Esercizio 2 Un treno ha n carrozze; i numeri dei passeggeri delle carrozze sono variabili binomiali $B(20, 1/4)$.

SIA $X_i \sim B(m, p)$ CON $m = 20$ E $p = \frac{1}{4}$
LA V.A. CHE CONTA I PASSEGGERI DELLA i-ESIMA CARROZZA
SI SUPPONGA CHE $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ SIA UN CAMPIONE $i.i.d.$

ATTENZIONE: n È IL NUMERO DI CARROZZE MENTRE m È IL NUMERO DI POSTI DI OGNI CARROZZA.

1. Qual è il numero medio di passeggeri per carrozza? E il numero medio di passeggeri del treno?

1a $\mathbb{E}X_i = mp = 5$ (INOLTRE $\mathbb{V}ar\, X_i = mp(1-p) = \frac{15}{4}$)

1b SIA $H_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

I METODO $\mathbb{E}H_n = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = n\,m\,p = 5n$

II METODO $H_n \sim B(20n, \frac{1}{4}) \Rightarrow \mathbb{E}H_n = 20n \cdot \frac{1}{4} = 5n$

2. Qual è la probabilità che una carrozza fissata sia vuota? Qual è la probabilità che una carrozza fissata sia piena?

$$a = \mathbb{P}[X_i = 0] = \binom{20}{0} p^0 (1-p)^{20} = \left(\frac{3}{4}\right)^{20} \approx 0{,}00317$$

$$b = \mathbb{P}[X_i = 20] = \binom{20}{20} p^{20} (1-p)^0 = \left(\frac{1}{4}\right)^{20} \approx 9{,}095 \cdot 10^{-13}$$

3. Qual è il numero medio di carrozze vuote? Ed il numero medio di carrozze piene?

SIANO $V \sim B(n, a)$ LA V.A. CHE CONTA LE CARROZZE VUOTE SU n
E $P \sim B(n, b)$ LA V.A. CHE CONTA LE CARROZZE PIENE SU n

ALLORA $\mathbb{E}V = na$ E $\mathbb{E}P = nb$. ATTENZIONE CHE $V \neq n - P$!

4. Quante carrozze deve avere come minimo il treno affinchè la probabilità di avere almeno una carrozza vuota sia superiore a 0.5?

$$\Rightarrow n : \mathbb{P}[V>0] \geq 0{,}5 \Rightarrow \quad 1-\mathbb{P}[V=0] \geq 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[V=0] \leq 0{,}5 \Rightarrow \binom{n}{0} a^0 (1-a)^n \leq 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-a)^n \leq 0{,}5 \Rightarrow n \ln(1-a) \leq \ln 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ESSENDO } \ln(1-a) < 0 \Rightarrow n \geq \left\lceil \frac{\ln 0{,}5}{\ln(1-a)} \right\rceil = 219$$

5. Si supponga che il numero di passeggeri della carrozza 1 in un certo istante sia distribuito come una binomiale $B(20, 1/4)$. Se dopo quell'istante vedo entrare 18 persone nella carrozza 1 e non li vedo uscire (si suppone che abbiano trovato posto), qual è la probabilità che la carrozza fosse vuota prima del loro ingresso?

SE 18 PASSEGGERI TROVANO POSTO SIGNIFICA CHE CI SONO ALMENO 18 POSTI LIBERI OVVERO AL PIÙ 2 POSTI OCCUPATI CIOÈ $X_1 \leq 2$ QUINDI

$$\mathbb{P}[X_1=0 \mid X_1 \leq 2] = \frac{\mathbb{P}[X_1=0 \cap X_1 \leq 2]}{\mathbb{P}[X_1 \leq 2]} = \frac{\mathbb{P}[X_1=0]}{\mathbb{P}[X_1 \leq 2]} =$$

$$= \frac{a}{\sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}} = \frac{(3/4)^{20}}{(3/4)^{20} + 20 \cdot \frac{1}{4} \cdot (3/4)^{19} + 190 (3/4)^{18} \left(\frac{1}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{(3/4)^2}{(3/4)^2 + 20 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{190}{16}} = \frac{9/16}{\frac{9}{16} + \frac{60}{16} + \frac{190}{16}} = \frac{9}{259} \approx 0{,}03475$$

6. Se un treno ha 50 carrozze, qual è la probabilità che vi siano almeno 240 passeggeri?

I METODO $\quad H_{50} \sim B(nm, p) \quad n=50,\ m=20,\ p=\frac{1}{4}$

L'APPROSSIMAZIONE DI UNA BINOMIALE RICHIEDE

$nm \cdot p = 250 > 5$ OK $\quad nm \cdot (1-p) = 750 > 5$ OK

$\Rightarrow$ TLC OK $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}[H_{50} \geq 240] = 1 - \mathbb{P}[H_{50} \leq 239] \approx 1 - \Phi\left(\frac{239 - nmp + \frac{1}{2}}{\sqrt{nmp(1-p)}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{239 - 250 + \frac{1}{2}}{\sqrt{187{,}5}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{-10{,}5}{13{,}7}\right) \approx 1 - \Phi(-0{,}7668) =$$

$$= \Phi(0{,}7668) \approx \Phi(0{,}77) \approx 0{,}7794$$

II METODO $\quad H_{50} = \sum_{i=1}^{50} X_i$

$\mathbb{E} H_{50} = 50\, \mathbb{E} X_i = 250 \qquad \mathbb{V}ar\, H_{50} = 50\, \mathbb{V}ar\, X_i = 50\, \frac{15}{4} = 187{,}5$

POICHÈ $n = 50 > 30 \Rightarrow$ TLC OK $\quad$ QUINDI

$$\mathbb{P}[H_{50} \geq 240] = 1 - \mathbb{P}[H_{50} \leq 239] \approx 1 - \Phi\left(\frac{239 - 250 + \frac{1}{2}}{\sqrt{187{,}5}}\right) \approx 0{,}7794$$

NOTARE I DUE DIVERSI CRITERI DI APPLICABILITÀ DEL TLC ADOTTATI