Infiniti/infinitesimi, continuità

1. Stabilire gli ordini di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^4-1},\ x \to +\infty$ (R. infinitesimo di ordine 3)

2) $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \to 1$ (R. infinitesimo di ordine $\frac{1}{2}$)

3) $f(x) = x^3 - 5x^2,\ x \to 0$ (R. infinitesimo di ordine 2)

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x-1},\ x \to +\infty$ (R. infinitesimo di ordine 2)

5) $f(x) = \sqrt{2x-1},\ x \to \dfrac{1}{2}^+$ (R. infinitesimo di ordine $\frac{1}{2}$)

6) $f(x) = x^3 - 8,\ x \to 2$ (R. infinitesimo di ordine 1, N.B. $x^3 - 8 \sim 12(x-2)$)

7) $f(x) = x^3 - x^2 + 1,\ x \to +\infty$ (R. infinito di ordine 3)

8) $f(x) = \dfrac{5x}{(x^2-3x+2)^2},\ x \to 1$ (R. infinito di ordine 2, N. B. $f(x) \sim \dfrac{5}{(x-1)^2}$)

9) $f(x) = \dfrac{3-x}{x^4+x^2},\ x \to 0$ (R. infinito di ordine 2, N. B. $f(x) \sim \dfrac{3}{x^2}$)

2. Verificare che per $x \to 0^+, f(x) = x$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\dfrac{1}{\ln x}$

3. Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \sin x - \tan x$ (R. 3, N. B. $\sin x - \tan x = \dfrac{\sin x(\cos x - 1)}{\cos x} \sim x(-\dfrac{1}{2}x^2)$)

2) $f(x) = \sqrt{1+x^5} - \sqrt{1-x^5}$ (R. 5)

3) $\ln(1+x)^x$ (R. 2)

4. Disporre in ordine crescente di infinitesimi per $x \to 0^+$ le seguenti funzioni:

1) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

2) $g(x) = \ln(1 + e^{-\frac{3}{x}})$

3) $h(x) = e^{\sqrt[5]{x}} - 1$

4) $k(x) = \dfrac{(e^x - e^{-x})^5}{x}$

(R. h ha ordine $\frac{1}{5}$, f ha ordine 1, k ha ordine 4 ,g ha ordine superiore)

5. Disporre in ordine crescente di infinito per $x \to +\infty$ le seguenti funzioni:

1) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + x}$
2) $g(x) = \sqrt{x} \arctan x$
3) $h(x) = \ln(1 + e^x)$

(R. f ha ordine $\frac{1}{2}$, g ha ordine $\frac{1}{2}$, h ha ordine 1)

6. Stabilire se la funzione $f(x) = \sin x e^{\frac{1}{x}}$ se $x \neq 0$, $f(x) = 0$ se $x = 0$, è continua in $\mathbb{R}$. (R. no, non è continua in $x = 0$, infatti $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$)

7. Sia $f(x) = -2 \sin x$ se $x \leq -\frac{\pi}{2}$, $f(x) = a \sin x + b$ se $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \cos x$ se $x \geq \frac{\pi}{2}$. Determinare a e b affinché f sia continua in $\mathbb{R}$ (R. $a = -1, b = 1$)

8. Data $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, stabilire se è possibile prolungarla per continuità a $\mathbb{R}$. (R. sì, ponendo $f(1) = 2$)