Michela Eleuteri

ANALISI MATEMATICA

Serie numeriche (teoria ed esercizi)

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Serie

1.1. Definizione di serie e prime proprietà

❒ **Definizione 1.1.1.** Data una successione $\{a_n\}_n$ di numeri reali, si chiama SERIE ASSOCIATA AD $\{a_n\}_n$, O SERIE DI TERMINE GENERALE a_n, la quantità

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Gli elementi a_n si chiamano TERMINI DELLA SERIE. La successione

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

si dice SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI.
Diremo che la serie è CONVERGENTE se la successione delle somme parziali è convergente, mentre diremo che la serie è DIVERGENTE POSITIVAMENTE ⟦NEGATIVAMENTE ⟧ se la successione delle somme parziali ha limite uguale a $+\infty$ ⟦$-\infty$ ⟧. Infine diremo che la serie è IRREGOLARE o INDETERMINATA se la successione delle somme parziali non ha limite.
Diremo inoltre che due serie $\sum\limits_n a_n$ e $\sum\limits_n b_n$ hanno lo stesso carattere se sono entrambe convergenti, entrambe divergenti o entrambe irregolari.

In particolare, se $\{s_n\}_n$ è convergente e $s_n \to s$ si ha

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Quindi obiettivo di questo capitolo non è tanto calcolare esattamente il valore di una serie (evento piuttosto raro) ma piuttosto studiarne il carattere, cioè stabilire se essa è convergente, divergente o irregolare. L'idea è quella di confrontare serie più complicate con serie-campione più semplici a cui faremo riferimento.

☞ **Osservazione 1.1.2.** Le serie sono solo un linguaggio diverso per trattare le successioni: infatti, per ogni successione $\{a_n\}_n$ possiamo considerare la sua serie, e viceversa, data una qualunque successione $\{s_n\}_n$, questa può essere vista come la serie associata ad una successione $\{a_n\}_n$, visto che ponendo

$$a_0 = s_0, \qquad a_n = s_n - s_{n-1} \qquad n \geq 1,$$

si ha $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Conformemente a quanto convenuto per le successioni, se $\{a_n\}_n$ è definita solo per $n \geq n_0$, anche la successione delle somme parziali sarà definita solo per $n \geq n_0$ come

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

e la serie sarà

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k.$$

✎ **Esempio 1.1.3.** *Sia $q \in \mathbb{R}$, e sia $a_n = q^n$. La serie associata a questa successione si chiama* SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE q. *Si verifica facilmente che*

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{se } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} q \geq 1 & \Rightarrow \text{ diverge a } +\infty \\ |q| < 1 & \Rightarrow \text{ converge a } \dfrac{1}{1-q} \\ q \leq -1 & \Rightarrow \text{ è irregolare.} \end{cases}$$

✎ **Esempio 1.1.4.** *Consideriamo la seguente serie (detta* SERIE DI MENGOLI*)*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots$$

associata alla successione

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad (n \geq 0);$$

visto che $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$, *si trova facilmente per induzione che*

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = 1 - \frac{1}{n+2},$$

da cui segue che la serie è convergente ed ha per somma 1.

Come già accenntato, il fatto di poter calcolare esplicitamente la somma di una serie assegnata è un evento piuttosto raro. Oltre alla serie geometrica e alla serie di Mengoli un altro esempio è dato da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

che è interessante perché ci dice che la somma di infiniti numeri razionali non è razionale. Tuttavia nella maggior parte dei casi ci si accontenta di stabilire se la serie in questione risulta convergente, divergente oppure indeterminata.
Un primo strumento utile per studiare la convergenza della serie è rappresentato dal seguente teorema, che fornisce una condizione necessaria affinché una serie risulti convergente.

Teorema 1.1.5. *Se* $\sum_n a_n$ *è una serie convergente, allora il termine generale* a_n *risulta infinitesimo.*

Indichiamo con $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la successione delle somme parziali e con $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ la somma della serie. Essendo

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

☞ **Osservazione 1.1.6.** In generale, avere il termine generale infinitesimo, non è una condizione sufficiente a garantire la convergenza della serie; controesempio LA SERIE ARMONICA $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ che, si vedrà più avanti, diverge, pur avendo il termine generale infinitesimo.

Teorema 1.1.7. (criterio di convergenza di Cauchy) *Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie a termini reali* $\sum_n a_n$ *è che per ogni* $\varepsilon > 0$ *esista* $\bar{n} \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $n \geq \bar{n}$

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}^+.$$

Si basa sul corrispondente criterio di convergenza di Cauchy per le successioni, tenendo conto che la successione delle somme parziali s_n è essa stessa una successione.
criterio di convergenza di Cauchy per le successioni: sia data una successione a_n, allora:

$$a_n \text{ converge } \;\Leftrightarrow a_n \text{ è di Cauchy } \;\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n} : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

✎ **Esempio 1.1.8.** *Si consideri la serie, detta* armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Sommiamo i suoi termini di indice n *compreso tra due successive potenze di 2:* $2^{k-1} < n \leq 2^k (k \geq 1)$*. Poiché l'ultimo termine è più piccolo degli altri, e il numero dei termini è* $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$*, si ha:*

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k} > \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

Potendosi prendere k *arbitrariamente grande, questa serie non soddisfa la condizione del teorema precedente (il criterio di convergenza di Cauchy), perciò non converge. Come si può facilmente vedere (e come mostreremo nell'Esempio seguente e nell'esempio 1.2.10), essa diverge a* $+\infty$*.*

✎ **Esempio 1.1.9.** *Dimostriamo che la serie armonica diverge. Ricordiamo che* $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *è una successione crescente convergente a* e*. Si ha dunque*

$$e \geq a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

essendo il logaritmo una funzione crescente allora

$$1 = \log e \geq \log a_n = n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \log(n+1) - \log n.$$

Sommando su n*, a destra i termini si elidono due a due, e si ottiene*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1)$$

da cui passando al limite si ha che la serie armonica è maggiorata da una quantità che tende a ∞ per $n \to \infty$ quindi diverge.

☞ **Osservazione 1.1.10.** Consideriamo due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ che soddisfino a questa condizione: esista un intero (relativo) k e un intero naturale $\bar{n}$ tali che si abbia, per ogni $n > \bar{n}$, $a_n = b_{n+k}$. In altre parole, da un certo punto in poi, la prima serie ha il termine generale uguale al termine che nell'altra serie si trova spostato di k posti (con k intero fisso). Si riconosce che la relazione che così si stabilisce fra le due serie gode delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva. Ad esempio, stanno fra loro in questa relazione una serie qualunque e una che si ottiene da essa sopprimendo un numero finito di termini e lasciando gli altri nello stesso ordine.
Si riconosce allora facilmente che le due serie hanno lo stesso carattere, cioè sono entrambe convergenti, o entrambe divergenti a $+\infty$ (o $-\infty$), o entrambe indeterminate. Infatti, posto $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $s'_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$, per $n \geq \bar{n}$ la differenza $s_n - s'_{n+k}$ si mantiene costante; basta verificare che

$$s_{n+1} - s'_{n+1+k} = s_n + a_{n+1} - s'_{n+k} - b_{n+k+1} = s_n - s'_{n+k}.$$

Dunque le successioni $n \mapsto s_n$ e $n \mapsto s'_{n+k}$ hanno lo stesso comportamento al limite; anche le successioni $n \mapsto s_n$ ed $n \mapsto s'_n$ hanno lo stesso comportamento al limite.

Talvolta può risultare utile il seguente risultato.

Teorema 1.1.11. *Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sia una serie convergente. Allora per ogni n risulta convergente anche la serie*

$$R_n = \sum_{k=n} a_k$$

Inoltre $R_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Questo risultato si esprime dicendo che la coda (o il resto) di una serie convergente è infinitesima.

1.2. Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

☞ **Osservazione 1.2.1.** Nelle serie a termini non negativi, le somme parziali sono una successione monotona debolmente crescente; infatti se $a_n \geq 0$ per ogni n si ha

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n.$$

Dai teoremi di esistenza del limite per successioni monotone, si ottiene il seguente risultato

Teorema 1.2.2. *Una serie a termini non negativi o converge o diverge a $+\infty$ (essa converge se e solo se la successione delle somme parziali n-esime è limitata). Il valore della serie coincide con l'estremo superiore della successione delle somme parziali.*

☞ **Osservazione 1.2.3.** Quanto verrà detto per le serie con termini non negativi vale anche, con le opportune modifiche, per le serie con termini non positivi, e più in generale per le serie i cui termini sono definitivamente non negativi oppure definitivamente non positivi.

Proposizione 1.2.4. (CRITERIO DEL CONFRONTO) *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni di numeri reali non negativi tali che definitivamente (cioè $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$) $a_n \leq b_n$ (in questo caso si dice che la serie b_n è maggiorante della serie a_n). Allora se $\sum_n b_n$ è convergente, si ha che $\sum_n a_n$ è convergente; se $\sum_n a_n$ è divergente, si ha che $\sum_n b_n$ è divergente.*

Siano s_n e s_n^* definite da

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad s_n^* = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Poiché $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni k, sommando membro a membro le disuguaglianze per $k = 1, \ldots, n$ si ottiene $0 \leq s_n \leq s_n^*$. A questo punto le due affermazioni sono logicamente equivalenti, per cui basta dimostrarne una sola e l'altra si ricava di conseguenza. Dimostriamo dunque la seconda affermazione: se $\sum_n a_n = +\infty$ allora $s_n \to +\infty$ e quindi dal criterio del confronto per successioni anche $s_n^* \to +\infty$ e dunque $\sum_n b_n = +\infty$.

Molto spesso il criterio del confronto viene applicato in una forma leggermente diversa, tramite il seguente risultato.

Proposizione 1.2.5. (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO) *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni di numeri reali positivi, tali che*

$$a_n \sim b_n$$

allora le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere, nel senso che sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.

Se $a_n \sim b_n$ allora $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ per $n \to \infty$. Quindi significa che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{n}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$

$$1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon;$$

per esempio possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{1}{2}$, quindi si ha che definitivamente

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2};$$

essendo $b_n > 0$ per ipotesi, questo equivale ad avere definitivamente (cioè $\exists \bar{n}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$)

$$\frac{1}{2}b_n < a_n < \frac{3}{2}b_n.$$

Il risultato a questo punto segue dal teorema del confronto.

✎ **Esempio 1.2.6.** *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5}{n^3+2}$$

diverge perché

$$\frac{3n^2+5}{n^3+2} \sim \frac{3}{n}$$

e quindi la serie data, dal criterio del confronto asintotico, si comporta come la serie armonica (per essere precisi 3 volte la serie armonica) che diverge come si vede più avanti.

✎ **Esempio 1.2.7.** *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1}{n}$$

converge. Infatti dai limiti notevoli si sa che

$$e^x - 1 \sim x \qquad \text{per } x \to 0$$

quindi siccome $n \to \infty$ si ha che $\frac{1}{n} \to 0$ si ottiene

$$e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n} \qquad \text{per } n \to \infty$$

A questo punto allora

$$\frac{e^{1/n}-1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$

quindi la serie data, dal criterio del confronto asintotico, ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge.

☞ **Osservazione 1.2.8.** Il risultato precedente continua a valere se la condizione

$$a_n \sim b_n$$

viene sostituita dalla condizione più generale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty);$$

(quindi ℓ anzichè essere uguale a 1 come richiesto dalla condizione di essere asintotico può essere un numero finito diverso da zero).

☞ **Osservazione 1.2.9.** Il criterio del confronto vale solo se le due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ sono entrambe non negative; infatti, considerando le successioni

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n},$$

si ha che la serie $\sum_n a_n$ è convergente, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

ma la serie $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$, in quanto somma della serie $\sum_n (-1)^n/\sqrt{n}$, che è convergente e della serie $\sum_n 1/n$ che diverge positivamente.

✎ **Esempio 1.2.10.** *La serie armonica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

è divergente. Infatti, essendo a termini positivi, esiste $\lim_{n\to+\infty} s_n$*, finito o no, dove con* S_n *indichiamo la successione delle somme parziali; ma dalla relazione*

$$s_{2n} = s_n + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \geq s_n + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = s_n + \frac{1}{2},$$

posto $x_n = s_{2^n}$*, si ottiene la formula*

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} \geq x_n + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Si ricava facilmente per induzione

$$x_n \geq 1 + \frac{n}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dunque $x_n = s_{2^n} \to +\infty$*, per cui la serie in questione diverge.*

Proposizione 1.2.11. (criterio della radice n–esima)
Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi; supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n)^{1/n} = L,$$

con $0 \le L \le +\infty$. Allora si ha

$$L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n < +\infty$$

$$L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n = +\infty.$$

Supponiamo prima che

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n)^{1/n} = L < 1.$$

Allora per definizione di limite si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \le L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, se $L < 1$ allora per le proprietà dei numeri reali, si ha che esiste un qualche $\varepsilon > 0$ tale che $L < 1 - \varepsilon$. Allora mettendo insieme le due cose si ha che definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \le L + \frac{\varepsilon}{2} < (1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui

$$a_n < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

e il risultato si ottiene dal confronto con la serie geometrica di ragione $1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$.
Se invece $L > 1$, con un ragionamento del tutto analogo si riesce a dimostrare che

$$a_n > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

per cui la serie data diverge (teorema del confronto con la serie geometrica di ragione $1+\frac{\varepsilon}{2} > 1$).

Più in generale vale la seguente

Proposizione 1.2.12. *Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi;*
1) se esiste $q < 1$ tale che definitivamente si abbia $0 \le (a_n)^{1/n} \le q$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge;
2) se definitivamente $a_n \ge 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ diverge.

☞ **Osservazione 1.2.13.** A priori nulla si può dire sulla convergenza della serie $\sum_n a_n$ quando

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n)^{1/n} = 1.$$

Infatti si ha $\sum_n 1/n = +\infty$ mentre $\sum_n 1/n^2 < +\infty$, anche se per entrambe le serie si ha $(a_n)^{1/n} \to 1$.

Proposizione 1.2.14. (criterio del rapporto) *Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali positivi; supponiamo che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Allora si ha

$$L < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \textstyle\sum_n a_n < +\infty$$

$$L > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \textstyle\sum_n a_n = +\infty.$$

La dimostrazione risulta per molti versi simile a quella precedente. In particolare, se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$$

allora per qualche $\varepsilon > 0$ definitivamente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ragionando iterativamente si ottiene

$$a_{n+1} < a_n \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < a_{n-1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 < \cdots < a_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

e di nuovo si conclude dal criterio del confronto con la serie geometrica. Se invece $L > 1$ si deduce in maniera analoga che per qualche $\varepsilon > 0$ definitivamente

$$a_{n+1} > a_1 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

e quindi la serie diverge.

Più in generale vale la seguente

Proposizione 1.2.15. *Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali positivi;*
1) se esiste $q < 1$ tale che definitivamente si abbia $0 \leq (a_{n+1}/a_n) \leq q$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge;
2) se definitivamente $(a_{n+1}/a_n) \geq 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ diverge.

☞ **Osservazione 1.2.16.** Gli stessi esempi visti per il criterio della radice $n-$esima mostrano che nulla si può dire a priori sulla convergenza della serie $\sum_n a_n$ quando

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

☞ **Osservazione 1.2.17.** I criteri del rapporto e della radice, come pure il criterio del confronto forniscono solo condizioni *sufficienti* per la convergenza. Ovviamente se una serie non soddisfa alle ipotesi di uno di essi non è detto che diverga (e nemmeno se non soddisfa alle ipotesi di alcuno di essi).

☞ **Osservazione 1.2.18.** Sia nel criterio del rapporto che in quello della radice, se $L > 1$ non solo la serie non converge ma addirittura il termine generale della serie tende a $+\infty$.

Per utilizzare il seguente risultato è necessario conoscere il calcolo integrale.

Proposizione 1.2.19. (criterio del confronto serie-integrale) *Sia $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione non negativa e debolmente decrescente; allora la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

risulta convergente se e soltanto se la funzione f è integrabile in un intorno di $+\infty$. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

☞ **Osservazione 1.2.20.** Più in generale, se $f : [k, +\infty) \to [0, +\infty)$ è una funzione non negativa e debolmente decrescente si ha

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leq \int_k^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{n=k}^{\infty} f(n),$$

e quindi la serie $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ risulta convergente se e solo se la funzione f è integrabile in un intorno di $+\infty$.

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[n, n+1]$. Siccome f è decrescente, abbiamo la catena di disuguaglianze

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) \qquad \forall x \in [n, n+1].$$

Integrando membro a membro si ottiene

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\, dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\, dx$$

che è equivalente a

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq f(n).$$

Posto $a_n = f(n)$ e sommando su n si deduce

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

e cambiando variabile nella prima sommatoria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_0^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'additività dell'integrale.

✎ **Esempio 1.2.21.** *Fissato un numero reale positivo α, la funzione $f(x) = x^{-\alpha}$ è decrescente su $(0, +\infty)$; inoltre essa è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\alpha > 1$. Questo permette di provare che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1,$$

mentre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq 1,$$

e che inoltre si ha

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

si chiama SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

✎ **Esempio 1.2.22.** *Per ogni $\beta > 0$ la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x \log^{\beta} x}$$

è decrescente su $(1, +\infty)$; inoltre essa è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\beta > 1$, dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\beta} n} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \beta > 1.$$

Inoltre si ha

$$\frac{1}{(\beta - 1)\log^{\beta-1} 2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\beta} n} \leq \frac{1}{(\beta - 1)\log^{\beta-1} 2} + \frac{1}{2\log^{\beta} 2}.$$

☞ **Osservazione 1.2.23.** I criteri di convergenza per le serie a termini non negativi si basano tutti sulla proprietà dell'estremo superiore, di cui gode l'insieme dei numeri reali.

1.3. Serie a termini di segno variabile

❒ **Definizione 1.3.1.** Si dice che una serie $\sum_n a_n$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se la serie $\sum_n |a_n|$ è convergente.

Teorema 1.3.2. (CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA) *Sia $\sum_n a_n$ una serie assulutamente convergente; allora anche la serie $\sum_n a_n$ risulta convergente e si ha*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

PRIMO MODO: usando il Teorema 1.1.7, basta dimostrare che detta s_n la successione delle somme parziali, essa è di Cauchy, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \bar{n} : \forall k \in \mathbb{N}^+ \ |s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Ora, per ipotesi la serie $\sum_n |a_n| < +\infty$ quindi è di Cauchy, nel senso che

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \bar{n} : \forall k \in \mathbb{N}^+ \ \ ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon.$$

La tesi si deduce applicando ripetutamente la disuguaglianza triangolare.

SECONDO MODO: la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$$

è a termini positivi ed è convergente perché dal criterio del confronto si ha che $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ e dall'ipotesi $\sum_n |a_n| < +\infty$. Quindi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{n} |a_k|;$$

passando al limite, visto che entrambi i limiti a destra esistono e sono finiti, si deduce la convergenza della serie di partenza.

☞ **Osservazione 1.3.3.** Il teorema precedente non si può invertire: infatti è importante ricordare che ci sono serie *convergenti ma non assolutamente convergenti*; l'esempio classico è rappresentato dalla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge (criterio di Leibniz, vedi Teorema 1.3.5 ma non converge assolutamente (infatti si tratta della serie armonica).

☞ **Osservazione 1.3.4.** Date due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, possiamo considerare la loro somma $\sum_n (a_n + b_n)$; dai teoremi sui limiti delle somme, otteniamo subito che se $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ sono convergenti, allora anche $\sum_n (a_n + b_n)$ è convergente, e si ha

$$\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n,$$

mentre se una è convergente e l'altra è divergente, o sono entrambe divergenti dalla stessa parte, la somma diverge. Rimane escluso il caso della somma di una serie divergente positivamente con una divergente negativamente.
Per quanto riguarda il prodotto, va invece notato che la serie $\sum_n a_n b_n$ non ha nulla a che vedere con le serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, come mostrano ad esempio le serie $\sum_n ((-1)^n + 1)$ e $\sum_n ((-1)^{n+1} + 1)$: entrambe sono divergenti positivamente, mentre la serie $\sum_n ((-1)^n + 1)\,((-1)^{n+1} + 1)$ è la serie identicamente nulla.

Teorema 1.3.5. (CRITERIO DI LEIBNIZ) *Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi, debolmente decrescente, infinitesima; allora la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

risulta convergente. Inoltre, detta s la somma della serie e s_n la successione delle somme parziali, si ha che

$$|s_n - s| \leq a_{n+1} \tag{1.3.1}$$

che si esprime dicendo: l'errore che si commette sostituendo alla somma della serie la somma dei primi n termini è maggiorato in valore assoluto dal primo termine trascurato.

☞ **Osservazione 1.3.6.** Se nel Teorema 1.3.5 si elimina la condizione che la successione $\{a_n\}_n$ sia infinitesima, per il Teorema 1.1.5 la serie non può convergere. Più interessante è osservare che anche se si elimina l'ipotesi che $\{a_n\}_n$ sia decrescente, la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ può non risultare più convergente. Consideriamo ad esempio la successione

$$a_n = \begin{cases} 2/n & \text{se } n \text{ è pari;} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Essa è non negativa e infinitesima, ma si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

☞ **Osservazione 1.3.7.** Come già ribadito, dalla dimostrazione del Teorema 1.3.5 si ricava che, detta s la somma della serie $\sum_n (-1)^n a_n$, si ha

$$s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e l'errore che si commette approssimando s con s_{2n} o con s_{2n+1}, si può stimare con

$$|s_{2n} - s_{2n+1}| = a_{2n+1}.$$

✎ **Esempio 1.3.8.** *Sia data la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Quanti termini dobbiamo sommare in modo che s_n (successione delle somme parziali) differisca da s (somma della serie) per meno di $\frac{1}{100}$?
Vogliamo determinare n in modo che

$$|s_n - s| \leq \frac{1}{100}.$$

Usando (1.3.1), basta determinare a_{n+1} tale che

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow n \geq 99.$$

1.4. Riassumendo

Dire se le seguenti implicazioni sono vere o false.

Se una serie converge allora converge assolutamente.

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

Se una serie converge assolutamente allora converge.

Vero: criterio di convergenza assoluta.

Se una serie è a termini positivi, non può essere indeterminata.

Vero: infatti la successione delle somme parziali è monotona e quindi ammette limite (finito o $+\infty$).

Se una serie converge allora il termine generale è infinitesimo.

Vero: è la condizione necessaria.

Se il termine generale di una serie è infinitesimo allora la serie converge.

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Ogni serie a termini di segno alternato converge.

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Se $\sum a_n < \infty$ allora $\sum a_n^2 < \infty$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

che converge per il criterio di Leibniz ma

$$\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n}$$

che diverge. Un ragionamento errato a questo proposito sarebbe dire: siccome $\sum a_n < \infty$ allora $a_n \to 0$ quindi definitivamente $a_n \leq 1$ e allora $a_n^2 \leq a_n$ che risulta vero a patto che $a_n \geq 0$.

CAPITOLO 2

Esercizi riguardanti serie numeriche

2.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 2.1.1.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)}{n^3}$$

Se n è pari, allora

$$\frac{\pi}{2}(2n+1) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

quindi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = 1$$

invece se n è dispari, allora

$$\frac{\pi}{2}(2n+1) = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

quindi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = -1$$

quindi la serie data è equivalente alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

che soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz quindi converge.

✍ **Esercizio 2.1.2.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

La serie data è a termini non negativi. Risulta ben definita perché

$$1+\frac{1}{n} > 1 \quad \Rightarrow \quad \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$$

Inoltre dai limiti notevoli si ha che

$$\log(1+x) \sim x \qquad x \to 0$$

quindi siccome $n \to \infty$ allora $\frac{1}{n} \to 0$ e dunque

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Allora la serie di partenza si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che diverge (serie armonica generalizzata con esponente $\alpha = 1/2$).

✍ **Esercizio 2.1.3.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{1}{n}$$

La serie data è a termini non negativi, infatti

$$0 \leq \cos^2 \frac{1}{n} \leq 1$$

quindi

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$$

quindi dal criterio del confronto la serie data è maggiorata dalla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge.

✍ **Esercizio 2.1.4.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{1}{n}$$

La serie data è a termini non negativi. Utilizzando il limite notevole

$$\sin x \sim x \qquad x \to 0$$

si ha che

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \qquad n \to \infty$$

quindi

$$\frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^4}$$

e allora la serie data si comporta, dal criterio del confronto asintotico, come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

che converge.

✍ **Esercizio 2.1.5.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

La serie data è a termini non negativi. Di nuovo dai limiti notevoli si ha

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad n \to \infty$$

quindi

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$$

e la serie data, dal criterio del confronto asintotico, si comporta come la serie armonica che diverge.

✍ **Esercizio 2.1.6.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

La serie data è a termini non negativi. Utilizziamo il criterio del rapporto. Ponendo

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0$$

quindi la serie data converge.

✍ **Esercizio 2.1.7.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

la serie data non converge perché non è verificata la condizione necessaria.

✍ **Esercizio 2.1.8.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$$

La serie data è a termini non negativi. Utilizzando di nuovo i limiti notevoli

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad n \to \infty$$

si ha che la serie data, per il criterio del confronto asintotico, si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che diverge.

✍ **Esercizio 2.1.9.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$$

La serie data è a termini non negativi. Utilizzando di nuovo i limiti notevoli

$$\tan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \qquad n \to \infty$$

si ha che la serie data, per il criterio del confronto asintotico, si comporta come la serie armonica che diverge.

✍ **Esercizio 2.1.10.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan \left(\frac{\pi + (-1)^n}{\pi(n^2+1)} \right)$$

Anche se a prima vista non sembra, la serie data è a termini non negativi. Infatti visto che $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ si ha

$$\frac{\pi - 1}{\pi(n^2+1)} \leq \frac{\pi + (-1)^n}{\pi(n^2+1)} \leq \frac{\pi + 1}{\pi(n^2+1)}$$

quindi usando il limite notevole $\tan z \sim z$ per $z \to 0$ si ha che la serie data è maggiorata dalla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi + 1}{\pi(n^2+1)} \leq (\pi + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

l'ultima serie a destra converge quindi per il criterio del confronto anche la serie di partenza converge.

✍ **Esercizio 2.1.11.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Visto che

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

la serie data non converge perché non soddisfa la condizione necessaria.

✍ **Esercizio 2.1.12.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^n$$

Prima di tutto calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \log\left(1+\frac{1}{n!}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n/n!} = 1 \neq 0$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che

$$\log\left(1 + \frac{1}{n!}\right) \sim \frac{1}{n!} \qquad n \to +\infty$$

Allora la serie data non converge perché non soddisfa la condizione necessaria.

✍ **Esercizio 2.1.13.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{30!}\right)^n$$

Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{30!}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \log\left(1+\frac{1}{30!}\right)} = +\infty$$

quindi anche questa serie non converge perché non soddisfa la condizione necessaria.

✍ **Esercizio 2.1.14.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{30!}\right)^n$$

La serie data (che è a termini non negativi) converge perché è serie geometrica di ragione $\frac{1}{30!}$.

Nota bene: diversamente dall'esercizio precedente se si calcola

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{30!}\right)^n$$

per vedere se viene soddisfatta la condizione necessaria si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{30!}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \log \frac{1}{30!}} = 0$$

perchÃľ

$$\frac{1}{30!} < 1 \Rightarrow \log\frac{1}{30!} < 0$$

✍ **Esercizio 2.1.15.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n+(-1)^n n^2}\right)$$

Se n è pari, si ha $(-1)^n = 1$ e quindi la serie data è

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+n^2}$$

che converge in quanto

$$\frac{1}{n+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

e quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+n^2}$$

si comporta come la serie (dal criterio del confronto asintotico)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

che converge (serie a termini positivi).
Invece se n è dispari si ha che $(-1)^n = -1$ e quindi la serie data è

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-n^2}$$

e anch'essa converge in quanto

$$\frac{1}{n-n^2} \sim -\frac{1}{n^2}$$

e quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-n^2}$$

si comporta come la serie (dal criterio del confronto asintotico)

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

che converge (a un numero negativo perchè è una serie a termini definitivamente negativi).

Allora la serie di partenza è la somma di due serie convergenti dunque anch'essa converge.

✍ **Esercizio 2.1.16.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+e^{-n})$$

La serie è a termini di segno alternato. L'idea è quella di applicare il criterio di Leibniz. Ponendo

$$a_n = 1 + e^{-n}$$

si ha che $a_n \geq 0$, a_n è decrescente ma a_n non è infinitesima! Infatti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$$

quindi il criterio di Leibniz non è applicabile e la serie data non converge (perché non è verificata la condizione necessaria).

✍ **Esercizio 2.1.17.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{-n})$$

La serie è a termini di segno alternato. L'idea è quella di applicare il criterio di Leibniz. Ponendo

$$a_n = e^{-n}$$

si ha che $a_n \geq 0$, a_n è decrescente e stavolta a_n è infinitesima, infatti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

quindi la serie data converge dal criterio di Leibniz.

✍ **Esercizio 2.1.18.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

La serie è a termini di segno alternato. L'idea è quella di applicare il criterio di Leibniz.

Ponendo

$$a_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}}$$

si ha che $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$ e occorrerebbe solo dimostrare che a_n è decrescente. Questo è equivalente a mostrare che $b_n := n - \sqrt{n}$ è crescente. Usiamo la definizione. Bisogna dimostrare che $b_n \leq b_{n+1}$ cioè occorre verificare che

$$n - \sqrt{n} \leq (n+1) - \sqrt{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) \leq \sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - 1)$$

ma d'altra parte, essendo la radice quadrata una funzione crescente, se $n \geq 1$ si ha che

$$\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) \leq \sqrt{n+1}(\sqrt{n} - 1) \leq \sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - 1) = (n+1) - \sqrt{n+1}$$

quindi il criterio di Leibniz è applicabile e la serie data converge per il criterio di Leibniz.

✍ **Esercizio 2.1.19.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n - \sqrt{n}}$$

La serie data è a termini di segno alternato e si può mostrare che converge per il criterio di Leibniz. Semplificando infatti si ottiene

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$$

che banalmente soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz.

✍ **Esercizio 2.1.20.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - n \sin^2 n}$$

La serie è a termini di segno variabile e non si riesce facilmente a dimostrare che ponendo

$$a_n = \frac{1}{n^2 - n \sin^2 n}$$

sia non negativa, infinitesima e decrescente (oscilla).
Però si osserva che

$$\sin^2 n \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\sin^2 n \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad -n \sin^2 n \geq -n$$

da cui
$$n^2 - n\sin^2 n \ge n^2 - n$$
quindi la serie data è maggiorata in valore assoluto da
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$$
cioè
$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2 - n\sin^2 n} \right| \le \frac{1}{n^2 - n}$$
La serie a secondo membro è a termini definitivamente positivi, e converge (confronto asintotico con la serie armonica generalizzata). Quindi la serie data converge assolutamente e perciò (dal criterio della convergenza assoluta) converge.

✍ **Esercizio 2.1.21.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}$$

Siccome è facile verificare che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ la serie data è equivalente a
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$$
Posto
$$a_n = \frac{n}{1+n^2}$$
sicuramente $a_n \ge 0$, a_n è infinitesima e il problema di nuovo è verificare che è decrescente, al fine di poter applicare il criterio di Leibniz. A tal scopo, si può procedere o con la definizione, oppure passando dalla variabile discreta alla variabile continua quindi considerando la funzione
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad x \ge 0$$
che (da un breve studio) è tale che $f(0) = 0$, $f(x) \ge 0$ per ogni $x \ge 0$, $f(x) \to 0$ se $x \to \infty$ e f ha massimo per $x = 1$; quindi sicuramente per $x \ge 1$ la funzione data è decrescente, quindi anche la corrispondente successione è decrescente se $n \ge 1$. In conclusione la serie data converge per il criterio di Leibniz.

✍ **Esercizio 2.1.22.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \tan\left(\frac{n}{1+n^3}\right)$$

La serie data è a termini non negativi. Dalla gerarchia degli infiniti e dai limiti notevoli si ha che

$$\tan\left(\frac{n}{1+n^3}\right) \sim \frac{n}{1+n^3} \sim \frac{1}{n^2}$$

quindi la serie di partenza si comporta (per il criterio del confronto asintotico) come la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge.

✍ **Esercizio 2.1.23.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

La serie data è a termini non negativi. Dal criterio del confronto serie-integrale si ha che la serie data si comporta come l'integrale

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx &= \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} -(\log x)^{-1}\Big|_2^A \\
&= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log A} = \frac{1}{\log 2} < +\infty
\end{aligned}$$

quindi anche la serie data converge.

✍ **Esercizio 2.1.24.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n!}$$

La serie data è a termini non negativi. Si ha che

$$\log n! = \log(n(n-1)(n-2)\dots 2) > n\log 2$$

quindi si ha la seguente catena di maggiorazioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n!} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\log 2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

quindi dal criterio del confronto la serie data converge.

✍ **Esercizio 2.1.25.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$$

La serie data è a termini non negativi. L'idea è quella di applicare il criterio del rapporto. Ponendo

$$a_n = \frac{n+1}{n!}$$

si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{(n+1)!} \frac{n!}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \to 0$$

quindi definitivamente il rapporto è minore di 1 e perciò la serie data converge.

✍ **Esercizio 2.1.26.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{2n}}$$

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{e^{2n\log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2-2n\log n}$$

ma a questo punto il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie data non converge perchè non soddisfa la condizione necessaria.

✍ **Esercizio 2.1.27.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sin^2 n}$$

La serie data è una serie a termini non negativi. Visto che $\sin^2 n \leq 1$ si ha che (attenzione al verso della maggiorazione!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sin^2 n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

che diverge (confronto asintotico con la serie armonica), quindi la serie data diverge perché maggiora una serie divergente.

✍ **Esercizio 2.1.28.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n\sqrt{n}}$$

La serie data è a termini non negativi. Dalla gerarchia degli infiniti, si ha, per ogni $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$$

quindi per esempio ponendo $\alpha = 8$ si ha che definitivamente

$$\log n \leq \sqrt[8]{n}$$

Allora si può maggiorare la serie di partenza ad esempio con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

che converge e quindi anche la serie di partenza converge per il criterio del confronto.

✍ **Esercizio 2.1.29.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica di termine generale*

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2n+\sin^2 n} & n \text{ dispari} \\ \dfrac{1}{n+\pi} & n \text{ pari} \end{cases}$$

Se n è dispari si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+\sin^2 n} \geq \frac{1}{2n+1}$$

che diverge (confronto asintotico con la serie armonica).
Invece se n è pari, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\pi}$$

che diverge (confronto asintotico con la serie armonica). Quindi anche la serie di partenza (che è a termini non negativi) diverge.

✍ **Esercizio 2.1.30.** *Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(e^{2\alpha})}$$

La serie data è una serie armonica generalizzata con esponente

$$\gamma = e^{2\alpha}.$$

Si sa che la serie armonica generalizzata converge se $\gamma > 1$ quindi la serie di partenza converge per $e^{2\alpha} > 1$ cioè $\alpha > 0$.

✍ **Esercizio 2.1.31.** *Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n^{2\alpha+1}}$$

La serie data è a termini non negativi. Dai limiti notevoli si ha che

$$e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n} \qquad n \to \infty$$

quindi

$$\frac{e^{1/n} - 1}{n^{2\alpha+1}} \sim \frac{1}{n^{2\alpha+2}}$$

quindi la serie di partenza (dal criterio del confronto asintotico) si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $2\alpha + 2$. Sappiamo che essa converge se $2\alpha + 2 > 1$ quindi se $\alpha > -1/2$.

✍ **Esercizio 2.1.32.** *Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4\alpha^2 + 4\alpha + 1)^{n/2}}$$

Calcolare poi la somma della serie al variare di α.

Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4\alpha^2 + 4\alpha + 1)^{n/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\alpha + 1)^n}$$

La serie data (serie geometrica di ragione $\frac{1}{2\alpha+1}$) converge se

$$\left| \frac{1}{2\alpha + 1} \right| < 1$$

e risolvendo la disequazione si ottiene

$$\left| \frac{1}{2\alpha + 1} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\alpha + 1} - 1 < 0 \ \wedge \ \frac{1}{2\alpha + 1} + 1 > 0$$

che è equivalente a

$$\frac{-2\alpha}{2\alpha + 1} < 0 \ \wedge \ \frac{2\alpha + 2}{2\alpha + 1} > 0$$

cioè

$$\left[\alpha < -\frac{1}{2} \ \vee \ \alpha > 0\right] \ \wedge \ \left[\alpha < -1 \ \vee \ \alpha > -\frac{1}{2}\right]$$

quindi si ha convergenza per

$$\alpha < -1 \ \vee \ \alpha > 0.$$

Si ha poi per tali valori di α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\alpha+1}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2\alpha+1}} - 1$$

(si deve sottrarre 1 perchÃľ la formula vale per calcolare la somma della serie per n che va da zero a infinito, non da 1 a infinito!) quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\alpha+1}\right)^n = \frac{1}{2\alpha}.$$

✍ **Esercizio 2.1.33.** *Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha \sin \frac{1}{n}}$$

Vediamo per quali valori di α si ha convergenza assoluta. Si ha

$$\left|\frac{1}{n^\alpha \sin \frac{1}{n}}\right| \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

quindi si ha convergenza assoluta della serie per $\alpha > 2$; per tali valori si ha anche convergenza della serie.

Invece se $\alpha - 1 \leq 0$ (cioè se $\alpha \leq 1$) il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi la serie data non soddisfa la condizione necessaria. Pertanto la serie non converge. Resta quindi da analizzare l'insieme dei valori $1 < \alpha \leq 2$.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$. Si vorrebbe dimostrare che per $x \geq 0$ $f(x)$ è crescente in modo tale da poter applicare alla corrispondente successione il criterio di Leibniz. Studiamo

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} = x^{\alpha-2}\left[\alpha\, x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right]$$

Si vorrebbe dimostrare che il contenuto della parentesi quadra è sempre positivo. A tal fine, l'idea è quella di usare gli sviluppi di Taylor (si possono usare perchÃľ x tende a infinito quindi $1/x$ tende a zero (per $x \geq 0$); il problema è che si vorrebbe evitare di usare il resto secondo Peano perchÃľ non ha un segno ben definito. Allora si puÃš osservare che in generale, per $z \to 0$

$$\sin z - z + \frac{z^3}{6} \geq 0$$

(perchÃĽ il termine successivo dello sviluppo di Taylor del seno ha segno positivo) mentre

$$\cos z - 1 + \frac{z^2}{2} \leq 0$$

(perchÃĽ il termine successivo nello sviluppo del coseno avrebbe segno negativo) quindi mettendo insieme le due cose si ha la seguente maggiorazione

$$\alpha\, x\, \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \geq \alpha\, x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6\, x^3}\right) - 1 + \frac{1}{2x^2} = -1 + \alpha + \frac{1}{x^2}\left[-\frac{\alpha}{3} + 1\right] > 0$$

perchÃĽ il termine tra parentesi è positivo, essendo $1 < \alpha \leq 2$.
A questo punto allora ponendo

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha \sin\frac{1}{n}}$$

si ha che $a_n \geq 0$, a_n è infinitesima e decrescente (dal conto fatto dalla corrispondente funzione).
Quindi si puÃš applicare il criterio di Leibniz e si ha convergenza anche per $1 < \alpha \leq 2$.
Riassumendo si ha convergenza per $\alpha > 1$ e non convergenza per $\alpha \leq 1$.

2.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 2.2.1.** *Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:*

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+2}$	2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$	3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n+1}$
4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$	5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$	6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{n}{\pi + n^3}\right)$
7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n!}$	8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$	9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$
10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1-\sin n}$	11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$	12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$
13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^4}$	14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$	15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$

➼ **R.** Hint:

1)converge; criterio di Leibniz

2)converge; $\sim \sum \frac{1}{n^2}$

3)converge; $\sim \sum \frac{1}{n^2}$

4)converge; criterio del rapporto

5)converge; $\sim \sum \frac{1}{n^2}$

6)converge; $\sim \sum \frac{1}{n^2}$

7)diverge; $\log n! = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n < n \log n$;

$\sum \frac{1}{n \log n}$ diverge; criterio del confronto serie integrale

8)diverge; $\sim \sum \frac{1}{n}$

9)converge; $|\frac{\sin^2 n}{n^2}| \sum \frac{1}{n^2}$

10)non converge; (condizione necessaria)

11)converge; (serie geometrica di ragione 3/5)

12)converge; (criterio del rapporto)

13)diverge; (criterio del rapporto)

14)non converge; (condizione necessaria)

15)diverge; criterio del confronto serie integrale

✍ **Esercizio 2.2.2.** *Calcolare il valore esatto della somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\log 3 - 1)^n$$

➼ **R.**

$$\frac{\log 3 - 1}{2 - \log 3}$$

✍ **Esercizio 2.2.3.** *Calcolare il valore esatto della somma della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

➼ **R.**

$$\frac{3}{2}$$

✍ **Esercizio 2.2.4.** *Calcolare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie geometrica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x-2}{4} \right)^n$$

è convergente.

➻ **R.** $-2 < x < 6$

✍ **Esercizio 2.2.5.** *Trovate per quali valori del parametro reale x la seguente serie è convergente*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^n$$

➻ **R.** $x \in \mathbb{R}$

✍ **Esercizio 2.2.6.** *Calcolare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{\alpha+2}}$$

è convergente.

➻ **R.** $\alpha > 0$

✍ **Esercizio 2.2.7.** *Calcolare per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ converge la serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\beta^2 + 4\beta + 4)^n$$

➻ **R.** $-3 < \beta < -1$

✍ **Esercizio 2.2.8.** *Calcolare*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 3^{-n}$$

➻ **R.** Attenzione! La serie parte da $n = 2$. Quindi il risultato richiesto è $\frac{1}{6}$

✍ **Esercizio 2.2.9.** *Calcolare per quali valori del parametro α la serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 + e^{-n}}{\sqrt{n^{\alpha}} + \log n}$$

è convergente

➻ **R.** $\alpha > 2$

✍ **Esercizio 2.2.10.** *Si consideri la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3(1+x)^n}.$$

Calcolare la somma per $x = 2$

➻ **R.**

$$\frac{1}{18}$$

✍ **Esercizio 2.2.11.** *Calcolare l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 2)\, e^{1/n}}{1 + 2n^{\alpha}}$$

risulta convergente.

➻ **R.** $\alpha > 3$

✍ **Esercizio 2.2.12.** *Calcolare l'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

risulta convergente.

➻ **R.** $\alpha > 2$

✍ **Esercizio 2.2.13.** *Calcolare l'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + 2n^3)\,(e^{1/n} - 1)^\alpha$$

risulta convergente.

➻ **R.** $\alpha > 4$

✍ **Esercizio 2.2.14.** *Calcolare l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3 + n^\alpha\, 2^n}$$

risulta convergente.

➻ **R.** $\alpha > 1$. Infatti dividendo per 2^n la serie data è equivalente a $\sum_n \frac{1}{\frac{n^3}{2^n} + n^\alpha}$. Ora se $\alpha \leq 0$ la serie non soddisfa la condizione necessaria pertanto non converge, mentre se $\alpha > 0$ la serie si comporta come la serie armonica generalizzata che converge se $\alpha > 1$.

✍ **Esercizio 2.2.15.** *Determinate per quali valori dei parametri reali β e γ la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\gamma \left(e^{1/n^2} - 1 - \frac{\beta}{n^2}\right)$$

è convergente.

➼ **R.** Se $\beta \neq 1$, la serie si comporta come $(1-\beta)\sum_n \frac{1}{n^{2-\gamma}}$ che converge se $\gamma < 1$; se $\beta = 1$ la serie si comporta come $\frac{1}{2}\sum_n \frac{1}{n^{4-\gamma}}$ che converge se $\gamma < 3$.

✍ **Esercizio 2.2.16.** *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiate, in funzione di α, la convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha-1)n+\sqrt{n}}{n^\alpha+n^2+1}$$

➼ **R.** Se $\alpha = 1$ la serie si comporta come $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ quindi converge. Se $\alpha < 1$, la serie data è definitivamente a termini negativi (ma si possono comunque applicare i criteri) e si ha che la serie si comporta come $\sum_n \frac{\alpha-1}{n}$ che diverge. Se $1 < \alpha \leq 2$ di nuovo la serie si comporta come $\sum_n \frac{\alpha-1}{n}$ che diverge. Se $\alpha > 2$ la serie si comporta come $\sum_n \frac{\alpha-1}{n^{\alpha-1}}$ e perciò converge.

2.3. Vero o falso?

✍ **Esercizio 2.3.1.** *Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere, motivarle; se sono false, esibire un controesempio.*

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

Vero: criterio della convergenza assoluta

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

Falso: controesempio
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

4) $\lim_{n\to+\infty} (a_n)^2 = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

Falso: controesempio
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

5) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2 < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^4 < +\infty$

Vero: dalla convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2 < +\infty$ si ottiene che definitivamente $a_n^4 \leq a_n^2 \leq 1$ e si conclude dal teorema del confronto.

6) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n) < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2 < +\infty$

Falso: controesempio
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + a_n)^2 < +\infty$

Falso: controesempio
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

8) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$

Falso: controesempio
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \sin a_n < +\infty$

Vero: se $a_n \geq 0$ si applica il criterio del confronto asintotico, altrimenti si spezza a_n nelle due successioni di termini solo positivi e di termini solo negativi, a entrambe si applicano i criteri (perché se $a_n \to 0$ ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite).

10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^2\, a_n = 0$

Falso: controesempio
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

11) $\displaystyle a_n > 0,\ \sqrt[n]{a_n} \leq 1/2\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq 2$

Vero: confronto con serie geometrica di ragione $q = 1/2$.

12) $\displaystyle a_n > 0,\ \sqrt[n]{a_n} \leq 1/2\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \log a_n < +\infty$

Falso: controesempio
$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

13) $\displaystyle a_n > 0,\ \sqrt[n]{a_n} \leq 1/2\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^n a_n = 0$

Falso: controesempio

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

14) $a_n > 0$, $\sqrt[n]{a_n} \leq 1/2\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} e^n\, a_n = +\infty$

Falso: controesempio

$$a_n = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n + \frac{1}{n}\right) < +\infty$ solo se $a_n > 0$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n + \frac{1}{n}\right)$ può essere convergente

Falso: perché la seconda serie si spezza nella somma di una serie che converge e una che diverge, pertanto diverge.

17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

Vero: perché la seconda serie si spezza nella somma di una serie che converge e una che diverge, pertanto diverge.

18) $a_n > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 < +\infty$

Vero: se $a_n > 0$ allora essendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < +\infty$, definitivamente $a_n^4 \leq a_n^3 \leq 1$ e si conclude dal teorema del confronto.

19) $a_n > 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(il limite del rapporto è esattamente 1 e non < 1)

20) $a_n > 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$

Falso: controesempio

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

21) $a_n > 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}^3}{a_n^3} < 1$

Falso: controesempio

$$a_n = \frac{1}{n}$$

22) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + 1) = 3$

Falso: la seconda serie è la somma di una serie che converge e $\sum_n 1 = +\infty$

23) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1/2$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2 \qquad \text{ma} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$$

24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2 \qquad \text{ma} \qquad a_n \to 0$$

25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Vero: condizione necessaria.

26) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

Falso: controesempio

$$\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2$$

perché $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. A questo punto però $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$. Si noti che la serie $\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ rendeva vera l'implicazione!

27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2 = 4$

Falso: controesempio (si noti che la serie parte da 1!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

28) $a_n > 0, \forall n \geq 0; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n} < +\infty$

Vero: semplicemente dall'ipotesi si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n} < +\infty$$

29) $a_n > 0, \forall n \geq 0; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{1+a_n} < +\infty$

Falso: indipendentemente dal comportamento di a_n, si ha $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{1+a_n} \geq \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$

30) $a_n > 0, \forall n \geq 0; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+a_n}{a_n} < +\infty$

Falso: Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2 < 1$ allora $\sum_n a_n < +\infty$ quindi $a_n \to 0$. Pertanto posto $b_n := \frac{1+a_n}{a_n}$ si ha che

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1+a_{n+1}}{a_{n+1}} \frac{a_n}{1+a_n} \to 2 > 1$$

pertanto la seconda serie diverge.

31) $a_n > 0, \forall n \geq 0; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$

Falso: non è verificata la condizione necessaria.

32) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3,\ b_n := \frac{1}{n} + a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3$

Falso: la seconda serie è la somma di una serie convergente e di una divergente, pertanto diverge.

33) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3,\ b_n := \frac{1}{n} + a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$

Falso: la seconda serie è la somma di una serie convergente e di una divergente, pertanto diverge.

34) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3,\ b_n := \frac{1}{n} + a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

Vero: la seconda serie è somma di una serie convergente e di una divergente, quindi diverge.

35) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3,\ b_n := \frac{1}{n} + a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\infty$

Falso: la seconda serie è la somma di una serie convergente e di una divergente a $+\infty$, pertanto diverge a $+\infty$.

36) $a_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1\ \forall n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Vero: criterio del rapporto

37) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente e $a_n > 0$ allora $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$;

Falso: potrebbe essere esattamente 1; controesempio $a_n = \frac{1}{n^2}$

38) $a_n > 0\, \forall n\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Vero: criterio della radice

39) $a_n > 0\,\forall n \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

40) $a_n \neq 0\,\forall n \geq 1 \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$

Vero: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ implica $|a_n| \to 0$ pertanto $|a_n|^2 = a_n^2 \leq |a_n| \leq 1$ almeno definitivamente, e si conclude dal teorema del confronto.

41) $a_n \neq 0\,\forall n \geq 1 \ \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non è convergente

Falso: (era vero se $\geq$ era sostituito da $>$); controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

42) $a_n \neq 0\,\forall n \geq 1 \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

43) $a_n \neq 0\,\forall n \geq 1 \ \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Vero: dalla condizione sul limite del rapporto, si ottiene che $\sum_n |a_n| < \infty$ quindi si conclude dal criterio della convergenza assoluta.

44) $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n\, b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} < +\infty$

Falso: controesempio

$$a_n = b_n = \frac{1}{n^2}$$

45) $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n\, b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{a_n^2} < +\infty$

Falso: controesempio

$$a_n = b_n = \frac{1}{n^2}$$

46) $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n\, b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = +\infty$

Falso: controesempio

$$a_n = b_n = \frac{1}{n^2}$$

47) $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n\, b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\, b_n^2 < +\infty$

Vero: se $\sum_n \sqrt{a_n b_n} < +\infty$ allora $\sqrt{a_n b_n} \to 0$ quindi definitivamente $\sqrt{a_n b_n} \leq 1$ e pertanto, essendo $(a_n b_n)^{3/2} \leq a_n b_n$

$$a_n^2 b_n^2 = (a_n b_n)^2 = \sqrt{a_n b_n}(a_n b_n)^{3/2} \leq \sqrt{a_n b_n}$$

e si conclude dal teorema del confronto.

48) $\displaystyle 0 < a_n \leq 2^{-n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$

Vero: confronto con la serie geometrica di ragione 1/2.

49) $a_n > 0,\ a_n \to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n < +\infty;$

Falso: (deve anche essere a_n decrescente); controesempio

$$a_n = \begin{cases} 2/n & \text{se } n \text{ è pari;} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

50) $a_n \geq 2^{-n} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

51) $a_n > 0,\ a_n \to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

52) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty,\ a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n} < +\infty$

Falso: controesempio

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

53) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty,\ a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-a_n} < +\infty$

Falso: se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ allora $a_n \to 0$ e $b_n = e^{-a_n} \to 1$ non è pertanto verificata la condizione necessaria.

54) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty,\ a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{a_n} - 1) < +\infty$

Vero: dall'ipotesi segue che $a_n \to 0$ e la tesi segue dal criterio del confronto asintotico osservando che $e^{a_n} - 1 \sim a_n$ se $a_n \to 0$.