di f

(iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$

Si tratta di un cilindro (solo il guscio esterno, non la parte interna), pertanto è chiuso, non aperto, non limitato e connesso.

✍ **Esercizio 2.2.4.** *Disegnare l'insieme di definizione della funzione*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x - y}\,\sqrt[4]{1 - y^2} + \ln(\ln x - y)$$

e determinarne la frontiera. Dire poi se tale insieme è aperto, chiuso, né aperto, né chiuso.

L'insieme di definizione D corrisponde alle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} 1 - x - y \geq 0 & \text{(esistenza della radice)} \\ 1 - y^2 \geq 0 & \text{(esistenza radice quarta)} \\ \log x - y > 0 & \text{(esistenza primo logaritmo)} \\ x > 0 & \text{(esistenza secondo logaritmo)} \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < \log x \\ -1 \leq y \leq 1 \\ y \leq 1 - x \end{cases}$$

Si ha

$$\partial D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

dove

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x, \ \ -1 \leq y < 0\} \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1, \ \ \log(1/e) < x \leq 2\} \\ D_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \log x, \ \ \log(1/e) < x < 1\} \end{aligned}$$

D non è né aperto né chiuso, è limitato e connesso.

✍ **Esercizio 2.2.5.** *Disegnare il campo di esistenza D della seguente funzione*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x}\log(x - \cos y)}{\sqrt{\pi^2 - y^2}}.$$

Dire se D è aperto, chiuso, né aperto, né chiuso.

Il campo di esistenza D di f è dato dalla soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x - \cos y > 0 \\ \pi^2 - y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > \cos y \\ -\pi < y < \pi \end{cases}$$

La prima condizione indica il semipiano alla sinistra della retta $x = 1$, la seconda condizione indica gli x alla destra del grafico della curva (non della funzione! Infatti $\cos y$ non è invertibile nell'intervallo $[-\pi, \pi]$) di $x = \cos y$ e la terza indica la striscia di ampiezza 2π centrata attorno all'asse x. Il grafico di D è rappresentato in figura (in blu con tratto continuo c'è la parte di frontiera che appartiene al dominio e con tratto tratteggiato c'è la parte di frontiera che non appartiene al dominio). Si verifica facilmente che D non è né aperto né chiuso, è limitato ma

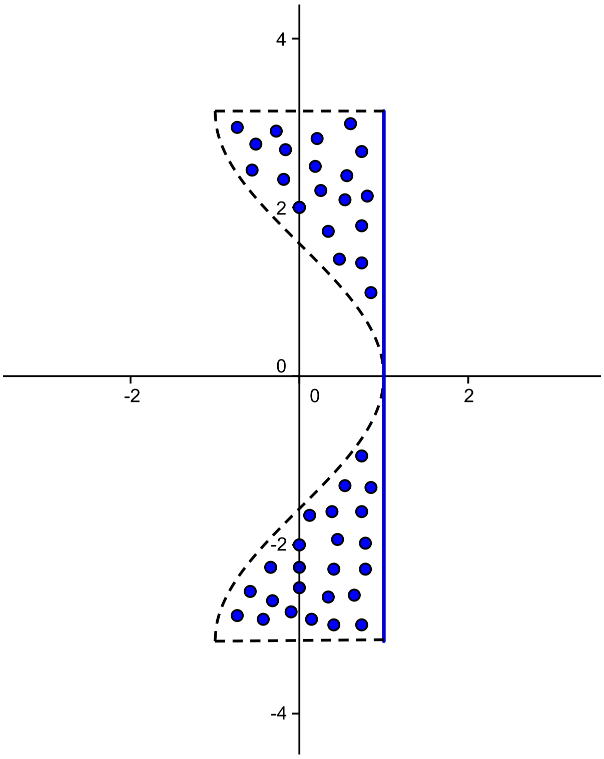

Figura 2.7: Insieme D

non è connesso (visto che il punto $(1, 0)$ non appartiene a D).

✍ **Esercizio 2.2.6.** *Disegnare il dominio della funzione*

$$f(x, y) = \sqrt{-xy} + \log(x^2 + y^2)$$

e stabilire se D è aperto, chiuso, né aperto, né chiuso, limitato, connesso. Quali sono i punti di frontiera di D?

L'esistenza della radice implica la condizione $-xy \geq 0$, cioè $xy \leq 0$, che corrisponde al secondo e quarto quadrante (assi inclusi); la condizione di esistenza del logaritmo implica $x^2 + y^2 > 0$ che corrisponde a tutto il piano privato dell'origine. Quindi il dominio D è l'unione del secondo e quarto quadrante a cui si è tolta l'origine degli assi. Tale insieme non è aperto (lo sarebbe se si togliessero gli assi) ma non è nemmeno chiuso (lo sarebbe se si considerasse anche l'origine), non è ovviamente limitato e non è nemmeno connesso (visto che manca proprio l'origine degli assi). La frontiera di D è l'unione dei due assi cartesiani (origine inclusa).

✍ **Esercizio 2.2.7.** *Sia data la funzione*

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y-x^2}{y+x^2}}.$$

Determinare il dominio D di f e la frontiera di D. Dire se D è aperto, chiuso, limitato, connesso.

Il dominio D è costituito dalla condizione di esistenza della radice

$$\frac{y-x^2}{y+x^2} \geq 0 \Leftrightarrow y < -x^2 \vee y \geq x^2$$

Si tratta di un insieme né aperto né chiuso (perché la parabola $y = x^2$ è compresa mentre la parabola $y = -x^2$ è esclusa) inoltre non è limitato e non è connesso (l'origine degli assi è esclusa).

✍ **Esercizio 2.2.8.** *Sia*

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{1-|x|-y}{x^2+4y^2-4}\right).$$

Determinare il dominio D di f, precisando se D è aperto, chiuso, né aperto, né chiuso, limitato, connesso.

Il dominio D si ottiene imponendo la condizione di esistenza del logaritmo, che è data da

$$\frac{1-|x|-y}{x^2+4y^2-4} > 0$$

e questo è equivalente all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} 1-|x|-y > 0 \\ x^2+4y^2-4 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-|x|-y < 0 \\ x^2+4y^2-4 < 0 \end{cases}$$

In figura in rosso è evidenziata la zona corrispondente alla soluzione del primo sistema e in blu la zona corrispondente alla soluzione del secondo sistema.
Il dominio è aperto perché unione di 3 aperti, pertanto non è chiuso, non è limitato e non è connesso (i punti di intersezione tra le semirette e l'ellisse non sono compresi).

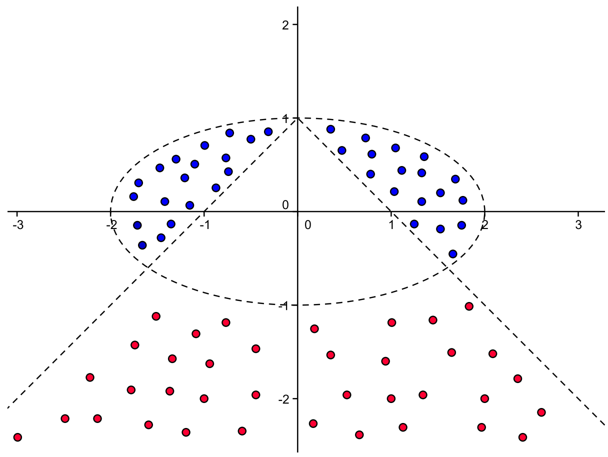

Figura 2.8: Insieme D

✍ **Esercizio 2.2.9.** *Disegnare l'insieme di definizione D della funzione*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt[4]{x^2 - 3y^2 + 4}}{\log y},$$

stabilire inoltre se D è aperto, chiuso, né aperto, né chiuso, limitato, connesso, e dire qual è la sua frontiera.

La condizione di esistenza della radice porta a $x^2 - 3y^2 + 4 \geq 0$; la condizione di esistenza del logaritmo porta a $y > 0$ e la condizione di esistenza del denominatore porta a $y \neq 1$. Il grafico evidenzia il dominio. Esso è chiuso e quindi non aperto, non limitato e connesso. La sua frontiera è ∂D dove

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 3y^2 = -4,\ y > 0\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{3}}\right\}.$$

✍ **Esercizio 2.2.10.** *Sia data la funzione*

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{(y-1)e^{1-x}}{x}}.$$

a) Determinare il dominio D di f e la frontiera di D. Dire se D è aperto, chiuso, limitato, connesso.
b) Scrivere l'equazione della curva di livello C passante per $P = (1, 2)$.

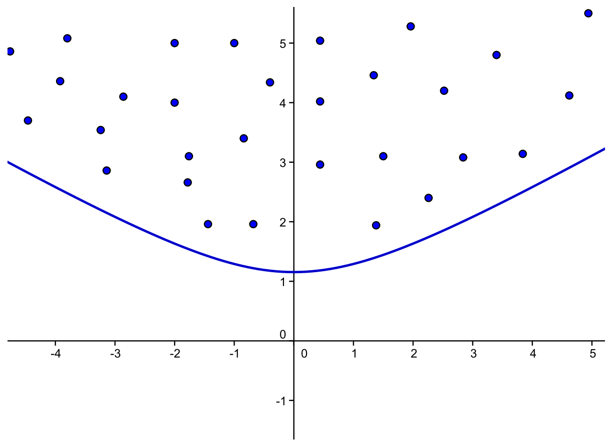

Figura 2.9: Insieme D

a) Il dominio D è dato dall'esistenza della radice, quindi

$$\frac{(y-1)e^{1-x}}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y \leq 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Si tratta di un insieme né aperto né chiuso (l'asse y è escluso) non è limitato e non è connesso (l'origine è esclusa). Il bordo di D è l'unione delle rette $x = 0$ e $y = 1$.

b) L'equazione della generica curva di livello per f è

$$f(x,y)=C \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(y-1)e^{1-x}}{x}}=C$$

e imponendo il passaggio per $(1,2)$ si deduce $C=1$, quindi la curva di livello passante per P è

$$\sqrt{\frac{(y-1)e^{1-x}}{x}}=1.$$

✍ **Esercizio 2.2.11.** *Determinare il dominio della funzione*

$$z=\frac{\sqrt{y(4-4x^2-y^2)}}{x-2y}$$

e dire se è aperto, chiuso, connesso, limitato.

Il dominio D è dato dalla condizione di esistenza della radice $y(4-4x^2-y^2)\geq 0$ assieme alla condizione di esistenza del denominatore $x-2y\neq 0$. Si ha

$$\begin{cases} y\geq 0 \\ 4-4x^2-y^2\geq 0 \\ y\neq \frac{x}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y\leq 0 \\ 4-4x^2-y^2\leq 0 \\ y\neq \frac{x}{2} \end{cases}$$

Se non fosse per l'esclusione della retta $y=x/2$ l'insieme D sarebbe un chiuso; in questo modo l'insieme non è né aperto né chiuso, non è limitato e non è connesso (se la retta $y=x/2$ fosse inclusa sarebbe connesso perché i punti $(\pm 2,0)$ sono inclusi in D).

✍ **Esercizio 2.2.12.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione*

$$f(x,y)=\sqrt{x-1}+\ln(y-1)+\sqrt{xe^y-ye^x}$$

Innanzitutto le due radici devono esistere e quindi i loro argomenti devono essere maggiori o uguali a 0; inoltre deve esistere la funzione logaritmo e quindi il suo argomento deve essere maggiore di 0. Quindi

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 1\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>1\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xe^y-ye^x\geq 0\}.$$

L'unico problema è capire come è fatto il terzo insieme. Osserviamo che

$$xe^y-ye^x\geq 0 \Leftrightarrow xe^y\geq ye^x \Leftrightarrow xe^{-x}\geq ye^{-y}.$$

Studiamo la funzione $f(x) = xe^{-x}$. Il dominio è $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $f'(x) = e^{-x}[1-x]$ quindi f ammette un massimo in $x = 1$ che vale $1/e$. In figura è riportato il grafico di f.

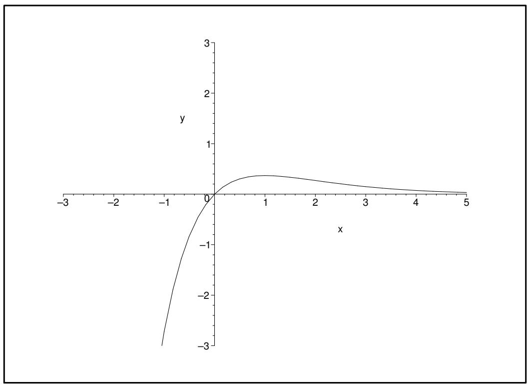

Figura 2.10: Grafico di $f(x) = xe^{-x}$.

Quindi se $x \geq 1$ si ha che $f(x)$ è decrescente, cioè:

$$1 \leq x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow xe^{-x} \geq ye^{-y}.$$

Tenendo conto dunque della restrizione dovuta all'esistenza dei primi due termini, senza esplicitare completamente il terzo insieme possiamo dire che

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq y\} \setminus \{(1, 1)\}.$$

Il punto $(1, 1)$ deve essere tolto perché $y \geq x$ e $y \neq 1$.

✍ **Esercizio 2.2.13.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione*

$$f(x, y) = \arcsin \frac{4xy}{x^2 + y^2}$$

La funzione $\arcsin x$ è definita in $[-1, 1]$ quindi il dominio della funzione data è l'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{4xy}{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}.$$

Vediamo di capire meglio chi è questo insieme. Si ha

$$-1 \leq \frac{4xy}{x^2 + y^2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4xy \geq 0 \\ 4xy - x^2 - y^2 \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4xy \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4xy \geq 0. \end{cases}$$

Passando in coordinate polari si ottiene

$$\begin{cases} \rho^2[1+4\cos\theta\sin\theta] \geq 0 \\ \rho^2[4\sin\theta\cos\theta - 1] \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq 2\sin(2\theta) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{4\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \leq 1$$

da cui, ponendo $t := \tan\theta$ si ha

$$\begin{cases} t^2+4t+1 \geq 0 \\ 4t-t^2-1 \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -2-\sqrt{3} \quad \vee \; t \geq -2+\sqrt{3} \\ t \leq 2-\sqrt{3} \quad\;\; \vee \; t \geq 2+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow |t| < 2-\sqrt{3} \vee |t| \geq 2+\sqrt{3}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} D =& \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2-\sqrt{3})|y| \leq |x| \leq (2+\sqrt{3})|y|\} \\ =& \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2-\sqrt{3})|x| \leq |y| \leq (2+\sqrt{3})|x|\}. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 2.2.14.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione*

$$f(x,y) = \arccos(xye^{-x^2-y^2})$$

La funzione arccos è definita in $[-1,1]$, quindi il dominio della funzione data è l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xye^{-x^2-y^2} \leq 1\right\}.$$

Vediamo di capire meglio chi è questo insieme. Si ha

$$-1 \leq xye^{-x^2-y^2} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{xy}{e^{x^2+y^2}}\right| \leq 1.$$

Passando a coordinate polari, questo è equivalente a cercare le coppie $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\left|\frac{\rho^2\cos\theta\,\sin\theta}{e^{\rho^2}}\right| \leq 1.$$

Studiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$. Si ha che f è pari e sempre non negativa, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ e $f'(x) = e^{-x^2}(2x)(1-x^2)$ da cui $x = 0$ è punto di minimo locale (e assoluto) mentre i punti $x = \pm 1$ sono di massimo locale (e assoluto) e $f(\pm 1) = 1/e$. In figura è mostrato il grafico di f.
A noi interessa la parte relativa alle $x \geq 0$ perché nel nostro caso $\rho \geq 0$. D'altra parte, dall'analisi condotta finora

$$\left|\frac{\rho^2\cos\theta\,\sin\theta}{e^{\rho^2}}\right| \leq |f(\rho)| \leq \frac{1}{e} \leq 1.$$

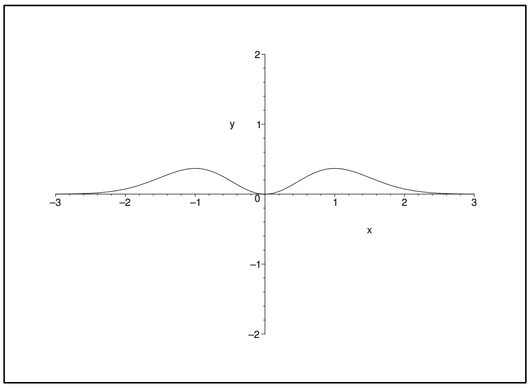

Figura 2.11: Grafico di $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

Dunque $D = \mathbb{R}^2$.

✍ **Esercizio 2.2.15.** *Si determini il dominio di definizione della seguente funzione*

$$g(x,y) = |\sqrt{\sin(xy)}|\tan e^{\sqrt{x}}$$

Le funzioni e^z e $\sin z$ sono definite per ogni z reale, la funzione $\tan z$ è definita per ogni $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Infine la funzione $\sqrt{z}$ è definita per ogni $z \geq 0$. Quindi

$$\operatorname{dom} g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \sin(xy) \geq 0 \text{ e } e^{\sqrt{x}} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Se $k \in \mathbb{Z}^-$ allora di sicuro $e^{\sqrt{x}} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$, quindi

$$\operatorname{dom} g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2\,h\,\pi \leq x\,y \leq \pi + 2\,h\,\pi \text{ e } x \neq \left[\log\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right)\right]^2 \text{ con } h,k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right\}.$$

Si tratta dell'unione di infinite regioni comprese tra due iperboli equilatere a cui sono stati tolti i punti che appartengono a infinite rette parallele all'asse y.

✍ **Esercizio 2.2.16.** *Si determini il dominio di definizione della seguente funzione:*

$$g(x,y) = \sqrt{\frac{\tan x}{1 - e^y}}.$$

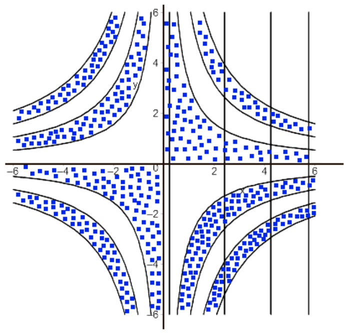

Figura 2.12: Dominio della funzione g.

La funzione e^z è definita per ogni z reale, la funzione $\tan z$ è definita per $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ e infine la funzione $\sqrt{z}$ è definita per ogni $z \geq 0$. Quindi

$$\operatorname{dom} g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\tan x}{1 - e^y} \geq 0 \text{ con } x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ al variare di } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Scendiamo più nei dettagli. Si ha, al variare di $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\frac{\tan x}{1 - e^y} \geq 0 &\Leftrightarrow [\tan x \geq 0 \;\wedge\; 1 - e^y > 0] \;\vee\; [\tan x \leq 0 \;\wedge\; 1 - e^y < 0] \\ &\Leftrightarrow \left[k\,\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \;\wedge\; y < 0\right] \;\vee\; \left[\frac{\pi}{2} + k\,\pi \leq x \leq \pi + k\,\pi \;\wedge\; y > 0\right].\end{aligned}$$

A questo insieme vanno tolte le rette $x = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$, quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} g = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : &\left[k\,\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\,\pi \;\wedge\; y < 0\right] \\ &\vee \left[\frac{\pi}{2} + k\,\pi < x \leq \pi + k\,\pi \;\wedge\; y > 0\right] \text{ per } k \in \mathbb{Z} \Big\}.\end{aligned}$$

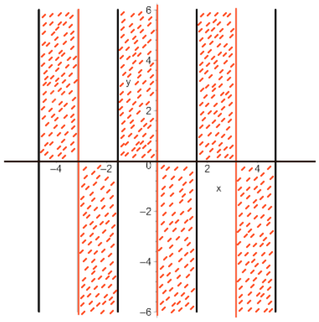

Figura 2.13: Dominio della funzione g.

✍ **Esercizio 2.2.17.** *Determinare l'insieme di definizione D delle seguenti funzioni e indicarne la frontiera*

$$1) f(x,y) = \frac{\sqrt{\log(x^2-y)}}{\arcsin y}$$

$$2) f(x,y) = \sqrt{|x|(x^2+y^2-4)}$$

1) Si ha

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 - 1, \;\; y \neq 0, \;\; -1 \leq y \leq 1\}$$

la frontiera di D è costituita dalle rette $y = -1$; $y = 1$ con $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$; $y = 0$ con $x \leq -1$ o $x \geq 1$; e dal ramo di parabola $y = x^2 - 1$ con $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

2) Si ha $D = A \cup B$ dove

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$$

la frontiera di D è costituita dal segmento di equazione $x = 0$ con $-2 \leq y \leq 2$ e dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$

✍ **Esercizio 2.2.18.** *Determinare l'insieme di definizione D della funzione*

$$f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2) + z$$

Si ha

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0)\}$$

cioè D è $\mathbb{R}^3$ eccetto l'asse x. Si tratta di un insieme aperto, illimitato e connesso.

✍ **Esercizio 2.2.19.**

Si determini il dominio di definizione D della seguente funzione:

$$f(x, y) = \sin(\tan e^{\sqrt{xy}}).$$

Dire se D è aperto, chiuso, limitato.

Le funzioni $\sin z$ e e^z sono definite per ogni z reale. La funzione $\tan z$ è definita per $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ mentre la funzione $\sqrt{z}$ è definita per $z \geq 0$. Quindi

$$\mathrm{dom} f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y \geq 0 \text{ e } e^{\sqrt{xy}} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

In realtà se $k \in \mathbb{Z}^-$ di sicuro $e^{\sqrt{xy}} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ quindi è sufficiente porre

$$e^{\sqrt{xy}} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

D'altra parte questo è equivalente a

$$xy \neq \left[\log\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right)\right]^2 \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Quindi

$$\mathrm{dom}\, f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0 \text{ e } xy \neq \left[\log\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right)\right]^2 \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right\}.$$

La condizione $xy \geq 0$ rappresenta l'unione del primo e terzo quadrante, assi inclusi. D'altra parte per ogni $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ fissato, la condizione

$$xy = \left[\log\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right)\right]^2$$

rappresenta un'iperbole equilatera, quindi il dominio di f è costituito dal primo e dal terzo quadrante a cui viene tolta una famiglia di iperboli equilatere.

L'insieme D non è aperto (contiene gli assi che sono punti di frontiera) ma non è chiuso (perché il complementare sarebbe l'unione del secondo e quarto quadrante (assi esclusi) che sarebbe un insieme aperto, unito alla famiglia di iperboli che è un insieme chiuso (controimmagine di un chiuso tramite funzioni continue). L'insieme D non è limitato.

✍ **Esercizio 2.2.20.** *Si determini il dominio di definizione D della seguente funzione*

$$f(x,y) = \tan\sqrt{1-|yx|}$$

e dire se D è aperto, chiuso, limitato. Cosa cambia se la funzione f viene sostituita dalla funzione

$$g(x,y) = \log\sqrt{1-|yx|}?$$

E se viene sostituita dalla funzione

$$h(x,y) = \sqrt{\sqrt{1-|yx|}-1}?$$

E dalla funzione

$$\ell(x,y) = \sqrt{|\sqrt{1-|yx|}-1|}?$$

La funzione $\tan z$ è definita per $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ mentre la funzione $\sqrt{z}$ è definita per ogni $z \geq 0$. Quindi si ha

$$\operatorname{dom} f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 1-|y\,x| \geq \,0 \,\wedge\, \sqrt{1-|yx|} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Scendiamo più nei dettagli. Si ha

$$1-|y\,x| \geq \,0 \Leftrightarrow |x\,y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x\,y \leq 1$$

inoltre, se $k \in \mathbb{Z}^-$ di sicuro si ha $\sqrt{1-|x\,y|} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ quindi basta chiedere

$$\sqrt{1-|x\,y|} \neq \frac{\pi}{2} + \,k\,\pi \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

da cui

$$|yx| \neq 1 - \left[\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right]^2;$$

dato che $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, di sicuro la quantità $1-\left[\dfrac{\pi}{2} + k\,\pi\right]^2$ è negativa e allora si avrà sicuramente

$$|y\,x| \neq 1 - \left[\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right]^2.$$

Quindi

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, -1 \leq x\,y \leq 1\}.$$

Il dominio di f è rappresentato in figura. Esso non è un insieme aperto perché contiene le iperboli $xy = \pm 1$ che sono punti di frontiera; è infatti un insieme chiuso perché contiene la sua chiusura e il complementare è aperto. Esso non è un insieme limitato.
Per quanto riguarda la funzione g si ottiene invece

$$\operatorname{dom} g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 1 - |x\,y| > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, -1 < x\,y < 1\}.$$

Quindi il dominio di g è il dominio di f a cui sono state tolte le iperboli $xy = \pm 1$; pertanto diventa un insieme aperto e non più chiuso ma rimane un insieme non limitato.
Per quanto riguarda la funzione h si può ancora dire che $\sqrt{z}$ è definita per ogni $z \geq 0$, quindi

$$\operatorname{dom} h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, \sqrt{1 - |y\,x|} - 1 \geq \, 0 \;\wedge\; 1 - |y\,x| \geq \, 0\}.$$

Scendiamo nei dettagli. Si ha

$$1 - |y\,x| \geq \, 0 \Leftrightarrow |x\,y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x\,y \leq 1.$$

D'altra parte

$$\sqrt{1 - |yx|} - 1 \geq \, 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - |yx|} \geq 1 \Leftrightarrow 1 - |y\,x| \geq 1 \Leftrightarrow |y\,x| \leq \, 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; y = 0.$$

Quindi

$$\operatorname{dom} h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x = 0 \;\vee\; y = 0\}$$

cioè si tratta dei soli assi cartesiani. Esso costituisce un dominio chiuso (unione di due chiusi) (e quindi non aperto) e non limitato.
Infine, per quanto riguarda la funzione ℓ si ha

$$\operatorname{dom} \ell = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, |\sqrt{1 - |y\,x|} - 1| \geq \, 0 \;\wedge\; 1 - |y\,x| \geq \, 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, -1 \leq x\,y \leq 1\}.$$

Quindi il dominio di ℓ coincide con il dominio di f.

✍ **Esercizio 2.2.21.** *Si determini il dominio di definizione D della seguente funzione:*

$$f(x,y) = \log(2e^{\sqrt{2+\sin[(xy)]^2}}).$$

Dire se D è aperto, chiuso, limitato.

Le funzioni e^z e $\sin z$ sono definite per ogni $z \in \mathbb{R}$, la funzione $\log z$ è definita per $z > 0$ e infine la funzione $\sqrt{z}$ è definita per $z \geq 0$. D'altra parte, essendo $\log(a\,b) = \log a + \log b$ si ha

$$\log(2\,e^{\sqrt{2+\sin[(xy)]^2}}) = \log 2 + \log\, e^{\sqrt{2+\sin[(xy)]^2}} = \log 2 + \sqrt{2 + \sin[(xy)]^2}$$

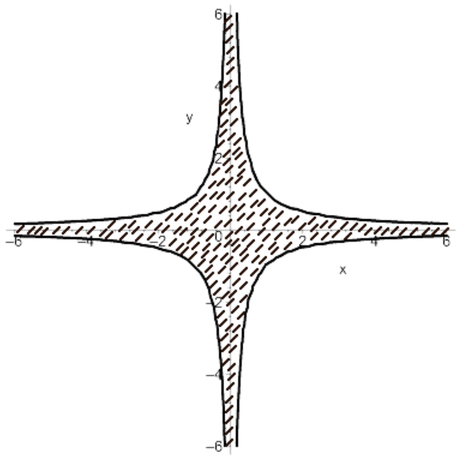

Figura 2.14: Dominio della funzione f.

quindi l'unica condizione da imporre è $2 + \sin[(xy)]^2 \geq 0$. Essendo $-1 \leq \sin z \leq 1$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, si ha che questa condizione è verificata per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ che è ovviamente sia aperto che chiuso e non è limitato.

2.3. Limiti e continuità di più variabili

✍ **Esercizio 2.3.1.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione data è continua sicuramente per $(x,y) \neq (0,0)$. Per vedere se è continua nell'origine, è sufficiente studiare il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ per vedere se esso esiste e se coincide con il valore della funzione in $(0,0)$. Si ha

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\,x^3|\,|y|}{x^4+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| \frac{x^4+y^2}{2(x^4+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{2} = 0$$

visto che $x^2|y| \leq \frac{1}{2}(x^4+y^2)$ (questo deriva dal fatto che $(x^2+|y|)^2 \geq 0$). Il teorema del confronto e la definizione di limite - o ricordando il fatto che

$$|f| \to 0 \Longleftrightarrow f \to 0$$

ci permettono di concludere che il limite cercato esiste e fa 0, dunque la funzione data è continua anche nell'origine.

✍ **Esercizio 2.3.2.**

Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^3}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione data è continua sicuramente per $(x,y) \neq (0,0)$. Per vedere se è continua nell'origine, è sufficiente studiare il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ per vedere se esso esiste e se coincide con il valore della funzione in $(0,0)$. Si ha

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\,x|\,|y^3|}{x^4+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |\,xy|\, \frac{y^2}{x^4+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |\,xy| = 0$$

visto che $\dfrac{y^2}{x^4+y^2} \leq 1$. Il teorema del confronto e la definizione di limite - o ricordando il fatto che

$$|f| \to 0 \Longleftrightarrow f \to 0$$

ci permettono di concludere che il limite cercato esiste e fa 0, dunque la funzione data è continua anche nell'origine.

✍ **Esercizio 2.3.3.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Innanzitutto osserviamo che $\arctan x$ è una funzione continua e dunque la funzione data è sicuramente continua per $(x,y) \neq (0,0)$ mentre per studiare il problema nell'origine è sufficiente studiare il comportamento dell'argomento della funzione arcotangente. Si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$$

non esiste. Infatti se consideriamo la curva $y = x$ otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2x} = \pm\infty$$

a seconda che x tenda a zero da sinistra o da destra. Dunque in corrispondenza di queste scelte,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan \frac{x}{x^2+y^2} = \pm\frac{\pi}{2}$$

a seconda che x tenda a zero da sinistra o da destra. In particolare il limite cercato non esiste (e in ogni caso non è sempre uguale al valore della funzione nell'origine) quindi la funzione non è continua nell'origine.

✍ **Esercizio 2.3.4.** *Stabilire se esiste ed eventualmente calcolare*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xye^x \sin(\pi/4+xy)}{2x^2+y^2}.$$

La funzione

$$f(x,y) = \frac{xye^x \sin(\pi/4+xy)}{2x^2+y^2}$$

di cui dobbiamo calcolare il limite è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sull'asse x (come sull'asse y) è identicamente 0. Quindi il limite, se esiste, deve essere 0. Tuttavia sulla bisettrice $y = x$ si ottiene

$$f(x,x) = \frac{x^2 e^x \sin(\pi/4 + x^2)}{3x^2} = \frac{e^x \sin(\frac{\pi}{4} + x^2)}{3} \to \frac{1 \cdot \sqrt{2}/2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

non esiste.

✍ **Esercizio 2.3.5.** *Si dimostri, usando la restrizione di f su opportune curve, che le seguenti funzioni non hanno limite per $(x,y) \to (0,0)$:*

1) $f(x,y) = xe^{-y/x}$

2) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4}$

1) Se considero la curva $y = x$ allora si ha

$$\lim_{(x,y)\to 0} x\, e^{-y/x} = \lim_{x\to 0} x\, e^{-1} = 0.$$

D'altra parte se considero la curva $y = -\sqrt{x}$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to 0} x\, e^{-y/x} = \lim_{x\to 0} x\, e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = +\infty.$$

Avendo trovato due curve lungo le quali il limite di f ha due valori diversi, si conclude che il limite dato non esiste.

2) Se considero la curva $y = x$ allora si ha

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1 + x^2} = 0.$$

D'altra parte se considero la curva $y = \sqrt{x}$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x\sqrt{x}}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = +\infty.$$

✍ **Esercizio 2.3.6.** *Data la funzione*

$$f(x,y)=\frac{2x-y}{3x+4y}$$

si verifichi che:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)\neq\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)$$

Si verifica facilmente che

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

che è chiaramente diverso da

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}.$$

✍ **Esercizio 2.3.7.** *Si calcolino i limiti:*

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}}$

2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)}$

1) Innanzitutto ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1.$$

Allora, dal teorema sul limite della composizione di funzioni (oppure passando a coordinate polari) otteniamo facilmente che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-e^{xy^2}}{xy^2}=-1.$$

D'altra parte, visto che $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si ha $x^4+y^4\geq y^4$, abbiamo anche

$$0\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|\,y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|\,y^2}{\sqrt{y^4}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0.$$

Dal teorema dei due carabinieri e dal fatto che

$$f\to 0\Longleftrightarrow|f|\to 0$$

si conclude che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0;$$
dunque
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0.$$
2) Vogliamo dimostrare che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)} = 0.$$
Prima di tutto ricordiamo i limiti notevoli
$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}; \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1.$$
Quindi, dal teorema sul limite della composizione di funzioni (oppure passando a coordinate polari), si ottiene
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\log(1+x^2+y^2)} = 1.$$
D'altra parte, visto che $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \le 1$, si ottiene
$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0.$$
Il teorema dei carabinieri ci permette di concludere che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$
Dunque, riassumendo,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\log(1+x^2+y^2)} = 0.$$

✍ **Esercizio 2.3.8.** *Determinare il dominio di definizione della funzione*
$$f(x,y) := x^{-1}(x^3+y^2)\cos(\sqrt{1-\tan x})$$
e studiarne il comportamento per $(x,y) \to (0,0)$.

Innanzitutto la funzione $\tan x$ è definita per $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ mentre l'argomento della radice deve essere positivo o nullo. Inoltre il denominatore di f deve essere diverso da zero, dunque

$$\operatorname{dom} f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi k - \frac{\pi}{2} < x \leq \arctan 1 + k\,\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \;\wedge\; x \neq 0\right\}.$$

Per quanto riguarda il comportamento di f per $(x,y) \to (0,0)$, dimostriamo che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3+y^2)\,\cos\sqrt{1-\tan x}}{x}$$

non esiste. A tale scopo basta trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione data ammetta limite diverso. Ad esempio, si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x,\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3+x)\,\cos\sqrt{1-\tan x}}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2+1)\,\cos\sqrt{1-\tan x} = \cos 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3+x^2)\,\cos\sqrt{1-\tan x}}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2+x)\,\cos\sqrt{1-\tan x} = 0.$$

Questo basta a concludere che il limite dato non esiste.

✍ **Esercizio 2.3.9.** *Determinare il dominio di definizione della funzione*

$$f(x,y) := \frac{(x^3+y^2)\sin(\sqrt{1-\tan x})}{x^2+y^2}$$

e studiarne il comportamento per $(x,y) \to (0,0)$.

Innanzitutto la funzione $\tan x$ è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ mentre l'argomento della radice deve essere positivo o nullo. Inoltre il denominatore di f deve essere diverso da zero, dunque

$$\operatorname{dom} f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi\,k - \frac{\pi}{2} < x \leq \arctan 1 + \pi\,k \;\; k \in \mathbb{Z} \;\wedge\; (x,y) \neq (0,0)\right\}.$$

Per quanto riguarda il comportamento di f per $(x,y) \to (0,0)$, dimostriamo che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3+y^2)\,\sin\sqrt{1-\tan x}}{x^2+y^2}$$

non esiste. A tale scopo basta trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione data ammetta limite diverso. Ad esempio si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x,\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3+x)\,\sin\sqrt{1-\tan x}}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)\,\sin\sqrt{1-\tan x} = \sin 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3+x^2)\,\sin\sqrt{1-\tan x}}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{2}\right)\,\sin\sqrt{1-\tan x} = \frac{1}{2}\,\sin 1.$$

Questo basta a concludere che il limite dato non esiste.

✍ **Esercizio 2.3.10.** *Determinare il dominio di definizione della funzione*

$$f(x,y) := \{[(\sin x)^3 + y^2]\tan(e^{-y})\}/x$$

e studiarne il comportamento per $(x,y)\to(0,0)$.

Innanzitutto la funzione $\tan e^{-y}$ è definita per $e^{-y} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$. Se $k\in\mathbb{Z}^-$ questo è sempre verificato, quindi basta porre

$$e^{-y}\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\quad k\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}.$$

Inoltre il denominatore di f deve essere diverso da zero, dunque

$$\operatorname{dom} f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, x\neq 0\ \wedge\ y\neq -\log\left(\frac{\pi}{2}+k\,\pi\right),\quad k\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\right\}.$$

Per quanto riguarda il comportamento di f per $(x,y)\to(0,0)$, dimostriamo che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{((\sin x)^3+y^2)\,\tan(e^{-y})}{x}$$

non esiste. A tale scopo basta trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione data ammetta limite diverso. Si ha ad esempio (utilizzando un noto limite notevole)

$$\lim_{x\to 0} f(x,\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0}\frac{((\sin x)^3+x)\,\tan(e^{-\sqrt{x}})}{x} = \tan 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{((\sin x)^3+x^2)\,\tan(e^{-x})}{x} = 0.$$

Questo basta a concludere che il limite dato non esiste.

✍ **Esercizio 2.3.11.** *Per ciascuna delle seguenti funzioni dire su quale sottoinsieme del piano si può affermare che la funzione è continua, senza necessità di calcolare i limiti. Si provi poi a calcolare i limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, distinguendo i casi in cui si ha una effettiva forma di indeterminazione da quelli in cui il valore del limite si può calcolare in base ai teoremi noti.*

$\boxed{\text{a) } f(x,y) = e^{x^2/y} = \exp(x^2/y)}$

La funzione sicuramente è continua per $y \neq 0$ (condizione di esistenza del denominatore) perché composizione di funzioni continue. Calcoliamo ora i limiti alla frontiera. Occorre fare attenzione che quello che bisogna calcolare è

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) \tag{2.3.1}$$

al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$, che è diverso dal fissare prima un certo x_0 e poi fare il limite di una variabile

$$\lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Dimostriamo che il limite (2.3.1) non esiste, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$. Passando a coordinate polari infatti si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \exp\left(\frac{(x_0 + \rho\cos\theta)^2}{\rho\sin\theta}\right).$$

Quindi se $x_0 \neq 0$ il numeratore della frazione tende a x_0 e il denominatore tende a 0, quindi il limite proposto non esiste (vale $+\infty$ o 0 a seconda che si prenda una direzione in cui $\sin\theta > 0$ o $\sin\theta < 0$). Se invece $x_0 = 0$ allora ci si trova di fronte a una forma di indecisione e come mostrato a lezione il limite non esiste.

$\boxed{\text{b) } f(x,y) = \arctan\frac{1}{x^2+y^2}}$

La funzione è ben definita e continua fuori dall'origine, perché composizione di funzioni continue. Si ha poi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{c) } f(x,y) = \log(1 + \sqrt{x^2+y^2})}$

La funzione è ben definita e continua su tutto il piano $\mathbb{R}^2$ perché composizione di funzioni continue.

$\boxed{\text{d) } f(x,y) = \frac{x^2+3yx+2}{x^2+2xy+y^2}}$

La funzione è ben definita e continua quando il denominatore non si annulla (perché composizione di funzioni continue), cioè se $y \neq -x$. Andiamo a calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} \frac{x^2+3yx+2}{x^2+2xy+y^2}.$$

Prima effettuiamo il seguente cambio di variabili, in modo da portare il limite dato a un limite verso l'origine

$$x = x_0 + t \qquad y = z - x_0$$

e poi passiamo in coordinate polari

$$t = \rho\cos\theta \qquad z = \rho\sin\theta.$$

Si ottiene dunque

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} \frac{x^2+3yx+2}{x^2+2xy+y^2} \\ = & \lim_{(t,z)\to(0,0)} \frac{(x_0+t)^2+3(z-x_0)(x_0+t)+2}{(t+z)^2} \\ = & \lim_{\rho\to 0} \frac{(x_0+\rho\cos\theta)^2+3(\rho\sin\theta-x_0)(x_0+\rho\cos\theta)+2}{\rho^2(\cos\theta+\sin\theta)^2} \end{aligned}$$

Se $\rho \to 0$ il numeratore tende a $2(1-x_0)^2$ e il denominatore tende a 0^+ per tutti i valori di θ quindi il precedente limite vale $+\infty$ se $-1 < x_0 < 1$ e $-\infty$ se $|x_0| > 1$. Se invece $x_0 = \pm 1$ allora si ha una forma di indecisione $0/0$. Ma si vede subito che tale limite non esiste: basta prendere ad esempio $t = 0$ e allora il limite dato tende a $\pm\infty$ a seconda che $z \to 0^{\pm}$ (questo se $x_0 = 1$; se $x_0 = -1$ il limite tende a $\pm\infty$ a seconda che $z \to 0^{\mp}$).

$\boxed{\text{e) } f(x,y) = \log([\sin(x^2+y^2)]^2)}$

La funzione è ben definita e continua (perché composizione di funzioni continue) se $x^2+y^2 \neq n\pi$, con $n \in \mathbb{N}$. Sia F l'insieme costituito da tali punti e sia $(x_0, y_0) \in F$. Allora banalmente

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \log([\sin(x^2+y^2)]^2) = -\infty.$$

$\boxed{\text{f) } f(x,y) = \arctan(e^{y/x})}$

La funzione è ben definita e continua (perché composizione di funzioni continue) se $x \neq 0$. Andiamo ora a calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y)$$

al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. Effettuiamo prima un cambio di variabile $y = y_0 + t$, in modo che il limite precedente si trasformi in

$$\lim_{(x,t)\to(0,0)} \arctan(e^{(y_0+t)/x})$$

e a questo punto passiamo in coordinate polari

$$x = \rho\cos\theta \qquad t = \rho\sin\theta.$$

Il limite precedente si trasforma in

$$\lim_{\rho\to 0} \arctan\left(e^{\frac{y_0+\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}}\right).$$

Ora, se $y_0 \neq 0$ tale limite sicuramente non esiste (perché il numeratore dell'argomento dell'esponenziale tende a y_0 e il denominatore tende a zero) quindi il risultato del limite tende a $\pi/2$ oppure a 0 a seconda del segno di y_0 e/o dal segno di $\cos\theta$. Invece se $y_0 = 0$ allora ρ si semplifica e rimane

$$\lim_{\rho\to 0} \arctan\left(e^{\tan\theta}\right)$$

che chiaramente dipende da θ quindi il limite non esiste (basta prendere due diversi valori di θ, per esempio $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi/4$).

✍ **Esercizio 2.3.12.** *Dimostrare che*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x}$$

non esiste.

Passiamo in coordinate polari. Il limite precedente diventa

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho}{\cos\theta}.$$

Si nota subito che ad esempio se $\cos\theta \neq 0$ allora il limite dato tende a zero. Andiamo dunque a considerare un valore di θ che realizza una forma di indecisione 0/0, per esempio $\theta = \pi/2$ e andiamo a considerare una curva che ha questa direzione come retta tangente, per esempio $y = \sqrt{x}$. Sostituendo nella funzione di partenza si ottiene che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = 1$$

quindi essendo $1 \neq 0$ esistono due curve distinte lungo la quale f ha limite diverso. Possiamo allora concludere che il limite dato non esiste.

✍ **Esercizio 2.3.13.** *Dimostrare che*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{x^2+y^2} = 0.$$

Passiamo in coordinate polari. Il limite precedente diventa

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\sin^2(\rho^2\sin\theta\cos\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin^2(\rho^2\sin\theta\cos\theta)}{\rho^4\sin\theta\cos\theta}\frac{\rho^4\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}.$$

A questo punto, il primo limite è finito usando i limiti notevoli (visto che l'argomento del limite tende a 0 per ogni θ), nel secondo limite ρ^2 si semplifica e il risultato tende a zero per ogni θ quindi il limite dato esiste e fa 0.

✍ **Esercizio 2.3.14.** *Dimostrare che*

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2\sin(\pi x)}{(x-2)^2+(y-1)^2} = 0.$$

Andiamo ad effettuare il seguente cambio di variabile

$$x-2=t \qquad y-1=s$$

in questo modo il limite precedente diventa

$$\lim_{(t,s)\to(0,0)} \frac{s^2\sin(\pi(t+2))}{t^2+s^2} = \lim_{(t,s)\to(0,0)} \frac{s^2\sin(\pi t)}{t^2+s^2}.$$

A questo punto passiamo in coordinate polari

$$t=\rho\cos\theta \qquad s=\rho\sin\theta$$

da cui il limite precedente diventa

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\sin^2\theta(\sin(\pi\rho\cos\theta))}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\sin(\pi\rho\cos\theta) = 0$$

per la continuità della funzione seno. Quindi anche il limite di partenza esiste e fa zero.

✍ **Esercizio 2.3.15.** *Verificare se esiste un numero reale α che rende continua la funzione:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ \alpha & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Passiamo in coordinate polari. Si ha che il limite precedente diventa

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^3\theta+\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos^3\theta+\cos\theta\sin\theta.$$

Allora il primo termine tende chiaramente a zero per ogni θ ma il secondo termine dipende da θ quindi globalmente il limite precedente non esiste (basta considerare ad esempio $\theta=0$ e $\theta=\pi/2$) e pertanto non esiste nessun valore di α che rende continua la funzione f.

✍ **Esercizio 2.3.16.** *Calcolare il seguente limite, se esiste, oppure spiegare perché non esiste:*

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}.$$

Prima di tutto andiamo ad effettuare il seguente cambio di variabile

$$x=2+t \qquad y=y$$

quindi il limite proposto diventa equivalente al seguente

$$\lim_{(t,y)\to(0,0)}\frac{ty}{t^2+y^2}.$$

A questo punto, passando in coordinate polari, il limite precedente diventa equivalente a

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}=\sin\theta\cos\theta.$$

Questo limite dipende da θ e in particolare prendendo ad esempio $\theta=0$ e $\theta=\pi/2$ si ottengono due diversi valori del limite che pertanto non esiste.

✍ **Esercizio 2.3.17.** *Si consideri la funzione*

$$f_\alpha(x,y)=\frac{x^2(y-x)}{(x^2+y^2)^\alpha} \qquad (x,y)\neq(0,0).$$

Si determini se esiste (e in caso affermativo si calcoli)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$.

Chiaramente se $\alpha \leq 0$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = 0$$

(composizione di funzioni continue). Sia allora $\alpha > 0$. Osserviamo subito che se sulla retta $y = x$ si ha $f_\alpha(x,y) = 0$ quindi per dimostrare che il limite dato non esiste per qualche valore di α è sufficiente trovare una curva lungo la quale la f_α ha limite diverso da zero.
Osserviamo poi che se $\alpha = 1$ il limite dato esiste e fa zero: infatti f_α è il prodotto di una funzione limitata $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ per una funzione infinitesima $(y - x)$ e quindi la conclusione viene dal teorema del confronto. Invece per $\alpha = 3/2$ il limite dato non esiste: basta prendere osservare che

$$\lim_{x\to 0} f_{3/2}(x, 2x) = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Distinguiamo allora alcuni casi:
PRIMO CASO: sia $\alpha < 3/2$. In tal caso, passando a coordinate polari si ottiene

$$\tilde{f}(\rho,\theta) = \frac{\rho^2 \cos^2\theta(\rho\sin\theta - \rho\cos\theta)}{(\rho^2)^\alpha} = \frac{\rho^3}{\rho^{2\alpha}} \cos^2\theta(\sin\theta - \cos\theta).$$

Poiché $\cos^2\theta \in [0,1]$ e $|\sin\theta - \cos\theta| \leq |\sin\theta| + |\cos\theta| \leq 1 + 1 = 2$ allora si ha

$$\tilde{f}(\rho,\theta) \leq \frac{2\rho^3}{\rho^{2\alpha}} = 2\rho^{3-2\alpha} \to 0 \qquad \rho \to 0$$

visto che $3 - 2\alpha > 0$ in quanto per ipotesi siamo nel caso $\alpha < 3/2$. Quindi per le condizioni sufficienti per l'esistenza del limite, il limite dato esiste e fa zero.
SECONDO CASO: sia $\alpha > 3/2$. In tal caso si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f_\alpha(x, 2x) = \frac{1}{5^\alpha\, x^{2\alpha-3}}$$

e questo limite non esiste.

Alternativamente, senza usare le coordinate polari. Sia $0 < \alpha < 1$. In tal caso possiamo scrivere $x^2 = x^{2\alpha}x^{2-2\alpha}$ e visto che $\alpha < 1$ l'esponente $2 - 2\alpha > 0$ quindi $\lim_{x\to 0} x^{2-2\alpha} = 0$. Allora f_α si può scrivere come il prodotto di una funzione limitata

$$\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^\alpha$$

per una funzione infinitesima $(y - x)x^{2-2\alpha}$ per $(x,y) \to (0,0)$ quindi di nuovo dal teorema del confronto il limite dato esiste e fa zero.

Sia ora $1 < \alpha < 3/2$. In tal caso possiamo scrivere $(x^2+y^2)^\alpha = (x^2+y^2)(x^2+y^2)^\gamma$ con $\gamma = \alpha - 1$ e dunque $\gamma < 1/2$. Allora

$$\begin{aligned} f_\alpha(x,y) &= \frac{x^2}{x^2+y^2}\left[\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^\gamma y^{1-2\gamma} - \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^\gamma x^{1-2\gamma}\right] \\ &= \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^\gamma y^{1-2\gamma} - \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^\gamma x^{1-2\gamma} \end{aligned}$$

dove abbiamo scritto $x = x^{2\gamma}x^{1-2\gamma}$ e $y = y^{2\gamma}y^{1-2\gamma}$ con $\gamma < 1/2$; in tal modo risulta $1 - 2\gamma > 0$. Allora f_α si può scrivere come la differenza di due limiti, ciascuno dei quali si può scrivere come il prodotto di due funzioni limitate per una funzione infinitesima per $(x,y) \to (0,0)$ quindi di nuovo dal teorema del confronto il limite dato esiste e fa zero.

✍ **Esercizio 2.3.18.** *Calcolare i seguenti limiti:*

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{y}$ 2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$

3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2}$ 4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2\sin(\pi x)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$

5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(xy)}{\sqrt{x^2-y^2}}$ 6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{\sin xy}$

7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ 8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2\log x}{x^2-2x+1+y^2}$

1) Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}x = 0$$

2) Passando a coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to0} \frac{2\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to0} 2\rho\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

indipendentemente da θ.

3) Passando a coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to0}\rho^2\log\rho = 0$$

4) Si possono usare le coordinate polari ponendo

$$x = 2 + \rho\cos\theta \qquad y = 1 + \rho\sin\theta$$

quindi si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2\sin(\pi x)}{(x-2)^2+(y-1)^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\sin^2\theta\sin(2\pi+\pi\rho\cos\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\sin^2\theta\sin(\pi\rho\cos\theta) = 0$$

5) Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(xy)}{\sqrt{x^2-y^2}} = -\infty$$

6) Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x\sin y}{\sin xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}\frac{xy}{\sin(xy)} = 1$$

7) Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0}\sqrt{\rho|\cos\theta|}\sin\frac{1}{\rho^2} = 0$$

8) Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2\log x}{x^2-2x+1+y^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\log(1+\rho\cos\theta}{\rho^2} = 0$$

✍ **Esercizio 2.3.19.** *Si mostri che non esistono i seguenti limiti:*

$$1)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad 2)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x}$$

$$3)\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\log(x+y)}{x} \qquad 4)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{\frac{x}{y}}$$

1) Si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 \neq \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} f(x,x)$$

quindi il limite dato non esiste perché lungo le rette $y=0$ e $y=x$ la funzione ammette limiti diversi

2) Si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 \neq \lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y^4+y^2}{y^2} = 1$$

quindi il limite dato non esiste perché lungo la retta $y=0$ e la parabola $x=y^2$ la funzione ammette limiti diversi

3) Si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x,x+1) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(2x+1)}{x} = 2 \neq \lim_{x\to 0} f(x,1) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

4) Si ha
$$\lim_{x\to 0^+} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty \neq \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$$

✍ **Esercizio 2.3.20.** *Calcolare il limite di*
$$\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$
quando $(x,y)\to(0,0)$ *lungo le rette per l'origine. Dimostrare che non esiste*
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Una generica retta per l'origine è della forma $y = mx$ per cui si ha
$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = 0$$
d'altra parte
$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1}{2}$$
quindi abbiamo trovato almeno due curve (una qualunque retta per l'origine e la parabola $y = x^2$) lungo le quali f ammette limiti diversi pertanto il limite della funzione data non esiste.

✍ **Esercizio 2.3.21.** *Stabilire dove è continua la funzione*
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

La funzione sicuramente è continua per ogni $(x,y)\neq(0,0)$ infatti è combinazione di funzioni continue. Inoltre, passando ad esempio in coordinate polari, si ha che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \cos\theta \sin(\rho\sin\theta) = 0$$
indipendentemente da θ. Quindi la funzione è continua anche nell'origine.

✍ **Esercizio 2.3.22.** *Stabilire dove è continua la funzione*
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Si ha che $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ non esiste: infatti $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 2$ mentre $\lim_{x\to 0} f(x,-x) = 0$ dunque la funzione non è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

✍ **Esercizio 2.3.23.** *Siano*

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Si determini il loro insieme di definizione e si stabilisca se possono essere estese con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$.

Entrambe le funzioni sono definite in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} = 1$$

quindi f può essere estesa con continuità in $(0,0)$ ponendo $f(0,0) = 1$. Invece il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ non esiste, infatti $\lim_{x\to 0} g(x,0) = 1$ mentre $\lim_{y\to 0} g(0,y) = -1$ quindi g non può essere estesa con continuità in $(0,0)$.

✍ **Esercizio 2.3.24.** *Sia*

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^2}{xy}$$

a) Si determini l'insieme di definizione D di f; b) si calcoli il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$*; c) si stabilisca se f può essere estese con continuità a tutto* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Si ha

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \;\; y \neq 0\}$$

b) Si osserva che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

non esiste infatti

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} f(x,-x) = -1$$

c) per il punto precedente f non può essere estesa con continuità in $(0,0)$. Consideriamo ora il generico punto dell'asse x: $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$. Allora si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)$$

non esiste (viene $\pm\infty$ a seconda dei casi), quindi in particolare f non può essere estesa con continuità ai punti dell'asse x. Con analogo ragionamento si dimostra che f non può essere estesa con continuità ai punti dell'asse y.

✍ **Esercizio 2.3.25.** *Sia*

$$f(x,y) = e^{\frac{x^2}{y}}$$

a) Si determini l'insieme di definizione D di f; b) si calcoli il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; c) si stabilisca se f può essere estese con continuità a tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) Si ha

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

b) Si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

non esiste. Infatti

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = e$$

c) per il punto precedente f non può essere estesa con continuità in $(0,0)$. Consideriamo il generico punto dell'asse x: $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$. Si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)$$

non esiste (viene $\pm\infty$ a seconda dei casi) quindi f non può essere estesa con continuità ai punti dell'asse x.

✍ **Esercizio 2.3.26.** *Sia*

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y}$$

a) Si determini l'insieme di definizione D di f; b) si stabilisca se f può essere estese con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$.

Si ha

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

b) Consideriamo il generico punto dell'asse x, $(x_0, 0)$. Si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} x = x_0$$

quindi f può essere estesa con continuità ai punti dell'asse x ponendo $f(x, 0) = x$.

✍ **Esercizio 2.3.27.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^3 + y^3} & x \neq -y \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La funzione è definita sull'insieme

$$A = [\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}] \cup \{(0, 0)\}.$$

In primo luogo occorre notare che per $x \neq -y$ la funzione data è continua; resta dunque da studiare la continuità nell'intorno dell'origine. Per fare questo occorre studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^3 + y^3}$$

e vedere se questo esiste e fa 0. In tal caso f sarà continua anche nel punto $(0, 0)$; in caso contrario non sarà continua in quel punto. (Osserviamo tra l'altro che non è ovviamente possibile dire che $\dfrac{x^3}{x^3 + y^3} \leq 1$).
Se si considera il limite lungo le curve che di solito vengono utilizzate, esempio $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$ si vede che il limite considerato esiste e fa 0. Anche lungo tutte le rette passanti per l'origine il limite esiste e fa 0. Questo potrebbe erroneamente portare a concludere che il limite della funzione esista e faccia 0. Tale conclusione è errata: infatti il limite dato non esiste.
Come si può arrivare a intuire questa conclusione? Innanzitutto si vede che se $y = -x$ il denominatore si annulla mentre il numeratore tende a zero, questo potrebbe indurre a pensare che ci sia un modo per far andare a zero il denominatore più velocemente del numeratore. Si esprime in termini rigorosi questo concetto considerando la successione

$$\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^\beta}\right)$$

dove $\beta > 0$; questa successione di punti sta lungo una curva che risulta essere una perturbazione della curva $y = -x$ che annulla il denominatore della funzione data. L'idea è cercare un β in modo che il limite lungo tale successione di punti venga diverso da 0. Dopo alcune ricerche si vede che ad esempio $\beta = 5$ fa al caso nostro. Allora se prendiamo in esame la successione

$$\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^5}\right)$$

si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\dfrac{1}{n^3}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^5}\right)^3}{\dfrac{3}{n^7}+\dfrac{3}{n^{11}}+\dfrac{1}{n^{15}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1-\dfrac{3}{n^4}-\dfrac{3}{n^8}-\dfrac{1}{n^{12}}}{\dfrac{3}{n}+\dfrac{3}{n^5}+\dfrac{1}{n^9}} = -\infty.$$

Questo permette di concludere che il limite dato non esiste e dunque f non è continua in $(0,0)$.