Esercizio 1 *Si consideri un campione $X_1, ..., X_n$ di v.a. discrete con funzione di massa:*

$$p(-1) = \frac{\theta}{2},\ p(0) = 1-\theta,\ p(1) = \frac{\theta}{2}.$$

1. *Determinare per quali θ la funzione p è una funzione di massa.*
2. *Calcolare media e varianza di X_1.*

Si considerino i seguenti due stimatori di θ

$$\begin{aligned} \Theta_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i| \\ T_n &= |X_n| \end{aligned}$$

1. *Si stabilisca se Θ_n e T_n sono distorti.*
2. *Si calcoli l'errore quadratico medio (EQM) degli stimatori Θ_n e T_n e se ne studi il comportamento per $n \to +\infty$.*
3. *Studiando l'efficienza relativa dei due stimatori, quale vi sembra migliore?*

Esercizio 2 *Sia (X_1, X_2, X_3) un campione bernoulliano estratto da una popolazione X.*

Al fine di stimare la media μ della popolazione è stato proposto il seguente stimatore:

$$T = \frac{1}{12}X_1 + 3(X_2 + X_3)$$

1. *Mostrare che T è uno stimatore distorto e valutarne l'errore quadratico medio.*
2. *Si trovi la costante c tale che $W = cT$ sia uno stimatore non distorto per μ. Si valuti l'errore quadratico medio di W.*
3. *Quale dei due stimatori risulta migliore?*

Esercizio 3 *Il tempo di risposta di un calcolatore all'input di un terminale si descrive mediante una v.a. di legge esponenziale di parametro λ. Si intendono misurare n tempi di risposta $T_1, ..., T_n$.*

1. *Mostrare che $\bar{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$ è uno stimatore non distorto di $\frac{1}{\lambda}$.*
2. *Calcolare l'errore quadratico medio di $\bar{T}_n$ e studiarne il comportamento asintotico.*
3. *Esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che (in base all'efficienza relativa) per ogni $1 \le n \le 6$ lo stimatore $W = cT_1 + (1-c)T_2$ sia migliore di $\bar{T}_n$?*

Esercizio 4 *X_1 è un campione unidimensionale estratto da una Poisson di parametro λ.*

Siano $T_1(X_1) = X_1$ e $T_2(X_1) = 1$ due stimatori per λ. Quando T_2 è preferito a T_1?

Esercizio 5 *Il numero di elementi spuri in un litro di una soluzione prodotta in laboratorio è descritto da una variabile aleatoria X con media μ e varianza σ^2. La produzione giornaliera sia di n confezioni da un litro l'una; il controllo viene effettuato prelevando m confezioni a caso tra quelle prodotte. Sia $\beta = n/m$.*

1. *Si stimi, in approssimazione normale, la probabilità che la media del campione prelevato differisca dalla media vera di almeno $\alpha\sigma$.*

2. *Si stimi, in approssimazione normale, la probabilità che la media del campione prelevato differisca dalla media della produzione giornaliera di almeno $\alpha\sigma$.*

3. *Si mostri che, in approssimazione normale, la stima della media giornaliera data dalla media dei campioni prelevati migliora all'aumentare di n (β fissato). Cosa si può dire invece della stima, fatta utilizzando il campione prelevato, del numero di elementi spuri totale prodotti in una giornata?*