Sistemi di due equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti

Enrico Schlesinger

In questo paragrafo si risolve il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases} \tag{1}$$

dove x e y sono due funzioni incognite e a, b, c e d sono quattro costanti reali. Si illustra poi la teoria con degli esempi.
Posto $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, il sistema (1) si riscrive nella forma compatta:

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u}. \tag{2}$$

N.B. Il terzo caso del teorema seguente non è stato trattato a lezione, non è nel programma d'esame, e il suo studio è facoltativo.

Teorema 1. *L'integrale generale del sistema* (2) *è*

$$\mathbf{u}(t) = c_1\mathbf{u_1}(t) + c_2\mathbf{u_2}(t)$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti reali arbitrarie, e le funzioni vettoriali $\mathbf{u_1}(t)$ e $\mathbf{u_2}(t)$ sono definite come segue:

1. *se A ha due autovettori reali linearmente indipendenti $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_2}$ relativi agli autovalori λ_1 e λ_2, allora*
$$\mathbf{u_1}(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{w_1} \quad e \quad \mathbf{u_2}(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{w_2}$$
2. *se A ha un autovalore complesso $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ e $\mathbf{w}$ è un autovettore corrispondente, allora*
$$\mathbf{u_1}(t) = \mathrm{Re}\ (e^{\lambda t}\mathbf{w}) \quad e \quad \mathbf{u_2}(t) = \mathrm{Im}\ (e^{\lambda t}\mathbf{w})$$
3. *se A ha un unico autovalore reale λ con molteplicità geometrica 1 e $\mathbf{w}$ è un autovettore corrispondente a λ, allora esiste un vettore $\mathbf{v}$ tale che $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{w}$, e*
$$\mathbf{u_1}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{w} \quad e \quad \mathbf{u_2}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w})$$

Osservazione 1.

a) Per ogni matrice quadrata reale di ordine due si verifica uno dei tre casi del teorema.

b) Se A ha due autovalori reali distinti, allora A ha due autovettori reali linearmente indipendenti e siamo nel caso 1 del teorema.

c) Se A ha un unico autovalore reale con molteplicità geometrica 2, cioè $A = \lambda I$, siamo ancora nel caso 1: come autovettori si possono prendere in questo caso i vettori della base canonica, e il sistema consiste di due equazioni indipendenti, una nell'incognita x, e l'altra in y.

Osservazione 2.

a) la parte reale di un vettore a componenti complesse è il vettore delle parti reali delle componenti:
$$\mathrm{Re}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(w_1) \\ \mathrm{Re}(w_2) \end{bmatrix}$$
e analogamente per la parte immaginaria.

b) La derivata di una funzione vettoriale $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ è la funzione vettoriale
$$\mathbf{u}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$
La derivata di una funzione complessa $x(t) = f(t) + ig(t)$, dove $f(t)$ e $g(t)$ sono la parte reale e la parte immaginaria di $x(t)$, è la funzione complessa $x'(t) = f'(t) + ig'(t)$

c) **Esercizio** Per ogni numero complesso λ e ogni vettore $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ con componenti complesse, la funzione vettoriale
$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} w_1 \\ e^{\lambda t} w_2 \end{bmatrix}$$
ha come derivata
$$\mathbf{u}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \lambda e^{\lambda t} w_1 \\ \lambda e^{\lambda t} w_2 \end{bmatrix}.$$
Suggerimento: basta mostrare la formula analoga per la funzione scalare $e^{\lambda t}$, dimostrare cioè $\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\right) = \lambda e^{\lambda t}$. Se $\lambda = \alpha + i\beta$, allora
$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$$
per cui
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\right) &= \alpha e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + \beta e^{\alpha t}(-\sin(\beta t) + i\cos(\beta t)) = \\ &= \alpha e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + i\beta e^{\alpha t}(\ cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) = \\ &= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) = \lambda e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Dimostrazione del teorema. Dimostriamo che le funzioni vettoriali $\mathbf{u}(t)$ dell'enunciato sono effettivamente delle soluzioni, ma non il fatto che siano le *uniche* soluzioni.

Siccome il sistema è lineare e omogeneo, ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione, quindi basta mostrare che $\mathbf{u_1}(t)$ e $\mathbf{u_2}(t)$ sono soluzioni.

Cominciamo a dimostrare la seguente osservazione

Osservazione fondamentale
Se $\mathbf{w}$ è un autovettore di A relativo all'autovalore λ, allora
$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{w}$$
è una soluzione (eventualmente complessa) del sistema.

Dimostriamo l'osservazione. Per ipotesi $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$, per cui, per ogni t fissato, abbiamo
$$A(e^{\lambda t}\mathbf{w}) = e^{\lambda t}A(\mathbf{w}) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{w}.$$
D'altra parte, per l'esercizio precedente
$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}\mathbf{w}) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{w}$$

per cui $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{w}$ è una soluzione di $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$.

Facciamo ora vedere che, siccome il sistema è lineare omogeneo a coefficienti reali, data una sua soluzione complessa $\mathbf{v}(t)$, la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono ancora soluzioni. Supponiamo dunque che $\mathbf{v}(t)$ soddisfi il sistema:

$$\mathbf{v}'(t) = A\mathbf{v}(t) \quad \text{per ogni } t \text{ reale.} \tag{3}$$

Scriviamo $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v_1}(t) + i\mathbf{v_2}(t)$ dove $\mathbf{v_1}(t)$ e $\mathbf{v_2}(t)$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di $\mathbf{v}(t)$. Allora

$$\mathrm{Re}(\mathbf{v}'(t)) = \mathrm{Re}(\mathbf{v_1'}(t) + i\mathbf{v_2'}(\mathbf{t})) = \mathbf{v_1'}(t)$$

e analogamente $\mathrm{Im}(\mathbf{v}'(t)) = \mathbf{v_2'}(t)$.

D'altra parte, poiché

$$A\mathbf{v}(t) = A\mathbf{v_1}(t) + iA\mathbf{v_2}(t)$$

e A è una matrice a coefficienti reali, abbiamo

$$\mathrm{Re}(A\mathbf{v}(t)) = A\mathbf{v_1}(t) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(A\mathbf{v}(t)) = A\mathbf{v_2}(t)$$

per cui prendendo le parti reali dei due membri dell'uguaglianza (3) otteniamo

$$\mathbf{v_1'}(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{v}'(t)) = \mathrm{Re}(A\mathbf{v}(t)) = A\mathbf{v_1}(t).$$

Questo mostra che $\mathbf{v_1}(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{v}(t))$ è soluzione del sistema $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$. Sostituendo nei conti la parte reale con la parte immaginaria troviamo che anche $\mathbf{v_2}(t) = \mathrm{Im}(\mathbf{v}(t))$ è una soluzione, come volevasi dimostrare.

Infine, supponiamo che A abbia un unico autovalore reale λ con molteplicità geometrica 1, e fissiamo un autovettore $\mathbf{w}$ relativo a λ. Il fatto che λ abbia molteplicità geometrica uno significa che la matrice $(A - \lambda I)$ ha rango

$$(\text{numero di colonne di } A) - 1 = 1,$$

cioè l'immagine dell'applicazione lineare

$$\mathbf{v} \mapsto (A - \lambda I)\mathbf{v}$$

ha dimensione 1. Esiste perció un vettore $\mathbf{v}$ tale che $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Siccome $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{0}$, i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, e quindi formano una base di $\mathbb{R}^2$. In particolare esistono due scalari a e b tali che $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$. Allora

$$(A - \lambda I)\mathbf{u} = (A - \lambda I)(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\mathbf{u}$$

perché $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{u}$ e $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Riscriviamo l'uguaglianza precedente portando $\lambda\mathbf{u}$ al secondo membro:

$$A\mathbf{u} = (\lambda + a)\mathbf{u}.$$

Per ipotesi λ è l'unico autovalore di A. Quindi $a = 0$ e $\mathbf{u} = b\mathbf{w}$. Dev'essere $b \neq 0$ perché $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Dividendo per b troviamo

$$(A - \lambda I)(\frac{1}{b}\mathbf{v}) = \mathbf{w}.$$

Ora ribattezziamo $\frac{1}{b}\mathbf{v}$ col simbolo $\mathbf{v}$ in modo che $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{w}$: abbiamo dimostrato che esiste un vettore $\mathbf{v}$ tale che $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{w}$, e per finire dobbiamo verificare che $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w})$ è una soluzione del sistema. Per questo calcoliamo la derivata:

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w}) = \lambda e^{\lambda t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w}) + e^{\lambda t}\mathbf{w} = e^{\lambda t}(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{w} + \lambda t\mathbf{w})$$

Osserviamo che $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{w}$ significa $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{w}$, quindi

$$e^{\lambda t}(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{w} + \lambda t\mathbf{w}) = e^{\lambda t}(A\mathbf{v} + A(t\mathbf{w}) = A(e^{\lambda t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w}))$$

In conclusione $\frac{d}{dt}e^{\lambda t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w}) = A(e^{\lambda t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w}))$, cioè $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w})$ è una soluzione del sistema, come volevasi dimostrare. $\square$

Esempio 1. Risolviamo il sistema

$$
\left\{
\begin{aligned}
x' &= x + y \\
y' &= x + y
\end{aligned}
\right.
\tag{4}
$$

In questo caso la matrice del sistema è $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ che ha polinomio caratteristico $\lambda(\lambda - 2)$ e quindi due autovalori reali distinti $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. Siamo perció nel primo caso del teorema. Un autovettore relativo a $\lambda_1 = 0$ è $\mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, un autovettore relativo a $\lambda_2 = 2$ è $\mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. L'integrale generale del sistema è quindi

$$
\mathbf{u}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 e^{2t} \\ -c_1 + c_2 e^{2t} \end{bmatrix}
$$

Esempio 2. Risolviamo il sistema

$$
\left\{
\begin{aligned}
x' &= \quad x + y \\
y' &= -x + y
\end{aligned}
\right.
\tag{5}
$$

In questo caso la matrice del sistema è $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ che ha polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ le cui radici sono $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$. Siamo perció nel secondo caso del teorema. Un vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ è un autovettore relativo a $\lambda_1 = 1 + i$ se e solo se è nonnullo e le sue componenti soddisfano l'equazione

$$
-ix + y = 0.
$$

Scegliendo $x = 1$ troviamo l'autovettore $\mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$. Per il teorema l'integrale generale del sistema è

$$
\mathbf{u}(t) = c_1 \mathrm{Re}(\mathbf{v}(t)) + c_2 \mathrm{Im}(\mathbf{v}(t))
$$

dove $\mathbf{v}(t)$ è la soluzione complessa

$$
\mathbf{v}(t) = e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = e^t e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = e^t(\cos(t) + i\sin(t)) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \cos(t) \\ -e^t \sin(t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{bmatrix}.
$$

L'integrale generale del sistema è perció

$$
\mathbf{u}(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^t \cos(t) \\ -e^t \sin(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t) \\ -c_1 e^t \sin(t) + c_2 e^t \cos(t) \end{bmatrix}
$$

Esempio 3. Risolviamo il sistema

$$
\left\{
\begin{aligned}
x' &= ax + y \\
y' &= ay
\end{aligned}
\right.
\tag{6}
$$

In questo caso la matrice del sistema è $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. La matrice A ha un unico autovalore reale $\lambda = a$ con molteplicità geometrica uno, quindi siano nel terzo caso del teorema. Un autovettore relativo a $\lambda = a$ è $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ soddisfa l'uguaglianza $(A - aI)\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Applicando il teorema troviamo che l'integrale generale del sistema è

$$
\mathbf{u}(t) = c_1 e^{at} \mathbf{w} + c_2 e^{at}(\mathbf{v} + t\mathbf{w}) = c_1 e^{at} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{at} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2 t)e^{at} \\ c_2 e^{at}. \end{bmatrix}
$$

Esercizio 1. Risolvere il sistema precedente senza usare il teorema. Suggerimento: si ricavi $y(t)$ dalla seconda equazione e si sostituisca l'espressione ricavata nella prima equazione, in modo da ottenere un'equazione nella sola x.

Esempio 4. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x' = & 3x + y \\ y' = & -x + 5y \end{cases} \tag{7}$$

In questo caso la matrice del sistema è $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. La matrice A ha un unico autovalore reale $\lambda = 4$ con molteplicità geometrica uno, quindi siano nel terzo caso del teorema. Un autovettore relativo a $\lambda = 4$ è $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ soddisfa l'uguaglianza $(A - 4I)\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Applicando il teorema troviamo che l'integrale generale del sistema è

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{4t}\mathbf{w} + c_2 e^{4t}(\mathbf{v} + t\mathbf{w}) = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} t \\ 1 + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2 t)e^{4t} \\ (c_1 + c_2 + c_2 t)e^{4t}. \end{bmatrix}$$

Esercizio 2. Per ciascuno dei sistemi precedenti, si determini la soluzione che verifica le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Si ripeta l'esercizio con le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ e poi con le condizioni iniziali $x(0) = y(0) = 0$.

Esercizio 3. Si trovi un esempio di matrice A per ciascuno dei tre casi del teorema (non diagonale, e diversa da quella degli esempi precedenti), e si risolva il sistema corrispondente.

Esempio 5. Un'equazione del second'ordine della forma

$$x''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$$

si può trasformare in un sistema di due equazioni del primo ordine introducendo una nuova incognita $y(t)$ soggetta alla relazione $y = x'$. Derivando questa equazione otteniamo $y' = x''$, e sostituendo nell'equazione troviamo il sistema

$$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -cx - by \end{cases} \tag{8}$$

La matrice di tale sistema è $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}$, il cui polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + b\lambda + c$$

coincide con l'equazione caratteristica dell'equazione $x'' + bx' + cx = 0$. Supponiamo che a sia un autovalore di A, o equivalentemente una radice dell'equazione caratteristica. Allora un autovettore associato a $\lambda = a$ è $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$. Per il teorema una soluzione del sistema lineare è $\mathbf{u}(t) = e^{at}\mathbf{w}$, la cui prima componente è $x(t) = e^{at}$, in accordo con quanto trovato nello studio delle equazioni del second'ordine.

Per approfondire l'argomento si può consultare il sito web
http://www.egwald.com/linearalgebra/lineardifferentialequations.php