Derivate

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \sqrt{1 + e^{-\sqrt{x}}}$ $\quad \left(R.\ f'(x) = -\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x(1+e^{-\sqrt{x}})}} \right)$

2) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $\quad \left(R. f'(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{\sin x}{|\sin x|} \right)$

3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - \log \tan \dfrac{x}{2}$ $\quad \left(R. f'(x) = \dfrac{-2}{\sin^3 x} \right)$

4) $f(x) = (\sin x)^x$ $\quad$ (R. $f'(x) = (\sin x)^x [\log(\sin x) + \dfrac{x \cos x}{\sin x}]$)

5) $f(x) = x^{x \log x}$ $\quad \left(R. f'(x) = x^{x \log x} (\log^2 x + 2 \log x) \right)$

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \cos(\log x)$ ne punto di ascissa $x = e^{\frac{\pi}{2}}$. (R. $y = -e^{-\frac{\pi}{2}}(x - e^{\frac{\pi}{2}})$)

3. Sia $f(x) = x^2$ se $x \leq 1$, $f(x) = ax + b$ se $x > 1$. Determinare a e b in modo che f sia continua e derivabile per ogni x. Tracciare il grafico. (R. $a = 2, b = -1$)

4. Data la funzione $f(x) = x + 1$ se $|x| \leq 1$, $f(x) = x^2 - 1$ se $|x| > 1$. Tracciare il grafico e determinare l'insieme T di definizione, l'insieme C di continuità, l'insieme D di derivabilità. (R. $T = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$)

5. Stabilire se la funzione $f(x) = x|x-1|$ è derivabile in $x = 1$. (R. no, $x = 0$ è un punto angoloso)

6. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, dove esistono. Studiare i punti di non derivabilità stabilendo se si tratta di punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale. Tracciare il grafico locale in un intorno dei punti di non derivabilità.

1) $f(x) = |x^2 + 3x - 4|$ $\quad$ (R. $x = -4$ e $x = 1$ sono punti angolosi)

2) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + x - 1}$ $\quad$ (R. $x = -1$ e $x = \dfrac{1}{2}$ sono punti a tangente verticale)

3) $f(x) = \log^2(1 + \sqrt[3]{x})$ $\quad$ (R. $x = 0$ è una cuspide)

4) $f(x) = e^x \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}$ $\quad$ (R. $x = -2$ è un punto a tangente verticale)

5) $f(x) = \arcsin(\sqrt[3]{x+1})$ $\quad$ (R. $x = -2, -1, 0$ sono punti a tangente verticale)

7. Sia $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x > 0$, $f(x) = x^2$ se $x \leq 0$. Calcolare $f'(0)$ in base alla definizione. Calcolare poi $f'(x)$ per $x \neq 0$ e stabilire se la derivata è continua in $x = 0$. (R. $f'(0) = 0$, f' è continua in $x = 0$)

8. Sia $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Calcolare $f'(0)$ in base alla definizione. Calcolare poi $f'(x)$ per $x \neq 0$ e stabilire se la derivata è continua in $x = 0$. (R. $f'(0) = 0$, f' non è continua in $x = 0$)

9. Sia $f(x) = \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Calcolare $f'(0)$. (R. $f'(0) = -1$)

10. Sia $f(x) = xe^{-x^2}$, stabilire se f è invertibile in un intorno di $x = 1$. In caso affermativo calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $\dfrac{1}{e}$. (R. $(f^{-1})'(\dfrac{1}{e}) = -e$)