Studi di funzione

1. Risolvere per via grafica le seguenti disequazioni:

1) $(1+x)^{\frac{3}{2}} - 1 - \frac{3}{2}x \geq 0$ (R. per ogni $x \geq -1$)
2) $\arctan x - x \geq 0$ (R. per ogni $x \leq 0$)
3) $\log(1+x^2) - x^2 \geq 0$ (R. $x = 0$, N.B. si pone $t = x^2$)

2. Determinare i massimi e i minimi relativi e assoluti della funzione:

$$f(x) = x + x^{\frac{2}{3}},$$

nell'intervallo $[-1, 1]$. (R. il minimo assoluto è 0 ed è assunto in -1 e 0, il massimo assoluto è 2 ed è assunto in 1, $\frac{4}{27}$ è massimo relativo ed è assunto in $-\frac{8}{27}$)

3. Studiare le seguenti funzioni, tralasciando il calcolo della derivata seconda:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \log(x+1)$ (traccia: dominio $D = (-1, +\infty)$, $x = -1$ è asintoto verticale, la funzione è ovunque crescente e presenta due flessi di ascissa $\alpha \in (-1, 0)$, e $x = 0$, $x = 0$ è un flesso a tangente verticale)

2) $f(x) = x^3 \left(\log|x| - \dfrac{1}{3}\right)$ (traccia: dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è dispari, $x = 1(-1)$ è punto di minimo (massimo) relativo, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \lim_{x\to 0} f'(x) = 0, f(\pm\sqrt[3]{e}) = 0$)

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+3}}$ (traccia: dominio $D = (-3, -1] \cup [1, +\infty)$, $x = -3$ è asintoto verticale, $x = \pm 1$ sono punti a tangente verticale, la funzione è decrescente per $-3 < x < -1$ e crescente per $x > 1$, la funzione presenta un flesso di ascissa $\alpha \in (-3, -1)$)

4) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2+3x-4}{x+1}\right)$ (traccia: dominio $D = (-4, -1) \cup (1, +\infty)$, $x = -4, x = \pm 1$ sono asintoti verticali, la funzione è ovunque crescente)

4. Studiare le seguenti funzioni:

1) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$ (traccia: dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ è asintoto verticale, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, $y = e$ è asintoto orizzontale, il punto di ascissa $\frac{1}{2}$ è di flesso)

2) $f(x) = xe^{\dfrac{1}{\log x}}$ (traccia: dominio $D = (0, +\infty) \setminus \{1\}$, $x = 1$ è asintoto verticale, $x = \frac{1}{e}$ è punto di massimo relativo, $x = e$ è punto di minimo relativo, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$, i punti di ascissa $e^{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$ sono flessi)

3) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 9}$ (traccia: dominio $D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$, $y = 2x$ è asintoto obliquo a $-\infty$, la funzione è crescente per $x \leq -3$ e decrescente per $x \geq 3$, $x = \pm 3$ sono punti a tangente verticale, la concavità è ovunque rivolta verso l'alto)