Michela Eleuteri

# ANALISI MATEMATICA

## Serie di Fourier

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

# Indice

# CAPITOLO 1

# Serie di Fourier

## 1.1. Cenni sulle serie di funzioni

Sia data una successione di funzioni

$$f_n : I \to \mathbb{R} \qquad n \geq 1$$

definite su un intervallo $I$. A partire dalla successione dei numeri reali $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ per ogni $x \in I$ si può considerare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1.1.1}$$

che, per ciascun $x$ fissato, può essere una serie convergente, divergente o irregolare.

❒ **Definizione 1.1.1.** La (1.1.1) si dice SERIE DI FUNZIONI. Se per un certo $x \in I$ la (1.1.1) è, rispettivamente, una serie numerica convergente, divergente o irregolare, diremo che LA SERIE DI FUNZIONI È CONVERGENTE, DIVERGENTE O IRREGOLARE rispettivamente. Se si ha convergenza della serie di funzioni per tutti gli $x \in I^* \subseteq I$ allora diremo che la serie di funzioni CONVERGE PUNTUALMENTE in $I^*$.

❒ **Definizione 1.1.2.** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Diremo che la serie di funzioni (1.1.1) CONVERGE TOTALMENTE in $I$ se esiste una successione $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ di numeri reali positivi tali che
(i) $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$;
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

☞ **Osservazione 1.1.3.** Osserviamo che la convergenza totale di una serie di funzioni in $I$ implica la convergenza assoluta e quindi la convergenza semplice (e quindi puntuale) della serie, per ogni

$x \in I$. Pertanto risulta ben definita la funzione, somma della serie

$$f : I \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

La convergenza totale è un'ipotesi piuttosto forte; allo stesso modo la convergenza puntuale è un'ipotesi piuttosto debole. Ci sono altri tipi di convergenza che possono essere considerati come intermedi ai due, ma il loro studio esula dagli scopi di questo corso.

## 1.2. Serie di potenze: definizione e proprietà

I primi esempi di serie di funzioni che abbiamo incontrato nel nostro percorso sono tutte le serie di Taylor di funzioni derivabili infinite volte, per esempio la *serie esponenziale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

Si tratta in tutti i casi di serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n.$$

Anche la *serie geometrica* ha questa forma, con $a_n = 1$ ed è ben definita (converge puntualmente) se $-1 < x < 1$. Diamo pertanto la seguente definizione.

❐ **Definizione 1.2.1.** Si dice serie di potenze di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1.2.1}$$

dove $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è una successione a valori reali e $x \in \mathbb{R}$. Gli $a_n$ si dicono coefficienti della serie di potenze.

Per le serie di potenze, l'insieme degli $x$ per cui si ha convergenza è sempre un intervallo, detto intervallo di convergenza; la metà della lunghezza di questo intervallo si dice raggio di convergenza. Precisamente si ha:

**Teorema 1.2.2.** (raggio di convergenza) *Si consideri la serie* (1.2.1) *e supponiamo che esista il limite*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

*e poniamo*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \ell \neq 0, \infty \\ +\infty & \ell = 0 \\ 0 & \ell = \infty \end{cases}$$

*Allora:*

*se* $|x - x_0| < R$ *la serie* (1.2.1) *converge (assolutamente);*
*se* $|x - x_0| > R$ *la serie* (1.2.1) *non converge.*
*Il numero* $R$ *si dice* raggio di convergenza *della serie di potenze.*

☞ **Osservazione 1.2.3.** Nel caso $|x - x_0| > R$ si ha non convergenza, quindi la serie di potenze può essere o divergente o irregolare. Se $R = 0$ si ha convergenza solo per $x = x_0$; se $R = \infty$ si ha convergenza su tutto $\mathbb{R}$. Se $x = x_0 \pm R$ (gli estremi dell'intervallo di convergenza), nulla si può dire e in effetti la serie può convergere, divergere o essere irregolare a seconda dei casi, quindi questi casi vanno analizzati a parte.

☞ **Osservazione 1.2.4.** Si può dimostrare che per una serie di potenze il numero

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

esiste sempre, anche se questo non è a priori ovvio (il limite potrebbe a priori non esistere, ma per una serie di potenze esiste sempre).

Alternativamente, si può usare il seguente criterio per il calcolo del raggio di convergenza.

**Teorema 1.2.5.** (criterio del rapporto per le serie di potenze) *Si consideri la serie* (1.2.1) *e supponiamo che esista finito o infinito il limite*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

*Allora il raggio di convergenza della serie di potenze è*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \ell \neq 0, \infty \\ +\infty & \ell = 0 \\ 0 & \ell = \infty \end{cases}$$

✎ **Esempio 1.2.6.** *Calcoliamo il raggio di convergenza della serie geometrica (serie di potenze di centro $x_0 = 0$)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Si ha $a_n = 1$ dunque $\ell = 1$ e infatti si ha convergenza per $x \in (-1, 1)$. Cosa succede agli estremi dell'intervallo? Se $x = 1$ allora si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1$$

che diverge mentre se $x = -1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

che è irregolare.

✎ **Esempio 1.2.7.** *Calcoliamo il raggio di convergenza della serie di Taylor di $e^x$ e $\log(1 + x)$*

Sono entrambe serie di potenze centrate nell'origine. La serie esponenziale ha espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

quindi $a_n = 1/n!$ e per cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

quindi la serie di Taylor di $e^x$ converge su tutto $\mathbb{R}$.
Invece la serie di Taylor di $\log(1 + x)$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

quindi

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad |a_n| = \frac{1}{n}$$

quindi il raggio di convergenza è uguale a 1. Se $x = 1$ allora la serie di potenze diverge (serie armonica) mentre se $x = -1$ converge (per il criterio di Leibniz).

✎ **Esempio 1.2.8.** *Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

Si tratta di nuovo di una serie di potenze centrata nell'origine. È facile vedere che in questo caso, posto $a_n = n!$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

quindi il raggio di convergenza è $R = 0$. Quindi questa serie di potenze converge solo per $x = 0$ (e fa 0).

**Teorema 1.2.9.** (proprietà delle serie di potenze) *Consideriamo la serie* (1.2.1) *e supponiamo che il suo raggio di convergenza $R$ sia positivo (finito o infinito). Allora:*

*(1) Per ogni numero $r \in (0, R)$ la serie* (1.2.1) *converge totalmente nell'intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$;*
*(2) La somma della serie* (1.2.1), *cioè la funzione*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1.2.2}$$

*è una funzione continua nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$; inoltre essa è derivabile nello stesso intervallo e la serie può essere derivata termine a termine infinite volte, per esempio per la derivata prima si ha*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, (x - x_0)^{n-1}$$

*Per altro la serie derivata è anch'essa una serie di potenze di centro $x_0$ e con lo stesso raggio di convergenza $R$ della serie di partenza.*
*(3) La somma della serie* (1.2.1), *cioè la funzione* (1.2.2) *ammette una primitiva nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$ che può essere calcolata termine a termine*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C$$

*e anche la primitiva è esprimibile come serie di potenze di centro $x_0$ e con lo stesso raggio di convergenza $R$ della serie di partenza.*
*(4) Infine per ogni intervallo $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ la somma della serie* (1.2.1), *cioè la funzione* (1.2.2) *è integrabile in $[a, b]$ e si può integrare termine a termine*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x - x_0)^n$$

La possibilità di integrare o derivare termine a termine la serie è uno strumento potene per calcolare talvolta la somma di una serie o sviluppare in serie una funzione data senza ricorrere al polinomio di Taylor.

✎ **Esempio 1.2.10.** *Si ricostruisca lo sviluppo in serie di potenze (centrato in 0) della funzione* $\arctan x$ *e della funzione* $\log(1+x)$ *senza usare la serie di Taylor*

Sia $f(x) = \arctan x$; si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

quindi usando la somma della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

per $t = -x^2$ si trova

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

che naturalmente converge solo per $|x| < 1$. Integrando ora termine a termine in $[0, x]$ si trova

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Allo stesso modo ricostruiamo lo sviluppo in serie di potenze del logaritmo. Di nuovo dalla serie geometrica si ha, per $|t| < 1$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

quindi integrando termine a termine in $[0, x]$ si ha, per $|x| < 1$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

## 1.3. Serie di potenze e serie di Taylor. Funzioni analitiche

È facile osservare che *la classe delle funzioni sviluppabili in serie di Mac Laurin coincide con la classe della serie di potenze di centro nell'origine aventi raggio di convergenza positivo.* Quindi le due nozioni, di serie di potenze e serie di Mac Laurin, rappresentano due punti di vista diversi sullo stesso oggetto: dal primo punto di vista si parte da una funzione $f(x)$ assegnata in qualche forma analitica e se ne calcola la serie di Mac Laurin; dal secondo punto di vista si parte dalla serie di potenze e la si riconosce come serie di Mac Laurin di una certa funzione. In modo del tutto analogo, le funzioni sviluppabili in serie di Taylor di centro $x_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

sono tutte e sole le serie di potenze centrate in $x_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

con raggio di convergenza $R > 0$. Diamo allora la seguente definizione.

❒ **Definizione 1.3.1.** Una funzione si dice ANALITICA in un intervallo $[a,b]$ se per ogni $x_0 \in (a,b)$ la funzione è sviluppabile in serie di potenze (ovvero in serie di Taylor) di centro $x_0$, con raggio di convergenza positivo.

✎ **Esempio 1.3.2.** *Le funzioni trascendenti elementari* $e^x, \sin x, \cos x$ *sono esempi di funzioni analitiche in tutto* $\mathbb{R}$*; le funzioni* $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ *sono invece analitiche per* $x \geq -1$ *(l'insieme di convergenza sarà invece* $|x| < 1$*).*

Per comodità richiamiamo qui gli sviluppi delle principali funzioni elementali con centro $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} && x \in \mathbb{R} \\
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} && |x| < 1 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n && |x| < 1 \\
\text{con } \binom{\alpha}{n} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}
\end{aligned}$$

☞ **Osservazione 1.3.3.** Non tutte le funzioni derivabili infinite volte in un punto sono analitiche in un intorno di quel punto; detto altrimenti: una volta scritta formalmente la serie di Mac Laurin di una funzione, non è detto che questa serie di potenze abbia raggio di convergenza positivo (potrebbe essere nullo) e se anche fosse, non è detto che la sua somma coincida con la funzione di partenza.

✎ **Esempio 1.3.4.** *Sia data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

*Essa è derivabile infinite volte con derivate nell'origine tutte nulle. Quindi la serie di Mac Laurin è identicamente nulla, che ovviamente converge ma non rappresenta la $f$. Dunque $f$ è infinitamente derivabile su tutto $\mathbb{R}$ ma non è analitica in nessun intorno dell'origine.*

☞ **Osservazione 1.3.5.** (PREGI E DIFETTI DELLE SERIE DI POTENZE) ***Pregi:*** si può integrare e/o derivare termine a termine con molta facilità la serie di potenze e il raggio di convergenza non cambia.
***Difetti:*** si possono approssimare solo funzioni estremamente regolari, in particolare non c'è speranza di approssimare mediante serie di potenze ad esempio una funzione discontinua o continua ma non derivabile; per questo andiamo alla ricerca di altri tipi di serie di funzioni, che hanno la proprietà di convergere "meno facilmente" delle serie di potenze ma tali da poter avere come somma anche funzioni meno regolari.
È il caso ad esempio delle SERIE DI FOURIER.

# 1.4. Serie trigonometriche e serie di Fourier

## 1.4.1. Polinomi trigonometrici e serie trigonometriche

❒ **Definizione 1.4.1.** Si dice POLINOMIO TRIGONOMETRICO DI ORDINE $n$ una funzione del tipo

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dove $a_k, b_k$ sono numeri reali o complessi assegnati. Si dice SERIE TRIGONOMETRICA l'analoga espressione dove al posto della somma finita ci sia la serie

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Le serie trigonometriche sono di grandissima utilità in svariate applicazioni tra cui l'elaborazione o la compressione di segnali periodici di vario tipo o di immagini. La definizione data naturalmente è solo formale e come per ogni serie di funzioni non è detto che converga e, in caso affermativo, non è detto che la somma della serie abbia buone proprietà. Di sicuro per ora c'è solo che se una serie trigonometrica converge, la sua somma è una funzione periodica di periodo $2\pi$. Questo fa pensare, rovesciando il discorso, che sia possibile rappresentare *ogni funzione $2\pi-$periodica con una somma, anche infinita, di funzioni elementari del tipo*

$$\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots \sin nx, \cos nx, \ldots$$

È stata questa la straordinaria intuizione di Fourier. Cerchiamo allora alcune condizioni per la convergenza di serie trigonometriche. Innanzitutto se i coefficienti $a_k$ e $b_k$ non tendono a zero, la serie non converge, perché non è verificata la condizione necessaria. D'altra parte se gli $a_n$ e $b_n$ tendono a zero così velocemente che le serie $\sum |a_n|$ e $\sum |b_n|$ convergono, allora per il criterio del confronto si ha

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k| \tag{1.4.1}$$

e quindi la serie trigonometrica converge assolutamente (e perciò converge).
Nel caso intermedio in cui i coefficienti della serie trigonometrica tendono a zero ma troppo lentamente per avere convergenza assoluta, può essere utile il seguente criterio.

**Proposizione 1.4.2.** *Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali positivi che tende a zero in maniera monotona. Allora le serie trigonometriche*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

*convergono per ogni $x \in (0, 2\pi)$, mentre le serie trigonometriche*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos nx \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \sin nx$$

*convergono per ogni $x \in [0, 2\pi]$, con $x \neq \pi$. Nei punti rimasti fuori, le serie di seni sono identicamente nulle, mentre le altre possono convergere oppure no.*

✎ **Esempio 1.4.3.** *Dal criterio si deduce immediatamente che convergono per $x \in (0, 2\pi)$ le seguenti serie trigonometriche*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

*In questo caso, il criterio della convergenza assoluta non darebbe informazioni. Si noti che per $x = 0$ le serie dei coseni stavolta divergono. Allo stesso modo si dimostra dal criterio che le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

*convergono per $x \in [0, 2\pi]$ con $x \neq \pi$; anche in questo caso, per $x = \pi$ le serie dei coseni divergono.*

Facciamo il punto: abbiamo definito una serie trigonometrica e abbiamo dato condizioni per cui essa converga. Ora il tassello mancante è capire se questa serie trigonometrica, nel caso sia convergente, possa rappresentare una qualche funzione e se sì, quali classi di funzioni. L'idea è che possa rappresentare funzioni regolari ma anche funzioni discontinue o continue ma non derivabili (cosa che non era possibile, come abbiamo osservato, con le serie di potenze). Ci induce a pensare questo il fatto che se noi andiamo a derivare termine a termine la serie trigonometrica, allora si ottiene di nuovo una serie trigonometrica ma con coefficienti più grandi in valore assoluto rispetto a quelli di partenza. Quindi ci si aspetta che possa essere più difficile provare la convergenza delle serie derivate. Quindi rispetto alle serie di potenze, le serie trigonometriche si prestano ad essere uno strumento più adatto per rappresentare anche funzioni meno regolari. Il prossimo paragrafo ci permetterà di stabilire sotto quali condizioni una funzione $f$ definita su $[0, 2\pi]$ (estesa in modo periodico fuori da questo intervallo) si possa vedere come somma di una serie trigonometrica ed eventualmente come possano essere determinati i suoi coefficienti.

### 1.4.2. Serie di Fourier di una funzione

Abbiamo detto che una serie trigonometrica, se converge, ha per somma una funzione periodica di periodo $2\pi$. Quindi le funzioni che pensiamo di sviluppare in serie trigonometriche saranno funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ e periodiche di periodo $2\pi$, o alternativamente (in modo del tutto equivalente) funzioni definite su $[0, 2\pi]$ ed estese per periodicità su tutto $\mathbb{R}$.
Il problema che ci poniamo in questo paragrafo è dunque il seguente: data una funzione $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ (prolungata per periodicità a tutto l'asse reale), sotto quali condizioni si può vedere $f$ come somma di una serie trigonometrica? Come si determinano i coefficienti $a_k$ e $b_k$ in questo caso?
Possiamo pensare di prendere $f \in V$, dove $V$ è l'insieme costituito dalle funzioni $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ integrabili (in senso proprio) e quindi limitate; esso costituisce uno spazio vettoriale. Inoltre su di esso possiamo introdurre un prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$$

con la relativa norma

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_0^{2\pi} f^2(t)\, dt \right)^{1/2}$$

che a sua volta induce la distanza

$$d(f, g) = ||f - g|| = \left( \int_0^{2\pi} [f(t) - g(t)]^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Ricordiamo l'obiettivo: data $f \in V$ vogliamo trovare sotto quali condizioni $f$ si scrive come somma di una serie trigonometrica, che a sua volta è "limite" di un polinomio trigonometrico. Quindi, usando i risultati astratti contenuti nel paragrafo dei complementi, in particolare il teorema di proiezione, l'idea è quella di trovare un polinomio trigonometrico $P_n$ di grado minore o uguale a $n$ (che sta in uno spazio di dimensione finita $n$ e che sarà il nostro $V_0$) tale che minimizza ovvero meglio approssima la distanza $||P_n - f||$; questo sarà dato dalla proiezione ortogonale di $P_n$ su $V$. Per fare ciò, occorre dotare il nostro $V_0$ di una base ortonormale. A tal proposito vale la seguente proposizione.

**Proposizione 1.4.4.** *Le funzioni*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

*costituiscono un* SISTEMA ORTONORMALE *nello spazio vettoriale $V$, cioè valgono le seguenti relazioni integrali (dette* RELAZIONI DI ORTOGONALITÀ*), per ogni $k, h = 1, 2, 3, \ldots$*

$$\int_0^{2\pi} (\sin kx)^2 \, dx = \int_0^{2\pi} (\cos kx)^2 \, dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin hx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos kx \cos hx \, dx = 0 \quad h \neq k$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos hx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin kx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos hx \, dx = 0$$

Quindi un polinomio trigonometrico di grado minore o uguale a $n$ sarà una combinazione lineare dei primi $2n+1$ versori della base ortonormale di $V$, ovvero è un generico elemento del sottospazio vettoriale $V_n$ (il nostro $V_0$ del teorema astratto) generato da questi $2n+1$ vettori. A questo punto andiamo a costruire esplicitamente la proiezione ortogonale di $f$ su $V_n$ (secondo i risultati della Proposizione 1.7.3. Si ha

$$\begin{aligned} S_n f &= \sum_{i=0}^{2n} \langle f, e_i \rangle e_i = \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) \, dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \left[ \left( \int_0^{2\pi} \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} f(t) \, dt \right) \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \left( \int_0^{2\pi} \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} f(t) \, dt \right) \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right] \end{aligned}$$

Se si pone

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, \cos kt \, dt \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4.2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, \sin kt \, dt \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1.4.3}$$

si ottiene

$$S_n f = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.4.4}$$

❐ **Definizione 1.4.5.** I coefficienti $a_k$ e $b_k$ definiti dalle relazioni precedenti si dicono COEFFICIENTI DI FOURIER DI $f$; il polinomio trigonometrico $S_n f(x)$ si dice $n$-ESIMA SOMMA DI FOURIER DI $f$ e la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

si dice SERIE DI FOURIER DI $f$

Raccogliamo nella prossima proposizione tutte le proprietà, in base ai risultati astratti, di $S_n f$, oltre al fatto, già visto che $S_n f$ è, tra i polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a $n$ quello che rende minima la distanza da $f$, cioè la quantità $||f - P_n||$, al variare di $P_n \in V_n$)

**Proposizione 1.4.6.** *Sia $f \in V$ e siano $a_k, b_k$ i suoi coefficienti di Fourier assegnati dalle relazioni* (1.4.3), (1.4.3). *Allora:*

$$(1)||S_n f||^2 = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

$(2)||S_n f||^2 \le ||f||^2$ (DISUGUAGLIANZA DI BESSEL)

$$(3) \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

(4)per $k \to \infty$, $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE

(5)$S_n f$ è, tra i polinomi trigonometrici di grado $\le n$, quello che rende minima la distanza da $f$

cioè la quantità $||f - p_n||$, al variare di $p_n \in V_n$

$$(6) \int_0^{2\pi}[f(x) - S_n(x)]^2\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

☞ **Osservazione 1.4.7.** Osserviamo che la condizione 3) è diversa dalla condizione (1.4.1) che implica la convergenza totale!

☞ **Osservazione 1.4.8.** Naturalmente si possono considerare anche altri intervalli di periodicità invece che il classico $[0, 2\pi]$. Per esempio, per una funzione definita su $[0, T]$ il sistema di funzioni trigonometriche con periodo (multiplo di $T$) è

$$1, \quad \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) \quad \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

mentre i coefficienti di Fourier sono

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos(\omega kt)\,dt \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin(\omega kt)\,dt \qquad k = 1, 2, \ldots$$

dove si è posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$. I risultati delle corrispondenti propositioni si adattano poi di conseguenza.

✎ **Esempio 1.4.9.** (onda quadra) *Determinare i coefficienti di Fourier della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

*prolungata a una funzione* $2\pi-$*periodica su* $\mathbb{R}$

Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 1$$

e, per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx = 0.$$

Invece si ha

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \left( -\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n}$$

da cui

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier associata a $f$ è

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

☞ **Osservazione 1.4.10.** Non è difficile verificare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione periodica di periodo $T > 0$ allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx$$

quindi in particolare i coefficienti di Fourier si possono calcolare equivalentemente come

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Questo fatto verrà usato nell'osservazione successiva.

☞ **Osservazione 1.4.11.** Supponiamo che la funzione $f(x)$ che vogliamo sviluppare in serie di Fourier sia $2\pi-$periodica e simmetrica (pari o dispari). In tal caso allora, visto che anche le funzioni trigonometriche seno e coseno sono simmetriche, si semplifica il calcolo dei coefficienti di Fourier. Se $f$ è dispari si ha

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos kt\,dt = 0 \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,\sin kt\,dt
\end{aligned}
$$

Analogamente se $f$ è pari si ha

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,\cos kt\,dt \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin kt\,dt = 0
\end{aligned}
$$

A questo punto l'intuizione geometrica ci dice che al crescere di $n$, la somma parziale $S_n f(x)$ della serie di Fourier approssima sempre meglio la funzione $f$, perché essa viene ricostruita attraverso un numero crescente di componenti ortogonali. Quindi la domanda che ci poniamo è la seguente: è vero che $S_n f \to f$ in qualche senso per $n \to \infty$?

## 1.5. Convergenza della serie di Fourier

### Convergenza della serie di Fourier in norma quadratica

**Teorema 1.5.1.** *Sia $f \in V$ e siano $a_k, b_k$ i suoi coefficienti di Fourier assegnati dalle relazioni* (1.4.3), (1.4.3)*; sia inoltre $S_n f(x)$ l'ennesima somma di Fourier di $f$ data da* (1.4.4). *Allora:*

$$||f - S_n f|| \to 0 \ \text{ se } n \to \infty$$

*cioè, per $n \to \infty$*

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right] \to 0$$

*Inoltre vale l'*IDENTITÀ DI PARSEVAL

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

### Convergenza puntuale della serie di Fourier

Premettiamo la seguente definizione.

❒ **Definizione 1.5.2.** Si dice che $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ è REGOLARE A TRATTI se $f$ è limitata in $[0,T]$ e l'intervallo si può decomporre in un numero finito di intervallini su ciascuno dei quali la funzione è continua e derivabile; inoltre agli estremi di ciascun intervallino esistono finiti i limiti sia di $f(x)$ che di $f'(x)$. Sia $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ limitata; si dice che è MONOTONA A TRATTI se l'intervallo si può decomporre in un numero finito di intervallini su ciascuno dei quali la funzione è crescente o decrescente.

Vale allora il seguente teorema.

**Teorema 1.5.3.** *Sia $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ regolare a tratti (oppure limitata e monotona a tratti); allora la serie di Fourier converge in ogni punto $x_0 \in (0,T)$ alla media dei due limiti destro e sinistro*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega k x_0) + b_k \sin(\omega k x_0)] = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

*con $\omega = \frac{2\pi}{T}$; nei due estremi dell'intervallo invece la serie converge a $\frac{f(0^+)+f(T^-)}{2}$. In particolare: in ogni punto dove $f$ è continua, la serie di Fourier converge a $f(x)$; negli estremi questo è vero solo se $f(0) = f(T)$.*

☞ **Osservazione 1.5.4.** Il risultato appena enunciato può essere raffinato in vari modi indebolendo le ipotesi; tuttavia è utile segnalare che la sola ipotesi di continuità della $f$ (unita magari anche alla condizione di raccordo $f(0) = f(T)$) è insufficiente a garantire la convergenza puntuale della serie di Fourier in tutto l'intervallo.

☞ **Osservazione 1.5.5.** La teoria appena esposta (e i risultati dei complementi) possono essere riformulati in spazi più generali degli spazi $V$ con prodotto scalare: gli *spazi di Hilbert*; inoltre tra i tipi di convergenze della serie di Fourier, ci sono anche altre convergenze che si possono considerare (per esempio la *convergenza uniforme*). Entrambi questi argomenti, benché attinenti, esulano dagli scopi di questo corso.

✎ **Esempio 1.5.6.** *Sviluppare in serie di Fourier la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

*prolungata su $\mathbb{R}$ per periodicità, e discutere la convergenza in norma quadratica, puntuale e totale.*

Calcoliamo i coefficienti di Fourier. Si ha

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\,dx + \int_0^{\pi} dx\right) = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\cos kx\,dx + \int_0^{\pi} \cos kx\,dx\right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\sin kx\,dx + \int_0^{\pi} \sin kx\,dx\right) = \frac{(-1)^k}{k\pi} - \frac{1}{k\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -\dfrac{2}{k\pi} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

La serie di Fourier di $f(x)$ è quindi

$$f(x) = \frac{3}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x$$

C'è convergenza in norma quadratica; c'è convergenza puntuale a $f(x)$ se $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e a $\frac{3}{2}$ nei punti $x = k\pi$. La serie non converge totalmente su $\mathbb{R}$ (perché si comporta come la serie armonica).

Osserviamo che la funzione $g(x) = f(x) - 3/2$ è una funzione dispari, quindi avremmo potuto calcolare la serie di Fourier della funzione $g(x)$ (evitando il calcolo di $a_0$ e $a_n$) per ottenere poi quella di $f$ aggiungendo la costante $3/2$.

☞ **Osservazione 1.5.7.** L'identità di Parseval enunciata nel paragrafo precedente può essere utile per calcolare la somma di alcune serie notevoli, come mostra il seguente esempio.

✎ **Esempio 1.5.8.** *Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = x$ definita su $[-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$; discuterne la convergenza. Determinare inoltre la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

La funzione data è dispari quindi $a_0 = 0$, $a_n = 0$ mentre

$$b_n = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

per cui la serie di Fourier associata a $f$ è

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$

Questa serie converge in norma quadratica a $f(x)$, converge puntualmente a 0 nei punti $(2n+1)\pi$ e a $f(x)$ negli altri punti; non converge totalmente in $\mathbb{R}$.

Per calcolare la somma della serie utilizziamo l'identità di Parseval

$$\int_0^T f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi(a_n^2 + b_n^2)$$

da cui essendo

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^3$$

si ha

$$\frac{2}{3}\pi^3 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'identità di Parseval non è l'unico modo per calcolare le somme di alcune serie notevoli; un altro modo consiste nello sfruttare la convergenza puntuale della serie di Fourier, come mostra il seguente esempio.

✎ **Esempio 1.5.9.** *Si consideri la funzione $f$, $2\pi-$periodica, definita da*

$$f(x) = \frac{x+|x|}{2} \qquad \text{per } -\pi \leq x < \pi.$$

*Scrivere la serie di Fourier associata ad $f$ e discuterne la convergenza e la somma in ogni punto. Dimostrare che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

I coefficienti di Fourier sono

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

e quindi

$$a_0 = \frac{\pi}{2} \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \qquad \forall n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{(-1)^n}{n}.$$

La serie di Fourier converge in media quadratica a $f$ su tutto $(-\pi,\pi)$. Inoltre converge puntualmente a $f$ in $(-\pi,\pi)$ mentre converge puntualmente a $\frac{\pi}{2}$ nei punti $x = \pm\pi$. Utilizzando la convergenza puntuale in $x = 0$ otteniamo

$$0 = f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2}$$

che dimostra l'uguaglianza richiesta.

### 1.5.1. Derivabilità termine a termine della serie di Fourier

Un problema rilevante ad esempio quando si tratta con le equazioni differenziali è quello di saper derivare termine a termine una serie di Fourier. Sia

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty}(a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx))$$

la serie di Fourier associata a $f$; consideriamo la serie delle derivate, cioè

$$\sum_{h=1}^{\infty}(-ha_h \sin(hx) + hb_h \cos(hx));$$

si tratta ancora di una serie trigonometrica avente coefficienti

$$a'_h = hb_h \qquad b'_h = -ha_h$$

e, come si vede facilmente, *questa serie converge più difficilmente di quella di partenza:* infatti i suoi coefficienti sono più grandi in valore assoluto. Quindi la serie di partenza può essere convergente ma eventualmente non derivabile termine a termine (lo sarà ad esempio se i suoi coefficienti tendono a zero così rapidamente che anche $\sum|ha_h|, \sum|hb_h|$ convergono). Questo risultato viene stabilito da un'analisi diretta dei coefficienti della serie. Spesso invece è utile poter stabilire *a priori*, in base alle proprietà di regolarità di $f$, il fatto che la sua serie di Fourier si possa derivare termine a termine. Si ha il seguente risultato.

**Teorema 1.5.10.** (DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE DELLE SERIE DI FOURIER) *Sia $f : [0,T] \to \mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^1[0,T]$ e sia $f'$ regolare a tratti (per esempio $f \in \mathcal{C}^2([0,T])$); inoltre sia $f(0) = f(T)$. Allora la serie di Fourier di $f$ si può derivare termine a termine in $(0,T)$; se inoltre è anche $f'(0) = f'(T)$, la serie di Fourier di $f$ si può derivare termine a termine in tutto $[0,T]$.*

☞ **Osservazione 1.5.11.** *Si noti che le condizioni di raccordo $f(0) = f(T)$ e $f'(0) = f'(T)$, unite all'ipotesi $f \in \mathcal{C}^1([0,T])$ implicano che la periodizzata di $f$ sia $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Infatti in generale se una funzione $f$ regolare in $[0,2\pi]$ viene periodizzata a tutto $\mathbb{R}$, non è detto che la sua periodizzata sia regolare in $\mathbb{R}$.*

Ciò che occorre garantire, per poter affermare l'ultima cosa detta, sono appunto le condizioni di raccordo agli estremi, per $f$ e la sua derivata. Il teorema di derivabilità termine a termine richiede che la periodizzata di $f$ (e non solo $f$!) sia sufficientemente regolare. Grosso modo, per derivare termine a termine la serie di Fourier di $f$, è necessario che $f$ possieda due derivate e che inoltre soddisfi le condizioni di raccordo continuo $f(0) = f(T)$.

### 1.5.2. Velocità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier

Il fatto di poter derivare termine a termine una serie di Fourier ci dà informazioni sull'ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier.
Se $f$ è solo integrabile, sappiamo che $a_n, b_n \to 0$ (Lemma di Riemann-Lebesgue).
Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (e $T-$periodica), allora $f'$ è integrabile in $[0, T]$ quindi la serie di Fourier di $f'$ converge in media quadratica, ma ripercorrendo la dimostrazione del teorema di derivazione termine a termine della serie di Fourier, si può dimostrare che

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(-k\omega a_k \sin k\omega x + k\omega b_k \cos k\omega x)$$

perciò sappiamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) < \infty$$

e in particolare

$$k^2(a_k^2 + b_k^2) \to 0$$

da cui si legge che

$$a_k = o\left(\frac{1}{k}\right) \qquad b_k = o\left(\frac{1}{k}\right) \qquad k \to \infty.$$

L'affermazione fatta si può raffinare: se $f$ è continua in $\mathbb{R}$, $T-$periodica e regolare a tratti, è ancora vero che $f'$ è integrabile in $[0, T]$ e vale ancora il passaggio di integrazione per parti necessario a mostrare che i coefficienti di Fourier di $f'$ sono $k\omega b_k$ e $-k\omega a_k$. Di conseguenza la conclusione che abbiamo dedotto rimane ancora vera. Iterando questo ragionamento, si arriva al seguente.

**Teorema 1.5.12.** (velocità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier) *Sia $f$ una funzione $T-$periodica. Per un certo intero $s \geq 1$ sia $f \in \mathcal{C}^{s-1}(\mathbb{R})$ e $f^{(s-1)}$ sia regolare a tratti in $[0, T]$. Allora*

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^s}\right) \qquad a_k = o\left(\frac{1}{k^s}\right)$$

Questo risultato ci dice che maggiore è la regolarità di $f$ e maggiore sarà la rapidità di convergenza a zero dei suoi coefficienti di Fourier.

## 1.6. Forma esponenziale complessa della serie di Fourier

L'identità di Eulero

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

suggerisce che una serie di Fourier possa esprimersi in forma più compatta utilizzando gli esponenziali complessi $e^{inx}$ anziché le funzioni trigonometriche $\cos nx$ e $\sin nx$. Per fare questo, dobbiamo utilizzare un particolare prodotto scalare, detto PRODOTTO SCALARE HERMITIANO (che soddisfa proprietà analoghe a quelle del prodotto scalare classico e che a lui si riduce nel caso in cui le funzioni siano tutte reali) definito come

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

per ogni $f, g \in V^*$ essendo $V^*$ lo spazio vettoriale delle funzioni $\ell : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ integrabili; ricordiamo che $\overline{g(t)}$ indica il complesso coniugato di $g(t)$.
Ricordando che $\overline{e^{imx}} = e^{-imx}$, si vede che le funzioni esponenziali complesse $e^{inx}$ per $n \in \mathbb{Z}$ soddisfano le relazioni di ortogonalità

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \int_0^{2\pi} \cos(n-m)x\, dx + i \int_0^{2\pi} \sin(n-m)\, dx = \begin{cases} 2\pi & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

con $n, m \in \mathbb{Z}$. Indicando ora con $V_n^*$ (con $n \geq 1$) lo spazio vettoriale che ha per base ortonormale

$$\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$$

vediamo che la proiezione di $f$ su $V_n^*$ è data da

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left\langle f, \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k=-n}^{n} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt \right) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

avendo posto

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

La SERIE DI FOURIER DI $f$ IN FORMA COMPLESSA è perciò

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Pertanto con le notazioni complesse, abbiamo un'unica successione $\hat{f}(k)$ di coefficienti di Fourier di $f$ anziché due successioni $a_k, b_k$. Questa successione in compenso è indicizzata sugli interi relativi invece che sui naturali.

Notiamo anche che i coefficienti di Fourier $\hat{f}(k)$ assumeranno in generale valori complessi anche se la funzione di partenza è reale. In particolare valgono le seguenti relazioni, per $k = 1, 2, 3 \ldots$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \qquad \hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \qquad \hat{f}(0) = \frac{1}{2}a_0$$

e viceversa

$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) \qquad b_k = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)) \qquad a_0 = 2\hat{f}(0).$$

Scriviamo esplicitamente la forma che assumono con notazioni complesse le relazioni notevoli incontrate nei teoremi studiati in precedenza (ricordiamo che ora $n \in \mathbb{Z}$!)

$$||S_n f||^2 = 2\pi \sum_{-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \leq ||f||^2 \qquad \text{disuguaglianza di Bessel}$$

$$||f||^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 \qquad \text{uguaglianza di Parseval}$$

$$\hat{f}(n) \to 0 \qquad \text{per } n \to \pm\infty \qquad \text{Lemma di Riemann-Lebesgue}$$

Inoltre anche per la serie di Fourier in forma esponenziale tutto può essere adattato a un intervallo diverso da $[0, 2\pi]$. Per comodità riportiamo la forma assunta dalle precedenti relazioni per funzioni $T-$periodiche, ovvero definite su $[0, T]$ e periodizzate.

sistema ortonormale adattato a $[0, T]$

$$\frac{e^{i\omega kx}}{\sqrt{T}} \qquad k \in \mathbb{Z}, \;\; \omega = \frac{2\pi}{T}$$

coefficienti di Fourier

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega kt}\, dt \qquad k \in \mathbb{Z}$$

serie di Fourier

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{i\omega kx}$$

uguaglianza di Parseval

$$||f||^2 = T \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

## 1.7. Complementi: richiami sugli spazi vettoriali con prodotto scalare

Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita o infinita. Diciamo che su $V$ è definito un PRODOTTO SCALARE se esiste un'operazione che indicheremo con il simbolo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ che prende due elementi di $V$ e vi associa uno scalare con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&\langle u,v\rangle = \langle u,v\rangle\\
&\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle\\
&\langle \lambda\, u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle \qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}\\
&\langle u,v\rangle \geq\ 0\\
&\langle u,u\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ u=0.
\end{aligned}$$

Se poniamo per ogni $u\in V$

$$||u|| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

si dimostra che $||\cdot||$ risulta essere una norma, cioè un'operazione definita su $V$ a valori in $\mathbb{R}$ che ha le seguenti proprietà, valide per ogni $u,v\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&||u||\geq 0,\ ||u||=0 \ \Leftrightarrow\ u=0\\
&||\lambda\, u|| = |\lambda|||u||\\
&||u+v|| \leq\ ||u|| + ||v||
\end{aligned}$$

✎ **Esempio 1.7.1.** *L'esempio tipico è di spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare definito da*

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i \qquad \mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots u_n),\ \ \mathbf{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$$

*e la norma che induce è il modulo del vettore*

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} = |\mathbf{u}|$$

Vale la seguente proposizione.

**Proposizione 1.7.2.** *Se $V_0$ è un sottospazio vettoriale di dimensione finita di $V$, allora $V_0$ possiede sempre una* BASE ORTONORMALE, *cioè una base $e_1,e_2,\dots,e_n$ tale che i vettori siano a due a due ortogonali e ciascuno di norma unitaria. In simboli si scrive*

$$\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & i=j\\ 0 & 0\neq j\end{cases}$$

*($\delta_{ij}$ è il* SIMBOLO DI KRONECKER*)*

Ora supponiamo di avere un sottospazio $V_0 \subset V$ e di avere un elemento $u \in V$; vogliamo trovare l'elemento $u_0 \in V_0$ che meglio approssima $u$ (in norma). È abbastanza intuitivo che l'elemento richiesto sia la proiezione ortogonale di $u$ su $V_0$, cioè formalmente vale la seguente proposizione.

**Proposizione 1.7.3.** (PROIEZIONE) *Sia $V_0$ un sottospazio di dimensione finita di $V$ e sia $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di $V_0$. Allora la* PROIEZIONE DI $u$ SU $V_0$ *è il vettore*

$$u_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i$$

*che ha le seguenti proprietà:*
*(1) $u - u_0$ è ortogonale a ogni elemento di $V_0$;*
*(2) $||u_0||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle u, e_i \rangle|^2 \leq ||u||^2$*
*(3) $u_0$ è l'elemento che rende minima la quantità $||u - v||$ al variare di $v \in V_0$.*

# CAPITOLO 2

# Esercizi riguardanti serie di Fourier

## 2.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 2.1.1.**

Verificare che se una funzione $f(x)$ è periodica di periodo $T$, allora la funzione $f(\alpha x)$ è periodica di periodo $T/\alpha$.

➻ **R.** Per ipotesi $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x$ nel dominio di $f$. Posto $g(x) = f(\alpha x)$ si ha

$$g\left(x + \frac{T}{\alpha}\right) = f\left(\alpha\left(x + \frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x + T) = f(\alpha x) = g(x)$$

✍ **Esercizio 2.1.2.**

Determinare il periodo delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin(3x) \\ f_2(x) &= \cos(x/4) \\ f_3(x) &= 1 + \sin(x) + \sin(2x) \\ f_4(x) &= |\sin(x)| \\ f_5(x) &= \sin^2(x) \end{aligned}$$

➻ **R.** 1) $2\pi/3$

2) $8\pi$

3) Il periodo di $f_3$ è il minimo comune multiplo tra i periodi delle funzioni quindi uguale a $2\pi$

4) Il periodo di $f_4$ è $T = \pi$: infatti $|\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$ e non esistono numeri reali positivi minori di $\pi$ che soddisfano questa proprietà.
5) Essendo

$$f_5(x) = \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

il periodo di $f_5$ è $\pi$.

✍ **Esercizio 2.1.3.**

Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = 4 - 2\sin x + 3\cos(3x)$$

Si nota che $f$ è un polinomio trigonometrico, quindi confrontando

$$4 - 2\sin x + 3\cos(3x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

si ottiene

$$a_n = \begin{cases} 8 & n = 0 \\ 3 & n = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$b_n = \begin{cases} -2 & n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovviamente in questo caso non si pongono problemi di convergenza della serie di Fourier.

✍ **Esercizio 2.1.4.**

Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = \sin^3 x + \sin^2 x$$

Usando le formule di duplicazione si ottiene

$$f(x) = \sin^3 x + \sin^2 x = \sin x \sin^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

quindi $f$ si riduce a un polinomio trigonometrico, quindi confrontando

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 3x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

si ottiene

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1/2 & n = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$b_n = \begin{cases} 3/4 & n = 1 \\ -1/4 & n = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovviamente anche in questo caso non si pongono problemi di convergenza della serie di Fourier.

✍ **Esercizio 2.1.5.**

(variazioni dell'onda quadra) Determinare i coefficienti di Fourier della funzione, per $A > 0$

$$f(x) = \begin{cases} A & x \in [0, \pi) \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata a una funzione $2\pi-$periodica su $\mathbb{R}$

primo modo: con il calcolo diretto:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A\, dt = A$$

Si ha poi, per $k = 1, 2, 3 \dots$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A \cos(kt)\, dt + 0 = \frac{A}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt)\, dt = \frac{A}{\pi} \left[ \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} = 0$$

e invece

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A \sin(kt)\, dt = \frac{A}{\pi} \left[ -\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{A}{\pi k}((-1)^k + 1).$$

A questo punto si osserva che se $k$ è pari, $b_k = 0$; se $k$ è dispari (cioè se $k = 2n + 1$) allora $(-1)^k + 1 = 2$ pertanto la serie di Fourier della funzione $f$ diventa

$$\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} \sin((2n + 1)x).$$

secondo modo: si sa che la serie di Fourier dell'onda quadra

$$q(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

è

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x)$$

quindi visto che $f(x) = Aq(x)$, ragionando per linearità rispetto all'onda quadra si ottiene direttamente

$$\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x).$$

✍ **Esercizio 2.1.6.**

(variazioni dell'onda quadra) Determinare i coefficienti di Fourier della funzione, per $A > 0$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \pi) \\ -A & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata a una funzione $2\pi-$periodica su $\mathbb{R}$

Si ha che $g(x) = f(x) - A$, dove $f(x)$ è la funzione dell'esercizio 1.1. Pertanto, ragionando di nuovo per linearità, si ha che la serie di Fourier della funzione $g$ è la differenza tra la serie di Fourier della funzione dell'esercizio precedente e la serie di Fourier della funzione costante $A$. Ora, la funzione costante $c(x) = A$ è in particolare un polinomio trigonometrico di ordine zero, per cui la sua serie di Fourier coincide con se stessa (e quindi i suoi coefficienti sono tutti nulli tranne $a_0 = 2A$). Concludendo la serie di Fourier di $g(x)$ è

$$-\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x)$$

Si verifichi per esercizio che si ottiene lo stesso risultato con calcoli diretti.

✍ **Esercizio 2.1.7.**

(variazioni dell'onda quadra) Determinare i coefficienti di Fourier della funzione, per $A > 0$

$$h(x) = \begin{cases} A & x \in [0, \pi) \\ -A & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata a una funzione $2\pi-$periodica su $\mathbb{R}$. Discutere la convergenza della serie di Fourier.

La funzione $h(x)$ è la somma delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ degli esercizi precedenti, pertanto, ragionando di nuovo per linearità, la serie di Fourier associata ad $h$ è la somma della serie di Fourier associata a $f$ e della serie di Fourier associata a $g$, cioè

$$\frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin((2n+1)x)$$

La funzione data è regolare a tratti, dunque la serie di Fourier ottenuta converge a $f(x)$ per $x \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ mentre converge a 0 per $x = 0, \pi, 2\pi$.

✍ **Esercizio 2.1.8.**

Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [-1,1)$$

prolungata a una funzione 2-periodica su $\mathbb{R}$

Le uniche osservazioni da fare sono che $f$ è pari, dunque $b_n = 0$ e che il periodo non è $2\pi$ ma $T = 2$. Quindi usando le formule

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,\cos(\pi n x)\,dx$$

si ottiene

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

mentre integrando due volte per parti

$$a_n = \frac{4\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} = (-1)^n\frac{4}{\pi^2 n^2}$$

Dunque la serie di Fourier associata alla funzione è

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n x).$$

✍ **Esercizio 2.1.9.**

Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = |x|$ definita su $[-\pi,\pi]$ e prolungata a una funzione $2\pi$-periodica su $\mathbb{R}$. Discutere la convergenza della serie di Fourier e utilizzare i risultati ottenuti per verificare che

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

La funzione è pari per cui $b_n = 0$ mentre $a_0 = \pi$ e

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

per cui la serie di Fourier è

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$$

C'è convergenza totale - teorema del confronto con la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

c'è convergenza puntuale in ogni punto e c'è anche convergenza in norma quadratica. Per il calcolo della somma richiesta, è sufficiente calcolare lo sviluppo di Fourier in $x = 0$.

✍ **Esercizio 2.1.10.**

Scrivere la serie di Fourier della funzione $f(x)$, periodica di periodo $\pi$, definita da $f(x) = |\sin x|$ per $x \in [0, \pi]$ e discuterne la convergenza.

La funzione $f(x)$ (onda raddrizzata) è pari per cui $b_n = 0$. Inoltre essa può essere vista come una funzione di periodo $\pi$ oppure di periodo $2\pi$. Nel primo caso dobbiamo considerare le apposte formule per il calcolo dei coefficienti, mentre se la consideriamo periodica di periodo $2\pi$ possiamo usare le solite formule e ottenere

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \qquad a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \dfrac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

per cui si ha

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos(2nx)$$

C'è convergenza totale su $\mathbb{R}$ e quindi anche convergenza puntuale; inoltre c'è convergenza in norma quadratica.

✍ **Esercizio 2.1.11.**

Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni la funzione $f(x) = \sin x$ definita su $[0, \pi]$ e prolungata a una funzione $2\pi$-periodica su $\mathbb{R}$. Discuterne la convergenza.

Basta estendere la funzione per parità ottenendo la funzione $g(x) = |\sin x|$. Dall'esercizio precedente si ha

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx)$$

C'è convergenza totale su $\mathbb{R}$ e quindi anche convergenza puntuale e in norma quadratica.

✍ **Esercizio 2.1.12.**

Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

definita su $[-\pi, \pi]$ e prolungata a una funzione $2\pi$-periodica su $\mathbb{R}$. Discuterne la convergenza.

➼ **R.** Si ha

$$g(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx)$$

Anche in questo caso c'è convergenza totale su $\mathbb{R}$ e quindi anche convergenza puntuale; c'è inoltre convergenza in norma quadratica. Si può anche ricavare da esercizi precedenti osservando che

$$g(x) = \frac{|\sin x| + \sin x}{2}.$$

✍ **Esercizio 2.1.13.**

Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, \pi] \\ 1 & x \in (\pi, 2\pi), \end{cases}$$

estesa periodicamente a $\mathbb{R}$. Discutere inoltre la sua convergenza puntuale e scrivere la serie numerica associata alla convergenza puntuale in $x = \pi/2$

➼ **R.** Notiamo che

$$f(x) = 2 + g(x)$$

dove $g$ è un'onda quadra di coefficiente $A = 1$, cioè

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi] \\ -1 & x \in (\pi, 2\pi), \end{cases}$$

Dunque la serie di Fourier associata è

$$f \sim 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

La serie converge puntualmente per ogni $x \in [0, 2\pi)$ a

$$\begin{cases} 3 & x \in (0, \pi) \\ 1 & x \in (\pi, 2\pi) \\ 2 & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$$

in effetti

$$2 = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{3+1}{2}$$

e lo stesso in $\pi$ e $2\pi$.
Per $x = \pi/2$ allora la serie converge a $f(\pi/2) = 3$. Dunque si ha

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})}{2k+1} = 1$$

ma

$$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k$$

da cui si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

## 2.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 2.2.1.**

Sviluppare in serie di Fourier delle funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^4$ definite su $[-\pi, \pi]$ e prolungate a funzioni $2\pi$-periodiche su $\mathbb{R}$. Discuterne la convergenza. Quanto valgono le somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}?$$

➡ **R.**

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos(kx)$$

$$g(x) = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4}{k^2} - \frac{48}{k^4} \right) \cos(kx)$$

C'è convergenza totale, quindi puntuale; c'è anche convergenza in norma quadratica.
Si ha inoltre

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

D'altra parte

$$g(\pi) = \frac{\pi^4}{5} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 48 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{48} \left( \frac{4}{5}\pi^4 - \frac{2}{3}\pi^2 \right) = \frac{1}{60}\pi^4 - \frac{1}{72}\pi^2$$

✍ **Esercizio 2.2.2.**

Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = x$ definita su $[0, 2\pi)$ e prolungata a una funzione $2\pi$-periodica su $\mathbb{R}$. Discuterne la convergenza.

➡ **R.**

$$\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin(kx)$$

Converge a $f(x) = x$ per $x \in (0, 2\pi)$ mentre converge a $\pi$ per $x = 0$, $x = 2\pi$.

✍ **Esercizio 2.2.3.**

Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [-1, 1)$$

prolungata a una funzione 2-periodica su $\mathbb{R}$

➼ **R.** Si nota che $f$ è pari, quindi $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché il periodo è $T = 2$ e non $2\pi$, usiamo le formule

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\,dx = \int_{-1}^1 x^2\cos(\pi n x)\,dx$$

quindi

$$a_0 = \int_{-1}^1 x^2 = \frac{2}{3}$$

e

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^1 x^2\cos(\pi n x)\,dx = 2\left[x^2\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 - \frac{4}{\pi n}\int_0^1 x\sin(\pi n x)\,dx \\
&= -\frac{4}{\pi n}\left[x\frac{-\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_0^1 - \frac{4}{\pi^2 n^2}\int_0^1 \cos(\pi n x)\,dx = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}
\end{aligned}$$

dunque

$$f \sim \frac{1}{3} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n x)$$

c'è convergenza totale e perciò puntuale; c'è anche convergenza in media quadratica.

✍ **Esercizio 2.2.4.**

Determinare i coefficienti di Fourier della funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad x \in [0, 2\pi)$$

prolungata per periodicità (di periodo $2\pi$) ad $\mathbb{R}$. Dedurre la somma della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$$

➼ **R.** Poiché la funzione è dispari, si ha $a_n = 0$ per ogni $n$. Invece si ha

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) + \sin\left(nx - \frac{\pi}{2}\right)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \frac{2}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\right]_0^{\pi}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n-1}\right] = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}
\end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier associata a $f$ risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \sin(nx).$$

Applicando l'identità di Parseval si ottiene

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\, dx = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$$

Essendo

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{2}\, dx = \pi$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}$$

✍ **Esercizio 2.2.5.**

Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = |x| - \pi \qquad |x| \leq \pi$$

estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$

➼ **R.** Poiché $f$ è pari, $b_n = 0$ per ogni $n$. Invece

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|x|-\pi)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x-\pi)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(x-\pi)^2}{2}\right]_0^{\pi} = -\pi$$

se $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|x|-\pi)\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x-\pi)\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[(x-\pi)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &\quad -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\, dx = -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(\pi n)-1) \end{aligned}$$

da cui

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{4}{n\pi^2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque la serie di Fourier di $f$ è

$$-\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos((2k+1)x) = -\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)$$

C'è convergenza totale quindi convergenza puntuale; inoltre c'è convergenza in media quadratica.

✍ **Esercizio 2.2.6.**

Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = e^x \qquad x \in [-\pi, \pi)$$

estesa con periodicità a tutto $\mathbb{R}$.

➼ **R.** Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2}{\pi}\sinh\pi$$

e per $n \geq 1$ si ha

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(nx)\,dx.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_{pi}^{\pi} e^x\cos(nx)\,dx &= [e^x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} e^x\sin(nx)\,dx \\ &= [e^x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n[e^x\sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} - n^2\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(nx)\,dx\end{aligned}$$

da cui

$$(n^2+1)\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(nx)\,dx = [e^x\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} = e^\pi\cos(n\pi) - e^{-\pi}\cos(-n\pi) = 2(-1)^n\sinh\pi$$

e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos(nx)\,dx = \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+1)}\sinh\pi$$

Similmente

$$b_n = \frac{-2(-1)^n n\sinh\pi}{\pi(n^2+1)}$$

✍ **Esercizio 2.2.7.**

Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = (\cos x)^+ \qquad x \in [\pi, \pi)$$

prolungata a una funzione $2\pi-$periodica su $\mathbb{R}$

➼ **R.** Siccome $f$ è pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. D'altra parte si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x)^+\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}$$

inoltre

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x)^+ \cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}$$

e per $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x)^+\cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cos(nx)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x]\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right) + \frac{1}{n-1}\sin\left(\frac{n-1}{2}\pi\right)\right]
\end{aligned}$$

Quindi se $n$ è dispari, si ha $a_n = 0$ mentre se $n = 2k$ è pari si ha

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right) = (-1)^k \qquad \text{e} \qquad \sin\left(\frac{n-1}{2}\pi\right) = -(-1)^k$$

per cui

$$a_n = a_{2k} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2k+1}(-1)^k - \frac{1}{2k-1}(-1)^k\right] = -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}$$

quindi la serie di Fourier associata è

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos(2kx)$$

✍ **Esercizio 2.2.8.**

Sia la funzione $2\pi-$periodica definita da

$$f(x) = \sin(5x^2) \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

dire se è vero che $f$ converge in media quadratica e se è vero che $b_n = 0$ per ogni $n$

➼ **R.** Entrambe le affermazioni sono vere, la prima perché $f$ è di quadrato sommabile e la seconda perché $f$ è pari

✍ **Esercizio 2.2.9.**

Data

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \dfrac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

si consideri la sua estensione $2\pi-$periodica a $\mathbb{R}$. Dire se la sua serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ su $[-\pi, \pi]$. Si calcoli $b_3$ e $a_1$.

➻ **R.** La prima affermazione è falsa, infatti la serie converge alla funzione $2\pi-$periodica

$$g(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \dfrac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \\ \dfrac{1}{2} & x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

D'altra parte $f$ è pari, quindi $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; infine

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx + \frac{2}{\pi}[\sin x]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 2.2.10.**

Data

$$f(x) = \begin{cases} -x\pi & -\pi \leq x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

si consideri la sua estensione $2\pi-$periodica a $\mathbb{R}$. Dire se la sua serie di Fourier converge a zero per $x = 31\pi$. Inoltre calcolare $a_0$.

➻ **R.** La prima affermazione è falsa: infatti per periodicità $f(31\pi) = f(\pi) = \pi^2$. Inoltre

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x\pi)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{5}{6}\pi^2 \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 2.2.11.**

Si consideri la funzione $f(x)$ dispari, $2\pi-$periodica, definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(1) Disegnare il grafico di $f$ sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$

(2) Determinare la serie di Fourier associata a $f$

(3) Studiare la convergenza puntuale e in media quadratica della serie trovata

(4) Scrivere l'identità di Parseval relativa alla serie trovata e dedurne il valore di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

➼ **R.** Hint: Serie di soli seni:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx = \frac{1}{n}$$

e la serie di Fourier associata a $f$ è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Dato che $f$ è di quadrato sommabile, si ha convergenza in norma quadratica; inoltre si ha convergenza puntuale a $f$, anche nel punto di discontinuità $x = 0$. Infine si ha

$$2\int_0^{\pi} f(x)^2 \, dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

✍ **Esercizio 2.2.12.**

Si consideri la funzione dispari, $2\pi-$periodica e definita nell'intervallo $(0, \pi)$ da

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \qquad 0 < x < \pi$$

Dopo aver disegnato il grafico di $f$ nell'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$, determinare la serie di Fourier associata a $f$ e studiarne la convergenza.

➼ **R.** Hint: serie di soli seni. Si trova

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(nx) \, dx = \frac{1}{n}$$

quindi la sua serie di Fourier è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Poiché $f$ è di quadrato sommabile, si ha convergenza in media quadratica a $f$. Siccome $f$ è monotona a tratti, la sua serie converge puntualmente a $f(x)$ per $x \neq k\pi$ e converge a 0 per $x = k\pi$.

✍ **Esercizio 2.2.13.**

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 - x^2 & x \in [-\pi, \pi) \\ 2\pi\text{−periodica} & \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di $f$ sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$
b) Determinare la serie di Fourier associata a $f$ e stabilirne il limite puntuale
c) Usando il risultato ottenuto al punto b), calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

**R.** b) La funzione è pari, quindi $b_n = 0$ per ogni $n$. Inoltre:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi^2 \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(nx)\, dx = (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2} \qquad n \geq 1$$

quindi

$$f(x) \sim \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx)$$

La funzione $f$ è continua e monotona a tratti. Quindi la serie di Fourier trovata converge puntualmente a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
c) In $x = 0$ la serie di Fourier converge a $f(0)$, pertanto

$$\pi^2 = f(0) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

✍ **Esercizio 2.2.14.**

Data la funzione periodica di periodo $2\pi$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} -2x & -\pi \leq x \leq 0, \\ \sqrt[3]{x} & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

a) disegnarne il grafico in $[-2\pi, 3\pi]$ e scrivere l'espressione dei coefficienti (senza calcolarli) e della serie di Fourier associata ad $f$;
b) dire se è possibile garantire in $\mathbb{R}$ la convergenza puntuale della serie e precisare se la somma della serie coincide con la funzione $f$;
c) stabilire se la funzione data è sviluppabile in serie di Mac Laurin.

a) Si ha

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-2\pi}^{0} -2x\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt[3]{x}\cos(nx)\,dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -2x\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt[3]{x}\sin(nx)\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

da cui

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\,dx$$

b) $f$ è continua a tratti in $\mathbb{R}$ e monotona a tratti, quindi la sua serie di Fourier converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $s = s(x)$ definita da

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\} \\ \dfrac{2\pi + \sqrt[3]{\pi}}{2} & x = \pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

c) $f$ non è sviluppabile in serie di Mac Laurin non essendo derivabile in $x = 0$

✍ **Esercizio 2.2.15.**

Data la funzione periodica di periodo 2, pari, definita da

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3} \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

a) disegnarne il grafico in $[-2, 3]$ e scrivere l'espressione dei coefficienti (senza calcolarli) e della serie di Fourier associata ad $f$;
b) dire se è possibile garantire in $\mathbb{R}$ la convergenza puntuale della serie e precisare se la somma della serie coincide con la funzione $f$;
c) calcolare $a_0$ e il valore di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

a) $f$ è pari, quindi $b_n = 0$ per ogni $n$. Inoltre

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(\pi nx)\,dx = 2\int_0^1 \sqrt[4]{x^3}\cos(\pi nx)\,dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

pertanto

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\pi nx)$$

b) $f$ è 2-periodica, continua e monotona a tratti, dunque la serie di Fourier di $f$ converge puntualmente a $f$ in $\mathbb{R}$

c) Si ha

$$a_0 = 2\int_0^1 \sqrt[4]{x^3}\,dx = 2\int_0^1 x^{3/4}\,dx = 2\left[x^{7/4}\frac{4}{7}\right]_0^1 = \frac{8}{7}$$

inoltre

$$f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{a_0}{2} = -\frac{4}{7}$$