D Sia X_1, X_2, X_3, X_4 un campione casuale di ampiezza 4, allora dalla definizione segue necessariamente che:

A) $X_1 \sim B(4, \frac{1}{4})$;

B) $X_i \sim B(\frac{1}{4})$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$;

C) X_1 e X_2 non sono indipendenti;

D) X_2 e X_3 hanno la stessa densità di probabilità.

DEFINIZIONE DI CAMPIONE CASUALE

Un **campione casuale** di dimensione n è una n-upla di v.a. $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.
Il campione si dice estratto da una popolazione di legge $f(x;\theta)$ se ciascuna delle v.a. ha legge $f(x;\theta)$.

i.i.d. SIGNIFICA INDIPENDENTI (QUINDI C) FALSA)
E IDENTICAMENTE DISTRIBUITE (QUINDI D) VERA)
A) E B) POSSONO ESSERE VERE MA NON SEMPRE (QUINDI FALSE)

C Sia X_1, X_2, X_3, X_4 un campione casuale di ampiezza 4 con $X_i \sim B(8, p)$, $i = 1, 2, 3, 4$ dove p è un parametro incognito. Data la variabile aleatoria T_1 definita da:

$$T_1 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - 32p,$$

si ha che

A) $E[T_1] = 8p$;
B) T_1 è uno stimatore di p;
C) $T_2 = X_4\,(T_1 + 32p)$ è una statistica;
D) $T_2 = T_1 + 16p$ è una statistica.

$\mathbb{E}T_1 = 4 \cdot 8p - 32p = 0 \Rightarrow$ A) FALSA

DEFINIZIONE DI STATISTICA

Dato un campione casuale $X_1, X_2, \ldots, X_n$, si dice **statistica** una v.a. T funzione del campione casuale che NON sia funzione di alcun parametro incognito.

$T_1 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - 32p$ DIPENDE DA p $\Rightarrow$ B) FALSA

$T_2 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - 32p + 16p$ DIPENDE DA p $\Rightarrow$ D) FALSA

$T_2 = X_4\left(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - \cancel{32p} + \cancel{32p}\right)$ NON DIPENDE DA p

$\Rightarrow$ C) VERA

A Sia X_1, X_2, X_3 un campione casuale di ampiezza 3, con $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, $i = 1, 2, 3$, dove p è un parametro incognito. Posto

$$T = X_1 + X_2 - p,$$

si ha che:

A) $\sqrt{T+p}$ è una statistica; B) T è uno stimatore di p;

C) $T \sim \mathcal{B}(2, p)$; D) $T \sim \mathcal{B}(3, p)$.

$B(n,p) \neq \sum_{i=1}^{n} B_i(p) - p \implies$ C) E D) FALSE

DEFINIZIONE DI STIMATORE

Si dice **stimatore** di $g(\theta)$ (con g funzione definita su Θ una statistica usata per stimare $g(\theta)$. Assegnata la statistica $T = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, una volta estratto un particolare campione $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, il numero $\tau = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si dice **stima** di $g(\theta)$.

T DIPENDE DA $p \implies$ T <u>NON</u> È STATISTICA NÈ, TANTOMENO, STIMATORE $\implies$ B) FALSA

T+p <u>NON</u> DIPENDE DA $p \implies$ A) VERA

B Uno stimatore non distorto di un parametro θ è:
A) una statistica la cui varianza tende a zero al crescere della numerosità del campione;
B) una statistica il cui valore atteso è pari a θ;
C) una statistica che è pari a θ almeno nel 50% dei casi;
D) una statistica per cui la probabilità di assumere valori maggiori di θ è uguale alla probabilità di assumere valori minori di θ.

DEFINIZIONE DI STIMATORE NON DISTORTO

Uno stimatore T di $g(\theta)$ si dice **non distorto** (o **corretto**), se $\mathbb{E}_\theta(T) = g(\theta)$ per ogni $\theta \in \Theta$.

$\Rightarrow$ B) VERA

ESISTONO STIMATORI CORRETTI MA NON CONSISTENTI $\Rightarrow$ A) FALSA

SE T È V.A. CONTINUA $\Rightarrow \mathbb{P}[T = \theta] = 0 \Rightarrow$ C) FALSA

SE T NON È SIMMETRICA $\Rightarrow \mathbb{P}[T \leq \theta] \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ D) FALSA

B Uno stimatore consistente di un parametro θ è:
A) una statistica il cui valore atteso è pari a θ;
B) una statistica la cui varianza tende a zero al crescere della numerosità del campione;
C) una statistica che è pari a θ almeno nel 50% dei casi;
D) una statistica per cui la probabilità di assumere valori maggiori di θ è uguale alla probabilità di assumere valori minori di θ.

Una famiglia di stimatori $\{T_n\}$ di $g(\theta)$ si dice **consistente in media quadratica** se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{EQM}_\theta(T_n) = 0, \qquad \forall\theta \in \Theta.$$

$$\mathrm{EQM}(T) \equiv \mathrm{EQM}_\theta(T) := \mathbb{E}_\theta(\|T - g(\theta)\|^2) = \mathrm{Var}_\theta(T) + \|\mathbb{E}_\theta(T) - g(\theta)\|^2.$$

Teorema 10.1.8. *Per una famiglia di stimatori $\{T_n\}$ di $g(\theta)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) la famiglia è consistente in media quadratica;

(ii) la famiglia è semplicemente consistente e $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Var}_\theta(T_n) = 0$*;*

(iii) la famiglia è asintoticamente corretta e $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Var}_\theta(T_n) = 0$.

T_n CONSISTENTE $\Rightarrow$ ASINTOTICAMENTE CORRETTO
$\Rightarrow$ $\mathrm{Var}\, T_n \to 0$ $\Rightarrow$ B) VERA

ESISTONO STIMATORI CONSISTENTI MA NON CORRETTI $\Rightarrow$ A) FALSA

C Sia X_1, X_2 un campione casuale di ampiezza 2 e legge comune Bernoulli di parametro p. Allora si ha che

A) $Var(X_2) \neq Var(X_1)$;
B) $X_1 + X_2 - p$ è uno stimatore non distorto di p;
C) $X_1 + X_2$ è uno stimatore non distorto di $2p$;
D) $X_1 + X_2$ è una Bernoulli di parametro $2p$.

CAMPIONE $\Rightarrow$ $\underline{iid}$ $\Rightarrow$ A) FALSA

$X_1 + X_2 - p$ DIPENDE DA p $\Rightarrow$ B) FALSA

$X_1 + X_2 \sim B(2, p)$ $\Rightarrow$ D) FALSA

$\mathbb{E}[X_1 + X_2] = 2p$ $\Rightarrow$ C) VERA

C Sia X, Y un campione casuale in cui ciascuna delle variabili è una Bernoulli di parametro p. Allora è necessariamente vero che:

A) $X + Y - p$ è uno stimatore non distorto di p;
B) X^2 è uno stimatore non distorto di p^2;
C) XY è uno stimatore non distorto di p^2;
D) XY è uno stimatore non distorto di $2p$.

$X + Y - p$ NON È UNO STIMATORE $\Rightarrow$ A) FALSA

$\mathbb{E}X^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 p = p \neq p^2$ $\Rightarrow$ B) FALSA

CAMPIONE $\Rightarrow$ $\underline{iid}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = p^2$ $\Rightarrow$ C) VERA E D) FALSA