SIA $\{X_i\}$ UNA FAMIGLIA DI $n = 20$ V.A. i.i.d. CON

$X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$ μ INCOGNITO $\sigma = 25$

SI VUOLE CONDURRE UN TEST PER μ AD UN LIVELLO $\alpha = 0{,}05$

$H_0 : \mu \le \mu_0$ CONTRO $H_1 : \mu > \mu_0$

IPOTIZZANDO $\mu_0 = 1000$

SCRIVERE LA FORMA ESPLICITA DI $Pot(\vartheta)$ E PLOTTARLA CON R.

$pot(\vartheta)$ È LA PROBABILITÀ DI RIFIUTARE IL TEST QUANDO IL VALORE VERO DEL PARAMETRO È ϑ.

POICHÉ RIFIUTO IL TEST SE $Z > z_{1-\alpha}$ OVVERO SE

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \quad \text{OVVERO SE} \quad \bar{X}_n > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ALLORA $Pot(\vartheta) = \mathbb{P}\left[\bar{X}_n > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ CIOÈ

$$Pot(\vartheta) = \mathbb{P}\left[N\left(\vartheta, \frac{\sigma^2}{n}\right) > \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \vartheta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \vartheta}{\sigma}\sqrt{n} + z_{1-\alpha}\right)$$

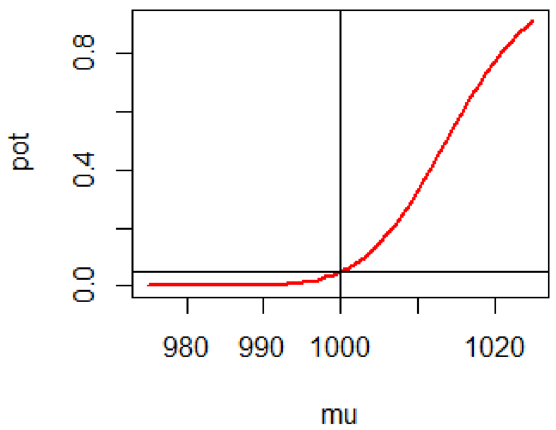
DA CUI NOTIAMO CHE $Pot(\mu_0) = \alpha$

SOSTITUENDO I DATI OTTENIAMO

$$Pot(\vartheta) = 1 - \Phi\left(\frac{1000 - \vartheta}{25}\sqrt{20} + z\right)$$

CHE PLOTTATA IN R FORNISCE

FORNISCE IL GRAFICO IN FIGURA:



CASO BILATERO. RIFIUTO SE $|Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{|\bar{X}_n - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \begin{cases} > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{X}_n \begin{cases} > \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ < \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(0,1) \begin{cases} > \frac{\mu_0 - \vartheta}{\sigma}\sqrt{n} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ < \frac{\mu_0 - \vartheta}{\sigma}\sqrt{n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$\Phi\left(k - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + 1 - \Phi\left(k + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$